

Física Teórica 3 – segundo cuatrimestre de 2025

Guía 5: fermiones ultrarrelativistas*

■ **Problema 16.** Para un gas ideal de fermiones ultrarrelativistas de espín s :

- Escribir las ecuaciones paramétricas que determinan S , P , U y c_V como funciones de T , V y N .
- Calcular estas cantidades para $T = 0$ y obtener sus primeras correcciones para $T > 0$.
- Mostrar que, para $z \ll 1$, se recupera el límite clásico. Encontrar las primeras correcciones cuánticas para la energía, el calor específico y la ecuación de estado.
- Graficar PV/N y c_V en función de T y verificar que se obtienen los comportamientos esperados para temperaturas muy bajas y temperaturas muy altas.

■ **Solución.** Cuando las partículas son ultrarrelativistas, la energía de una partícula con impulso p es $\epsilon(p) = pc$. Entonces, la función de partición gran canónica está dada por

$$\log Z = \frac{g_s V}{\hbar^3} \int d^3 p \log(1 + ze^{-\beta pc}) = \frac{4\pi g_s V}{\hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 \log(1 + ze^{-\beta pc}), \quad (1)$$

donde V es el volumen ocupado por el gas y $g_s = 2s + 1$ es la degeneración de espín. Integrando por partes,

$$\log Z = \frac{4\pi g_s V \beta c}{3\hbar^3} \int_0^\infty dp \frac{p^3}{z^{-1} e^{\beta pc} + 1}. \quad (2)$$

Con el cambio de variables $x = \beta pc$, queda

$$\log Z = \frac{4\pi g_s V}{3(\beta \hbar c)^3} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{z^{-1} e^x + 1}. \quad (3)$$

Recordando la definición de las funciones de Fermi–Dirac,

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1} e^x + 1}, \quad (4)$$

la función de partición se escribe como

$$\log Z = \frac{4\pi g_s V}{3(\beta \hbar c)^3} \Gamma(4) f_4(z) = \pi g_s V \left(\frac{2}{\beta \hbar c} \right)^3 f_4(z). \quad (5)$$

La longitud de onda de de Broglie de una partícula ultrarrelativista con una energía kT y un impulso kT/c es

$$\lambda_{dB} = \frac{\hbar}{p} = \beta \hbar c. \quad (6)$$

*zanella.j@df.uba.ar

De manera que, por analogía con el caso no relativista, podemos introducir una longitud de onda térmica, del mismo orden de magnitud que la longitud de onda de de Broglie y que haga que las ecuaciones se escriban de una forma más simple. Es decir, definamos

$$\lambda^3 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\beta \hbar c}{2} \right)^3. \quad (7)$$

Entonces,

$$\log \mathcal{Z} = \frac{g_s V}{\lambda^3} f_4(z). \quad (8)$$

Lo que hay que recordar es que λ es proporcional a β .

Pasemos ahora al cálculo de las funciones termodinámicas que pide el problema. El objetivo es obtener ecuaciones paramétricas que permitan definir estas magnitudes como funciones de la temperatura. Para eso, necesitamos escribir primero la relación entre el número de partículas y la fugacidad, que es el parámetro natural:

$$N = z \frac{\partial \log \mathcal{Z}}{\partial z} = \frac{g_s V}{\lambda^3} z f'_4(z) = \frac{g_s V}{\lambda^3} f_3(z) = \frac{8\pi g_s V}{(\beta \hbar c)^3} f_3(z). \quad (9)$$

Aquí hemos usado la siguiente propiedad: $z f'_v(z) = f_{v-1}(z)$. La energía del gas es

$$E = -\frac{\partial \log \mathcal{Z}}{\partial \beta} = \frac{3g_s V}{\lambda^3} kT f_4(z) = \frac{24\pi g_s V}{(\beta \hbar c)^3} kT f_4(z). \quad (10)$$

Usando la Ec. (9), esto también puede escribirse como

$$E = 3NkT \frac{f_4(z)}{f_3(z)}. \quad (11)$$

Para la presión, obtenemos

$$P = kT \frac{\partial \log \mathcal{Z}}{\partial V} = \frac{kT \log \mathcal{Z}}{V} = \frac{g_s}{\lambda^3} kT f_4(z) = \frac{8\pi g_s}{(\beta \hbar c)^3} kT f_4(z) = \frac{NkT}{V} \frac{f_4(z)}{f_3(z)}. \quad (12)$$

