Física Teórica 3 — segundo cuatrimestre de 2025

Guía 2: *Combinatoria y probabilidades*

1. **Combinatoria social**.

   a) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar n personas formando una hilera?
   b) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar n personas formando una ronda?
   c) ¿Cuántos pares de personas pueden elegirse entre n personas?
   d) ¿De cuántas formas se pueden distribuir $2n$ personas en n parejas?
   e) ¿Cuántos grupos de m personas pueden elegirse entre n personas?
   f) ¿De cuántas formas se pueden distribuir mn personas en n grupos de m personas?

2. **Combinatoria literaria**.

   a) ¿Cuántas palabras de longitud n se pueden formar con un conjunto de m letras, tanto en el caso en el que está permitido repetir letras como en el caso en que no?
   b) ¿Cuántos anagramas tiene la palabra *manzana*?
   c) ¿Cuántos palíndromos de longitud n pueden formarse con un alfabeto de m letras?

3. **El problema de los libros y las cajas**. Hay n libros y m cajas. Cada caja puede contener hasta n libros. Cuántas maneras hay de distribuir los libros en las cajas si:

   a) Los libros son indistinguibles y las cajas distinguibles.
   b) Los libros y las cajas son distinguibles.
   c) Los libros y las cajas son indistinguibles.
   d) Los libros son distinguibles y las cajas indistinguibles, y no puede haber cajas vacías.
   e) Los libros son distinguibles y las cajas indistinguibles, y sí puede haber cajas vacías.
   f) Los libros son indistinguibles y las cajas distinguibles, pero cada caja puede contener como máximo k libros.

4. **Numismática I**. Una moneda se arroja n veces:

   a) ¿Cuántas secuencias existen en las que aparezcan m caras?
   b) ¿Cuántas secuencias existen en las que no hay dos caras seguidas?
   c) ¿Cuántas secuencias existen en las que dos caras seguidas recién aparecen en los dos últimos tiros?
   d) ¿Cuántas secuencias existen en las que inicialmente salen m caras seguidas y, o bien $m = n$, o bien en el lanzamiento $m + 1$ sale cruz?
   e) ¿Cuántas secuencias existen en las que el número de caras es par?

5. **Numismática II**. Considere una fila de N monedas que muestran cara o cruz. No hay una dirección privilegiada desde la cual leer la secuencia de monedas: dos secuencias relacionadas por una reflexión se consideran iguales. Así, para cuatro monedas, las secuencias $\times\circ\circ\circ$ y $\circ\circ\circ\times$ se consideran iguales. ¿Cuántas secuencias distintas existen?

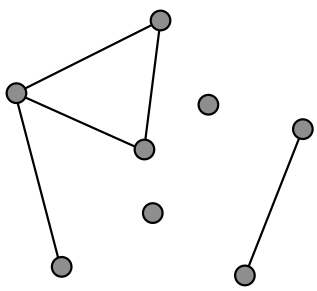
6. **Grafos**. Dado un conjunto de N vértices distinguibles, un grafo simple **no dirigido** queda definido especificando los pares de vértices que están conectados por aristas. Puede haber a lo sumo una arista entre cada par de vértices y no puede haber aristas que empiecen y terminen en el mismo vértice (loops).

    a) ¿Cuántos grafos simples no dirigidos con ℓ aristas pueden formarse?

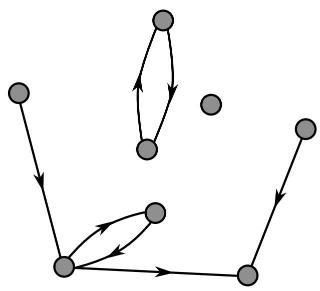
    b) ¿Cuántos grafos simples no dirigidos pueden formarse en total?

    c) Se dice que un vértice está aislado si no está conectado a ningún otro vértice. ¿Cuántos grafos simples no dirigidos existen con ℓ aristas y sin vértices aislados?

    d) Un grafo simple **dirigido** queda definido especificando los pares de vértices que están conectados por aristas y, al mismo tiempo, especificando las direcciones de las aristas. Entre cada par de vértices puede haber a lo sumo una arista orientada en cada dirección, de modo que puede haber pares de vértices conectados por dos aristas. Igual que antes, no puede haber loops. ¿Cuántos grafos simples dirigidos se pueden formar con N vértices y ℓ aristas?



