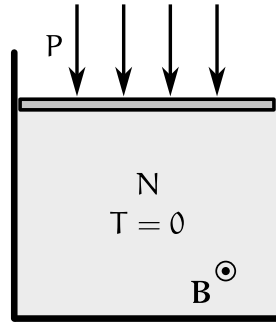


■ **Problema 1.** Dentro de un cilindro hay un gas ideal de N fermiones de masa m y espín $\frac{1}{2}$. El cilindro tiene un pistón móvil sobre el que se ejerce una presión externa P . Hay aplicado un campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{z}$. La proyección del momento magnético de las partículas en la dirección $\hat{z}$ es μs , donde s es el signo de la proyección del espín. El gas está en equilibrio a temperatura constante $T = 0$.



- Escriba las ecuaciones que determinan la energía de Fermi y el volumen. *Ayuda:* si tiene que calcular la presión del gas, tome el límite $T \rightarrow 0$ en la expresión general.
- ¿Cuál es el valor máximo de la presión tal que, para $P \leq P_{\text{máx}}$, sólo están ocupados los estados con una de las proyecciones del espín?
- La presión se mantiene en el valor calculado en el ítem anterior y se aumenta lentamente el módulo de $\mathbf{B}$. ¿Qué sucede con el volumen ocupado por el gas?

■ **Solución.** Puesto que el problema es encontrar la energía de Fermi y el volumen, es razonable escribir antes que nada las ecuaciones que determinan el número de partículas y la presión del gas a temperatura igual a cero. El número de partículas está dado por

$$N = \frac{4\pi V}{h^3} \sum_{s=\pm 1} \int_0^\infty dp p^2 \Theta\left(\epsilon_F - \frac{p^2}{2m} + s\mu B\right) \quad (1)$$

$$= \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{3h^3} \left[\Theta(\epsilon_F + \mu B) (\epsilon_F + \mu B)^{3/2} + \Theta(\epsilon_F - \mu B) (\epsilon_F - \mu B)^{3/2} \right].$$

Para la presión, conviene usar el resultado general para sistemas extensivos, $\beta PV = \log \mathcal{Z}$, y estudiar el límite cuando $T \rightarrow 0$. En primer lugar,

$$\beta PV = \frac{4\pi V}{h^3} \sum_{s=\pm 1} \int_0^\infty dp p^2 \log \left\{ 1 + z \exp \left[-\beta \left(\frac{p^2}{2m} - s\mu B \right) \right] \right\} \quad (2)$$

$$= \frac{V}{\lambda^3} \left[f_{5/2}(ze^{\beta\mu B}) + f_{5/2}(ze^{-\beta\mu B}) \right].$$

*zanellaj@df.uba.ar

Cuando $T \rightarrow 0$,

$$f_{5/2}(ze^{\pm\beta\mu B}) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})} \int_0^\infty dx x^{3/2} \Theta[\beta(\epsilon_F \pm \mu B) - x] = \frac{\beta^{5/2}}{\Gamma(\frac{7}{2})} \Theta(\epsilon_F \pm \mu B) (\epsilon_F \pm \mu B)^{5/2}. \quad (3)$$

Entonces,

$$\beta P \rightarrow \frac{8\beta^{5/2}}{15\sqrt{\pi}\lambda^3} \left[\Theta(\epsilon_F + \mu B) (\epsilon_F + \mu B)^{5/2} + \Theta(\epsilon_F - \mu B) (\epsilon_F - \mu B)^{5/2} \right]. \quad (4)$$

El parámetro β , que podría ser problemático cuando $T \rightarrow 0$, se cancela, y queda

$$P = \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{15h^3} \left[\Theta(\epsilon_F + \mu B) (\epsilon_F + \mu B)^{5/2} + \Theta(\epsilon_F - \mu B) (\epsilon_F - \mu B)^{5/2} \right]. \quad (5)$$

Esta ecuación determina por sí sola la energía de Fermi; luego la Ec. (1) determina V .