Notar que vale la relación $PV = \frac{1}{3}E$. Esto siempre ocurre cuando se consideran partículas ultrarrelativistas, en especial, en el caso del gas de fotones. La entropía puede calcularse de varias formas. Una posibilidad es usar la relación termodinámica $\Omega = E - TS - N\mu$, donde $\Omega = -kT \log \mathcal{Z}$ es el gran potencial. Así,

$$\frac{S}{k} = \beta E + \log \mathcal{Z} - N \log z = \frac{4}{3} \beta E - N \log z = \frac{4g_s V}{\lambda^3} f_4(z) - N \log z. \quad (13)$$

Usando la Ec. (9), queda

$$\frac{S}{Nk} = \frac{4f_4(z)}{f_3(z)} - \log z. \quad (14)$$

Con esto ya podríamos escribir las ecuaciones paramétricas que pide el problema, pero de una manera muy poco civilizada. Es importante notar que no se necesita invertir

ninguna función de Fermi–Dirac para graficar todas estas cantidades como funciones de la temperatura. Lo único que hay que hacer es escribir T como función de z y, en cada caso, se tendrá una función definida paramétricamente a través de z . Despejando kT de la Ec. (9), tenemos

$$kT = hc \left[\frac{N}{8\pi g_s V f_3(z)} \right]^{1/3}. \quad (15)$$

Entonces, por ejemplo, la definición paramétrica de la energía como función de la temperatura es

$$\begin{cases} kT = hc \left[\frac{N}{8\pi g_s V f_3(z)} \right]^{1/3}, \\ E = 3NkT \frac{f_4(z)}{f_3(z)}. \end{cases} \quad (16)$$

Estas ecuaciones son prácticamente inútiles. Si quisiéramos graficar E como función de kT deberíamos elegir valores de N y de V , y lidiar con las constantes h y c . ¿Cómo podemos extraer algo útil de una ecuación que depende de tantos detalles? La clave está en introducir una escala característica de energía y graficar la energía por partícula, medida en esta escala, en función de la temperatura medida en la misma escala. La escala característica en los problemas de fermiones es la energía de Fermi, esto es, el potencial químico cuando $T = 0$. Este es un parámetro intensivo que caracteriza al sistema, independientemente de que esté o no a temperatura cero, así como la masa de una partícula caracteriza su energía en reposo, independientemente de si la partícula está en reposo o se mueve al 99% de la velocidad de la luz.

La energía de Fermi está determinada a través del impulso de Fermi que, a su vez, está definido mediante la condición

$$N = \frac{4\pi g_s V}{h^3} \int_0^{p_F} dp p_F^2 = \frac{4\pi g_s V p_F^3}{3h^3} = \frac{4\pi g_s V \epsilon_F^3}{3(hc)^3}. \quad (17)$$

La energía de Fermi en términos de la densidad es

$$\epsilon_F = hc \left(\frac{3N}{4\pi g_s V} \right)^{1/3}. \quad (18)$$

La energía de Fermi depende sólo de la densidad del gas y define una escala típica de energía. Cuando hablamos bajas o altas temperaturas, lo que determina cuándo una temperatura es baja o alta es su comparación con al energía de Fermi.

Usando la Ec. (18), la Ec. (15) puede escribirse en una forma adimensional que compara explícitamente las dos escalas de energía características del problema:

$$\frac{kT}{\epsilon_F} = \frac{1}{[6f_3(z)]^{1/3}}. \quad (19)$$

Entonces, las ecuaciones paramétricas que definen E y S son

$$\begin{cases} \frac{kT}{\epsilon_F} = \frac{1}{[6f_3(z)]^{1/3}}, \\ \frac{E}{N\epsilon_F} = \frac{3f_4(z)}{f_3(z)} \frac{kT}{\epsilon_F}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{kT}{\epsilon_F} = \frac{1}{[6f_3(z)]^{1/3}}, \\ \frac{S}{Nk} = \frac{4f_4(z)}{f_3(z)} - \log z. \end{cases} \quad (20)$$

Esta manera escalada de escribir las ecuaciones paramétricas tiene la ventaja de que define funciones universales que no dependen de los parámetros de ningún sistema en particular.