Grafo simple no dirigido



Grafo simple dirigido

7. **El problema del cumpleaños**. En un aula hay n personas. Considerando que todos los años tienen 365 días, que la probabilidad de que una persona cumpla años un determinado día es 1/365, y que las fechas de los cumpleaños de las n personas son estadísticamente independientes, calcular la probabilidad p_n de que al menos dos personas cumplan años el mismo día. ¿Cuántas personas debe haber en el aula para que la probabilidad p_n supere el 50%? Tome por asalto una computadora y grafique p_n.

8. **El problema del cumpleaños exagerado**. En un planeta cuyo año tiene una duración de 10^{30} días viven un mol de personas. ¿Cuál es la probabilidad de que todas las personas cumplan años en días distintos? Se espera que dé un resultado numérico.

9. **Falso positivo**. Aparece una nueva enfermedad, fatal pero asintomática, hasta que la cabeza del interesado explota. La enfermedad es extremadamente rara, estimándose que se da en una de cada 100 millones de personas. Por suerte, se inventa un test de diagnóstico. Teniendo en cuenta la gravedad de la enfermedad, EL LABORATORIO que vende el test recomienda, desinteresadamente, aplicarlo a toda la población. "Además", argumenta, "el test es 99,9999% *infalible*" (las cursivas son nuestras): la probabilidad de que el test falle y dé positivo al ser aplicado a una persona sana es de uno en un millón (*falso positivo*), y existe la misma probabilidad de que el test falle y dé negativo al ser aplicado a una persona que sí tiene la enfermedad (*falso negativo*). Esto es, ¡una chance en un millón de que el test falle! "¿No es como decir que el test es perfecto?", preguntan retóricamente los lobistas de EL LABORATORIO. ¿Quién no apostaría su cabeza a que el resultado del test está en lo cierto?

   a) Pues bien. Usted se hace el test y le da positivo. Dada la baja probabilidad de que el test falle, ¿hay alguna esperanza razonable de que no tenga la enfermedad, o debe ya mismo dejar todos sus asuntos en orden y cubrirse la cabeza con una BOLSA®, que también comercializa EL LABORATORIO? Concretamente, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga la enfermedad?
   b) Si el test le da negativo, ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga la enfermedad?
   c) Generalice sus resultados para valores arbitrarios de las probabilidades que aparecen como dato en el enunciado.
   d) En un asunto tan serio, tal vez sería preferible repetir el test si este da positivo. ¿Cuál es la probabilidad de estar sano si ambos tests dan positivo?

10. **El problema de los pistoleros daneses**. Un conocido problema de la teoría de juegos involucra a cuatro pistoleros [*revolverhelte*] daneses que se baten hasta que uno solo queda con vida. Ese problema da origen a otro, que traducimos aquí:

    > "El último pistolero se propone celebrar su triunfo por todo lo alto. ¡Ahora tiene tantos amigos! (pues esto suele sucederle a los ganadores). Eligiendo sólo a lo más pasable, decide reunir a 111 invitados para un desaforado banquete [*ædegilde*]. Tal como ha leído que es de uso en los mejores países del mundo (aunque Dinamarca ciertamente es un reino), frente a cada silla dispone una tarjeta con el nombre de un invitado, pero la realidad no suele coincidir con las previsiones. Hombre de poco roce, el primer invitado en llegar ignora las tarjetas y se sienta en un lugar al azar [...] Resignados y corteses (hijos de Odín al fin y al cabo), los otros invitados (que llegan de uno en uno) se sientan en sus lugares asignados, siempre y cuando los encuentren desocupados; caso contrario, toman un lugar desocupado al azar. La pregunta es la siguiente: ¿cuál es la probabilidad de que el último invitado en llegar se siente en el lugar que le fue originalmente asignado?"