Si $\epsilon_F < |\mu B|$, sólo uno de los escalones es distinto de cero y únicamente los estados con momento magnético paralelo al campo están ocupados. El valor máximo de P está definido por la condición $\epsilon_F = |\mu B|$, es decir

$$P_{\text{máx}} = \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{15h^3} (2|\mu B|)^{5/2}. \quad (6)$$

Si la presión se mantiene constante en el valor calculado anteriormente y se aumenta el módulo del campo magnético, se refuerza la condición de que los estados con momento magnético antiparalelo al campo se mantengan desocupados. Las ecuaciones que definen el número de partículas y la energía de Fermi son

$$N = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{3h^3} (\epsilon_F + |\mu B|)^{3/2}, \quad P = \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{15h^3} (\epsilon_F + |\mu B|)^{5/2}. \quad (7)$$

Al aumentar $|B|$, para que la presión no cambie, la energía de Fermi debe disminuir, de modo que $\epsilon_F + |\mu B|$ se mantenga constante. Como el número de partículas está fijo, la primera ecuación implica que el volumen tampoco varía.

■ **Problema 2.** Considere un gas de electrones como un gas ideal de fermiones de espín $\frac{1}{2}$ y masa m_e . Existe una reacción $e^- + e^- \rightleftharpoons B$ que permite que los electrones se combinen de a pares, formando partículas bosónicas. Estas partículas tienen espín cero y masa $m_B = 2m_e$, de manera que la masa total Nm_e se conserva. Los dos gases se encuentran en equilibrio a temperatura T en un recipiente de volumen V .

- Muestre que hay una transición de fase y determine la temperatura crítica $T^{(c)}$.
- Encuentre las ecuaciones paramétricas que definen $\epsilon = E/(NkT)$ como función de T . Sólo deben intervenir ϵ , $\tau = T/T^{(c)}$ y z_e , donde z_e es la fugacidad de los electrones.

■ **Solución.** Las fugacidades están relacionadas por $z_e^2 = z_B$. Si no hay condensado,

$$N = N_e + 2N_B = \frac{2V}{\lambda_e^3} f_{3/2}(\sqrt{z_B}) + \frac{2V}{\lambda_B^3} g_{3/2}(z_B). \quad (8)$$

En el límite termodinámico, el máximo valor que puede tomar z_B es 1, de modo que, considerado como función de z_B , si no se incluye la población del fundamental, N está acotado. Entonces, por debajo de cierta temperatura, va a aparecer una fase condensada y será $z_B = 1$. Debido a que $z_e^2 = z_B$, la fugacidad de los electrones también será igual a 1. La temperatura crítica está determinada por la condición

$$N = \frac{2V}{\lambda_e^3} f_{3/2}(1) + \frac{2V}{\lambda_B^3} g_{3/2}(1). \quad (9)$$

Luego, teniendo en cuenta que $\lambda_B^3 = 2^{-3/2} \lambda_e^3$,

$$\frac{N \lambda_e^{(c)3}}{2V} = f_{3/2}(1) + 2^{3/2} g_{3/2}(1). \quad (10)$$

Es decir,

$$kT^{(c)} = \frac{h^2}{2\pi m_e} \left\{ \left[f_{3/2}(1) + 2^{3/2} g_{3/2}(1) \right]^{-1} \frac{N}{2V} \right\}^{2/3}. \quad (11)$$

Pasemos al cálculo de la energía. Por encima de $T^{(c)}$,

$$E = \frac{3}{2} \frac{V}{\lambda_e^3} kT \left[2f_{5/2}(z_e) + 2^{3/2} g_{5/2}(z_e^2) \right]. \quad (12)$$

Conviene reescribir la Ec. (8) como

$$N = \frac{2V}{\lambda_e^3} \left[f_{3/2}(z_e) + 2^{3/2} g_{3/2}(z_e^2) \right]. \quad (13)$$

Así,

$$\epsilon = \frac{E}{NkT} = \frac{3}{2} \frac{f_{5/2}(z_e) + 2^{1/2} g_{5/2}(z_e^2)}{f_{3/2}(z_e) + 2^{3/2} g_{3/2}(z_e^2)}. \quad (14)$$

Para definir ϵ como función de $\tau = T/T^{(c)}$ en forma paramétrica, hay que escribir τ como función de z_e . A partir de las Ecs. (10) y (13), obtenemos

$$\tau = \left[\frac{f_{3/2}(1) + 2^{3/2} g_{3/2}(1)}{f_{3/2}(z_e) + 2^{3/2} g_{3/2}(z_e^2)} \right]^{2/3}. \quad (15)$$

Las Ecs. (14) y (15) definen ϵ paramétricamente como función de τ para $T \geq T^{(c)}$.