Para completar nuestra lista de funciones, tenemos que calcular el calor específico a volumen constante,

$$c_V = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V,N}. \quad (21)$$

Hemos demorado este cálculo porque no es tan directo como los otros. Puesto que la función que conocemos no es $E(T, V, N)$ sino $E(T, V, z)$, aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{c_V}{k} = \frac{1}{Nk} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V,z} + \frac{1}{Nk} \left(\frac{\partial E}{\partial z} \right)_{T,V} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{V,N}. \quad (22)$$

Este es el único caso en donde es necesario derivar la fugacidad respecto de la temperatura. Todas las otras relaciones involucraban derivadas a z constante o derivadas respecto de z . A partir de la Ec. (10), obtenemos

$$\frac{1}{Nk} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V,z} = \frac{4E}{NkT} = \frac{12f_4(z)}{f_3(z)}. \quad (23)$$

Aquí el truco está en notar que $E \propto T^4$, y que, entonces, la derivada respecto de la temperatura se obtiene multiplicando a la energía por 4 y dividiendo el resultado por T . También hay un manejo juicioso de la Ec. (11) en el último paso. Por otro lado,

$$\left(\frac{\partial E}{\partial z} \right)_{T,z} = \frac{3g_s V k T}{\lambda^3} f'_4(z) = \frac{3g_s V k T}{\lambda^3} \frac{f_3(z)}{z} = \frac{3NkT}{z}. \quad (24)$$

Luego,

$$\frac{1}{Nk} \left(\frac{\partial E}{\partial z} \right)_{T,z} = \frac{3T}{z}. \quad (25)$$

El punto más problemático sigue siendo el cálculo de $(\partial z / \partial T)_{V,N}$ en la Ec. (22). Para eso, podemos diferenciar la Ec. (9), ayudados por la modesta observación de que, si $F = \prod_i f_i$, entonces

$$\frac{dF}{F} = \sum_i \frac{df_i}{f_i}. \quad (26)$$

Esto puede verse directamente, pero hay una manera más elegante, conocida como diferenciación logarítmica, muy usada en la propagación de errores. Tomando el logaritmo

de la ecuación $F = \prod_i f_i$, tenemos $\log F = \sum_i \log f_i$. Luego, el resultado (26) es evidente. Aplicando esta relación a la expresión (9), queda

$$\frac{dN}{N} = 3 \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} + \frac{f_2(z)}{f_3(z)} \frac{dz}{z}. \quad (27)$$

De aquí leemos que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{V,N} = - \frac{3z f_3(z)}{T f_2(z)}. \quad (28)$$

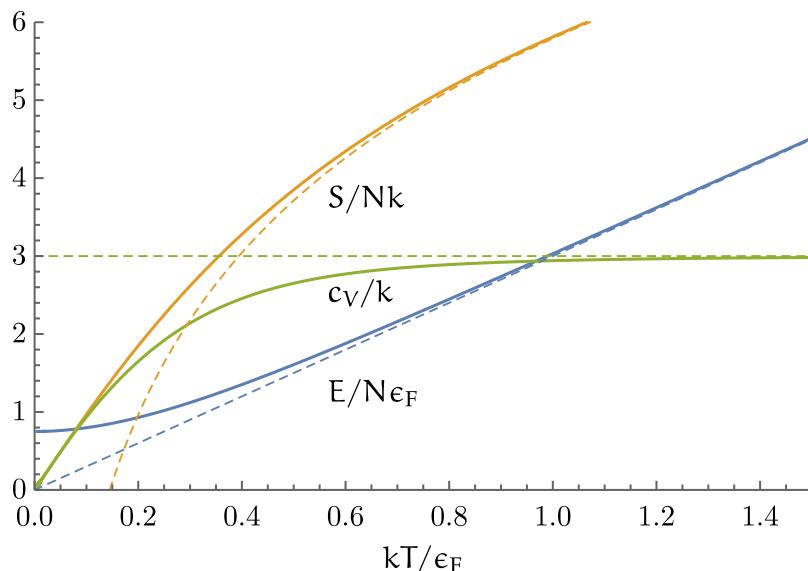
Ya tenemos todo lo necesario para calcular c_V . Sustituyendo nuestros resultados en la Ec. (22), vemos que