Los casos de 2, 3 y 4 invitados pueden analizarse directamente y servir como base al problema de los 111 invitados. Es interesante hacer el experimento en la computadora: en muy pocas líneas puede escribirse un programa que genere el ordenamiento final de los invitados, cuyo número puede variarse; ejecutándolo muchas veces y contando aquellas en las que el último invitado se sienta en el lugar correcto, puede estimarse la probabilidad buscada y estudiar su dependencia con el número de invitados.

11. **El Quini-n**. Muchos juegos de lotería tienen la siguiente forma: el apostador debe elegir n números distintos del conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$, donde $n \leqslant m$. El día del sorteo, se eligen al azar n números distintos del mismo conjunto. La ganancia del apostador es función del número de aciertos, es decir, del número de elementos que tienen en común el conjunto de los números que eligió y el conjunto de los números sorteados. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de aciertos sea exactamente k?

12. ***Problème des rencontres***. Hay n objetos dispuestos en n sitios según un orden inicial. Tiene lugar una permutación al azar de estos objetos. Se pide encontrar la probabilidad p_n de que ningún objeto quede en su posición inicial. En definitiva, hay que contar el número de permutaciones que no dejan ningún elemento en su lugar. Los ordenamientos que tienen esta propiedad se llaman *desarreglos*. El número de desarreglos suele llamarse subfactorial y denotarse con los símbolos $!n$ o d_n. Resulta complicado contar directamente el número de desarreglos. Al igual que en muchos problemas de combinatoria, es más sencillo encontrar una relación de recurrencia y operar a partir de ella. En particular, en este problema se usa el método de la función generatriz.

    a) Considere los casos con $n = 1$, 2, 3 y 4 y encuentre d_n por simple enumeración.

    b) Si se define $d_0 = 1$, demuestre que d_n satisface la siguiente relación de recurrencia:

    $$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}), \qquad n \geqslant 2.$$

    c) Muestre que, en términos de las probabilidades, la ecuación anterior implica:

    $$np_n = (n-1)p_{n-1} + p_{n-2}.$$

    d) A partir de esta relación de recurrencia, extienda la definición de p_n para todo n entero. ¿Cuánto vale p_0? ¿Cuánto vale p_n con $n < 0$?

    e) Defina la función generatriz $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n x^n$ y transforme la relación de recurrencia para p_n en una ecuación diferencial para $F(x)$. ¿Cuánto vale $F(0)$?

    f) Resuelva la ecuación diferencial para $F(x)$, imponiendo la condición inicial en $x = 0$.

    g) Desarrollando $F(x)$ en potencias de x, encuentre p_n. Grafique esta función y estudie su límite cuando $n \to \infty$.

    h) Resuelva el problema usando el principio de inclusión-exclusión.

13. Considere el conjunto de todas las permutaciones de la secuencia $(1, 2, \ldots, N)$. Asumiendo que todas las permutaciones tienen la misma probabilidad, ¿cuál es el valor medio del número de elementos que se mantienen en su posición original? Existe una manera complicada y una manera simple de resolver este problema.

14. Una caja está dividida en m compartimentos. Dentro de la caja hay N fichas indistinguibles distribuidas al azar uniformemente entre todos los compartimentos. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos un compartimento vacío?

15. Calcule la longitud media de la secuencia inicial de caras para el problema 4d.

16. Arnulfo y Burgundófora juegan a lanzar una moneda por turnos; gana el primero que obtenga cara. Si Arnulfo hace el primer lanzamiento, calcule las probabilidades que tiene cada uno de ganar. *Ayuda:* hay infinitos caminos independientes que llevan a uno u otro ganador; la probabilidad correspondiente puede obtenerse sumando las probabilidades de cada camino. Sin embargo, existe una manera casi instantánea de resolver este problema. Sabiendo que esa manera existe, trate de encontrarla.

17. Acerca de cierta moneda, inicialmente sólo se puede afirmar que la densidad de probabilidad de que al arrojarla salga cara es uniforme en $[0, 1]$. Se arroja la moneda n veces y las n veces sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara en el siguiente tiro? Usted encuentra una moneda en la calle. La arroja 10 veces. Las 10 veces sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente tiro salga cara?