Por debajo de $T^{(c)}$, es posible definir ϵ como función de τ sin la mediación de un parámetro. Primero,

$$\epsilon = \frac{3}{2} \frac{V}{N \lambda_e^3} \left[2f_{5/2}(1) + 2^{3/2} g_{5/2}(1) \right]. \quad (16)$$

Ahora usamos la Ec. (10) para eliminar V/N , con el siguiente resultado:

$$\epsilon = \frac{3}{2} \frac{f_{5/2}(1) + 2^{1/2} g_{5/2}(1)}{f_{3/2}(1) + 2^{3/2} g_{3/2}(1)} \tau^{3/2}. \quad (17)$$

■ **Problema 3.** Los N espines de una cadena de Ising **cerrada** están numerados de 1 a N , tienen momento magnético μ y constante de acoplamiento J . **Sólo** sobre el espín s_1 actúa un campo externo B . Se definen $K = \beta J$ y $b = \beta \mu B$. Calcule la función de partición y encuentre el valor medio de s_1 . *Ayuda:* para calcular Z , use matrices; para calcular $\langle s_1 \rangle$, use Z .

■ **Solución.** La función de partición es

$$Z = \sum_{\{s_i\}} e^{b s_1} e^{K s_1 s_2} \dots e^{K s_N s_1} = \sum_{\{s_i\}} e^{b s_1} q_{s_1 s_2} \dots q_{s_N s_1}. \quad (18)$$

Esto puede escribirse como

$$Z = \text{Tr}(\mathbf{R} \mathbf{q}^N), \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} e^b & 0 \\ 0 & e^{-b} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

En general, cuando un campo B actúa sobre todos los espines,

$$\mathbf{q}^\ell = \lambda_+^\ell \mathbf{q}_+ + \lambda_-^\ell \mathbf{q}_-, \quad \lambda_\pm = e^K \left(\cosh b \pm \sqrt{e^{-4K} + \sinh^2 b} \right), \quad (20)$$

$$\mathbf{q}_+ = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_- = \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\cot 2\varphi = e^{2K} \sinh^2 b. \quad (22)$$

En estas ecuaciones, cuando $b = 0$, $\lambda_+ = 2 \cosh K$, $\lambda_- = 2 \sinh K$, $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, y

$$\mathbf{q}^\ell = \frac{1}{2} (2 \cosh K)^\ell \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (2 \sinh K)^\ell \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Sin mucha dificultad se encuentra

$$Z = 2^N (\cosh^N K + \sinh^N K) \cosh b. \quad (24)$$

El valor medio de s_1 es

$$\langle s_1 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial b} = \tanh b. \quad (25)$$

Final alternativo

Sumando explícitamente sobre s_1 en la Ec. (18),

$$Z = e^b Z_+ + e^{-b} Z_-, \quad (26)$$

donde

$$Z_{\pm} = \sum'_{\{s_i\}} e^{\pm K(s_N + s_2)} \prod'_{\{a,b\}} e^{K s_a s_b}. \quad (27)$$

La suma primada es sobre todas las variables de espín excepto s_1 , y la productoria primada es sobre todos los pares de espines acoplados que no involucran a s_1 . El cambio de variables $s_i \rightarrow -s_i$ muestra que $Z_+ = Z_-$. Si $b = 0$, la función de partición es la del sistema usual sin campo, de modo que $Z_0 = Z_+ + Z_- = 2Z_{\pm}$, donde

$$Z_0 = (2 \cosh K)^N + (2 \sinh K)^N. \quad (28)$$

Esto implica,

$$Z_{\pm} = 2^{N-1} (\cosh^N K + \sinh^N K). \quad (29)$$

Finalmente, volviendo a la Ec. (26),

$$Z = 2^{N-1} (\cosh^N K + \sinh^N K) (e^b + e^{-b}) = 2^N (\cosh^N K + \sinh^N K) \cosh b. \quad (30)$$

Es muy sencillo generalizar este resultado para cualquier red de Ising con acoplamientos de la forma $-J_{ab}s_a s_b$. El resultado siempre es

$$Z = Z_0 \cosh b, \quad (31)$$

donde Z_0 es la función de partición cuando no hay aplicado ningún campo externo.