$$\frac{c_V}{k} = \frac{12f_4(z)}{f_3(z)} - \frac{9f_3(z)}{f_2(z)}. \quad (29)$$

La ecuación paramétrica para c_V en función de T es

$$\begin{cases} \frac{kT}{\epsilon_F} = \frac{1}{[6f_3(z)]^{1/3}}, \\ \frac{c_V}{k} = \frac{12f_4(z)}{f_3(z)} - \frac{9f_3(z)}{f_2(z)}. \end{cases} \quad (30)$$

La figura muestra los gráficos de las magnitudes termodinámicas adimensionalizadas en función de la temperatura adimensional. Las líneas de trazos corresponden al gas ultrarrelativista clásico. Basta que sea $kT \gtrsim \epsilon_F$ para que el comportamiento del gas de fermiones difiera muy poco del comportamiento del gas clásico. Es notable el apartamiento de la función entropía cuando se considera la estadística correcta. La entropía del gas de fermiones es cero cuando $T = 0$. En cambio la entropía del gas ultrarrelativista de partículas clásicas se vuelve negativa para temperaturas suficientemente bajas.



El problema ahora pide calcular las mismas cantidades de antes pero a $T = 0$, y también sus primeras correcciones para $T > 0$. El caso de la energía es especial, porque podemos hacer el cálculo en $T = 0$ de manera independiente. Es decir, no necesitamos analizar el límite de las funciones E y z cuando T tiende a cero, sino que podemos directamente calcular E a $T = 0$. Esto es posible porque a $T = 0$ la función de distribución de Fermi-Dirac es un escalón, entonces

$$E = \frac{4\pi g_s V}{h^3} \int_0^{p_F} dp \, p^2 \epsilon(p) = \frac{\pi g_s V c p_F^4}{h^3} = \frac{\pi g_s V p_F^3}{h^3} \epsilon_F. \quad (31)$$

Comparando con la Ec. (9), vemos que

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{4} \epsilon_F. \quad (32)$$

Conociendo la energía, sabemos que la presión está dada por $P = \frac{1}{3} E/V$. Usando el resultado anterior y las relaciones (17) y (18) podemos escribir P en varias formas:

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{V} = \frac{1}{4} \frac{N}{V} \epsilon_F = \frac{\pi g_s \epsilon_F^4}{3(hc)^3} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4\pi g_s} \right)^{1/3} hc \left(\frac{N}{V} \right)^{4/3}. \quad (33)$$

Cuando la temperatura tiende a cero, la fugacidad debe tender a infinito. En efecto, cuando la temperatura tiende a cero, el potencial químico tiende a la energía de Fermi, que es una cantidad finita, entonces $z \rightarrow e^{\beta \epsilon_F} \rightarrow \infty$. Para analizar lo que sucede en este límite, debemos emplear el desarrollo asintótico de las funciones de Fermi-Dirac cuando $z \rightarrow \infty$. Este desarrollo se conoce como lema de Sommerfeld. En general, vamos a conformarnos con los primeros dos términos del desarrollo, que corresponden a la siguiente aproximación:

$$f_\nu(e^\xi) \simeq \frac{\xi^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 + \frac{\pi^2}{6} \nu(\nu-1) \xi^{-2} \right]. \quad (34)$$

La idea es escribir todas las funciones que nos interesan no como funciones de z sino como funciones de la temperatura. Para eliminar z en términos de T , recurrimos a la Ec. (9),

$$N = \frac{8\pi g_s V}{(\beta hc)^3} f_3(z), \quad (35)$$

que, cuando $z \rightarrow \infty$, usando el lema de Sommerfeld, se approxima como

$$N \simeq \frac{4\pi g_s V}{3(hc)^3} \mu^3 \left[1 + \pi^2 \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]. \quad (36)$$

Conviene reescribir esta relación como una ecuación de punto fijo para μ , es decir, algo de la forma $\mu = f(\mu)$:

$$\mu = hc \left(\frac{3N}{4\pi g_s V} \right)^{1/3} \left[1 + \pi^2 \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]^{-1/3}. \quad (37)$$

Cuando $T = 0$, deberíamos obtener $\mu = \epsilon_F$. En verdad, comparando con la Ec. (18), vemos que eso es cierto. Entonces, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\mu \simeq \epsilon_F \left[1 + \pi^2 \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]^{-1/3}. \quad (38)$$

Si sólo nos interesa la primera corrección de temperatura finita, podemos obtener una fórmula cerrada para μ reemplazando μ por ϵ_F en el miembro de la derecha y escribiendo el resultado hasta orden $(kT/\epsilon_F)^2$:

$$\mu \simeq \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (39)$$

A partir de esta relación, usando el lema de Sommerfeld, podemos escribir el resto de las funciones que nos interesan hasta orden cuadrático en kT/ϵ_F . Por ejemplo, según la Ec. (10), la energía es

$$E = \frac{24\pi g_s V}{(\beta hc)^3} kT f_4(z) \simeq \frac{\pi g_s V}{(hc)^3} \mu^4 \left[1 + 2\pi^2 \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]. \quad (40)$$

En el término proporcional a $(kT)^2$, podemos reemplazar μ por ϵ_F y, por otro lado, para escribir μ^4 usamos el resultado (39),

$$E \simeq \frac{\pi g_s V}{(hc)^3} \epsilon_F^4 \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]^4 \left[1 + 2\pi^2 \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (41)$$

Conservando términos de hasta orden $(kT/\epsilon_F)^2$, resulta

$$E \simeq \frac{\pi g_s V}{(hc)^3} \epsilon_F^4 \left[1 + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (42)$$

Entonces, usando la Ec. (17),

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{4} \epsilon_F \left[1 + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (43)$$

Esto nos permite verificar el resultado de la Ec. (32).

A partir de la Ec. (43) podemos calcular el calor específico hasta orden $(kT/\epsilon_F)^2$, sin necesidad de hacer el desarrollo de la función de la Ec. (29), lo que sería muy tedioso:

$$\frac{c_V}{k} = \frac{1}{Nk} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{\pi^2 kT}{\epsilon_F}. \quad (44)$$

Para escribir el desarrollo de la entropía, podemos usar la expresión (13) que muestra que,

en general,

$$\frac{S}{Nk} = \frac{4\beta E}{3N} - \log z. \quad (45)$$

Reemplazando aquí la expresión (43),

$$\frac{S}{kN} \simeq \beta \epsilon_F \left[1 + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right] - \beta \mu. \quad (46)$$

Usando el resultado (39), queda

$$\frac{S}{kN} \simeq \beta \epsilon_F \left[1 + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right] - \beta \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^3}{3} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right] = \frac{\pi^2 kT}{\epsilon_F}. \quad (47)$$

Tanto el calor específico como la entropía son cero cuando la temperatura es cero. Esto completa el ítem b) del problema.

En el otro extremo, debemos estudiar el régimen en el cual $\lambda^3 N/V \ll 1$, es decir, el régimen en donde los efectos cuánticos son pequeños. Es fácil demostrar que esta condición equivale a asumir que $kT \gtrsim \epsilon_F$. Para ver esto, a partir de las Ecs. (7) y (17), tenemos

$$\frac{\lambda^3 N}{V} = \frac{(\beta \hbar c)^3 N}{8\pi V} = \frac{g_s}{6} (\beta \epsilon_F)^3. \quad (48)$$

Esto implica que, si bien es una condición suficiente, no necesitamos, estrictamente hablando, que $\beta \epsilon_F$ sea mucho menor que uno para que $\lambda^3 N/V$ sea mucho menor que uno. Basta con que $\beta \epsilon_F$ sea *un poco* menor que uno. Esto explica por qué en la figura de la pág. 5 el comportamiento del gas de fermiones se vuelve tan próximo al comportamiento del gas clásico cuando kT es apenas mayor que ϵ_F .

Hemos visto que la ecuación que determina la fugacidad puede escribirse como

$$N = \frac{g_s V}{\lambda^3} f_3(z), \quad (49)$$

o, de una forma que será más útil,

$$\frac{\lambda^3 V}{g_s N} = f_3(z). \quad (50)$$

Entonces, si estamos diciendo que el $N\lambda^3/V \ll 1$, debe ser $f_3(z) \ll 1$. Las funciones de Fermi-Dirac son funciones crecientes de z . Su desarrollo de Taylor alrededor del origen es

$$f_v(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{z^\ell}{\ell^v} = z - \frac{z^2}{2^v} + \frac{z^3}{3^v} - \dots \quad (51)$$

Esto pone de manifiesto que, si $f_v(z)$ es mucho menor que 1, también debe ser $z \ll 1$. El límite clásico, por lo tanto, corresponde a $z \ll 1$. No es la primera vez que encontramos este resultado. Ahora bien, si $z \ll 1$, podemos aproximar $f_3(z)$ por sus primeros términos

del desarrollo en potencias de z y escribir

$$\frac{\lambda^3 N}{g_s V} \simeq z - \frac{z^2}{8}, \quad (52)$$

o, escrita como ecuación de punto fijo,

$$z \simeq \frac{N\lambda^3}{V} + \frac{z^2}{8}. \quad (53)$$

A primer orden en el parámetro pequeño $N\lambda^3/V$, resulta

$$z \simeq \frac{N\lambda^3}{g_s V}. \quad (54)$$

La primera corrección puede obtenerse reemplazando este resultado en el segundo miembro de la Ec. (53),

$$z \simeq \frac{\lambda^3 N}{g_s V} + \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda^3 N}{g_s V} \right)^2. \quad (55)$$

Ahora lo único que tenemos que hacer es reemplazar este desarrollo en las expresiones de la energía, de la presión, etc. que dedujimos en las primeras páginas. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \frac{E}{N} &= \frac{3g_s V}{\lambda^3 N} kT f_4(z) \simeq \frac{3g_s V}{\lambda^3 N} kT \left(z - \frac{1}{16} z^2 \right) \simeq \frac{3g_s V}{\lambda^3 N} kT \left[\frac{\lambda^3 N}{g_s V} + \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda^3 N}{g_s V} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda^3 N}{g_s V} \right)^2 \right] \\ &= 3kT \left(1 + \frac{1}{16} \frac{\lambda^3 N}{g_s V} \right) = 3kT \left[1 + \frac{1}{96} \left(\frac{\epsilon_F}{kT} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

El calor específico que se obtiene de aquí es

$$\frac{c_V}{k} \simeq 3 \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\lambda^3 N}{g_s V} \right) = 3 \left[1 - \frac{1}{48} \left(\frac{\epsilon_F}{kT} \right)^3 \right]. \quad (57)$$

Por otro lado, la relación general entre la densidad de energía y la presión da

$$\frac{PV}{NkT} \simeq 1 + \frac{1}{16} \frac{\lambda^3 N}{g_s V} = 1 + \frac{1}{96} \left(\frac{\epsilon_F}{kT} \right)^3. \quad (58)$$

La presión es mayor que la del gas ideal ultrarrelativista clásico en las mismas condiciones. Esto puede verse como una consecuencia del principio de exclusión de Pauli, que obliga a las partículas a ocupar estados de mayor impulso. Por último, para la entropía encontramos

$$\begin{aligned} \frac{S}{Nk} &= \frac{4\beta E}{3N} - \log z \simeq 4 \left(1 + \frac{1}{16} \frac{\lambda^3 N}{g_s V} \right) - \log \left[\frac{\lambda^3 N}{g_s V} + \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda^3 N}{g_s V} \right)^2 \right] \\ &\simeq 4 + \log \left(\frac{g_s V}{\lambda^3 N} \right) + \frac{1}{8} \frac{\lambda^3 N}{g_s V} = 4 + \log \left[6 \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^3 \right] + \frac{1}{48} \left(\frac{\epsilon_F}{kT} \right)^3. \end{aligned} \quad (59)$$

Los dos primeros términos corresponden a la entropía del gas ultrarrelativista clásico.