Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Física

Introducción al Modelado Continuo

Gabriel Mindlin

Segundo Cuatrimestre 2025

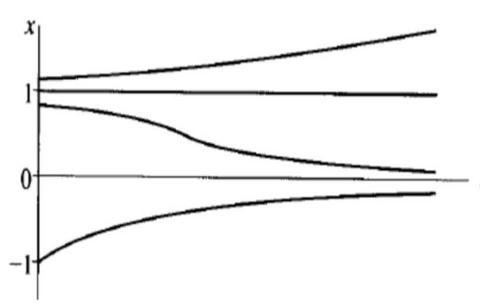
Practica 1. Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Flujos unidimensionales

1. Analice las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden gráficamente. Primero grafique el campo vector. Luego encuentre todos los puntos fijos, clasifique su estabilidad, y realice gráficos de la trayectoria (x(t)) para distintas condiciones iniciales. Grafique alguna de estas trayectorias en el espacio de fases (i.e. el retrato de fases). Luego intente algunos minutos obtener la solución analítica para x(t); si no resulta, no se amargue porque en varios casos es imposible resolver la ecuación en forma cerrada. Compruebe que las soluciones posibles para estos sistemas son de forma similar: o se aproximan a un valor o se alejan del mismo.

(a) $\dot{x} = ax$ (sistema lineal en 1D)
(b) $\dot{x} = 4x^2 - 16$
(c) $\dot{x} = x - x^3$
(d) $\dot{x} = 1 + 0.5\cos(x)$
(e) $\dot{x} = e^x - \cos(x)$
(f) $\dot{x} = 1 - 2\cos(x)$

2. Escribir un sistema dinámico cuyo flujo sea consistente con este grafico



3. El crecimiento de los tumores cancerígenos puede ser modelado mediante la ley de Gompertz: $\dot{N} = -aN\ln(bN)$, donde $N(t)$ es proporcional al número de células del tumor y $a, b > 0$ son parámetros.

(a) Interprete a y b biológicamente.

(b) Dibuje el campo vector y grafique $N(t)$ para distintas condiciones iniciales.

4. Analizar la estabilidad lineal de los puntos fijos para:

(a) $\dot{x} = x(1-x)$
(b) $\dot{x} = x(1-x)(2-x)$
(c) $\dot{x} = tan(x)$
(d) $\dot{x} = 1 - e^{x^2}$
(e) $\dot{x} = ax - x^3, con\ a < 0; a = 0$ ó $a > 0$
(f) $\dot{x} = x^2(6-x)$

5. Las luciérnagas proporcionan uno de los ejemplos más espectaculares de sincronización en la naturaleza. En algunas partes del sudeste asiático, miles de luciérnagas machos se reúnen en los árboles por la noche y se encienden y apagan al unísono. Considere para este fenómeno el modelo

$$\dot{\Theta} = \Omega, \dot{\theta} = \omega + A f(\Theta - \theta)$$

donde Θ es la fase del estimulo externo, θ la fase del destello de una luciérnaga individual, y en nuestro modelo, $f(\phi)$ es

$$f(\phi) = \begin{cases} \phi & -\pi/2 \le \phi \le \pi/2 \\ \pi - \phi, & \pi/2 \le \phi \le 3\pi/2 \end{cases}$$

en el intervalo $-\pi/2 \le \phi \le 3\pi/2$, y extienda periódicamente f fuera de este intervalo.

(a) Grafique $f(\phi)$
(b) Encuentre el rango de parámetros de dinámica acotada, es decir, el rango de parámetros para el cual la diferencia de fase entre el estímulo y el destello no crece indefinidamente.
(c) En el caso en que la dinámica no esté acotada, calcule el tiempo que tarda la diferencia de fases en incrementarse en 2π:

$$T_{drift} = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\dot{\phi}}$$

Bifurcaciones en 1D

6. Esquematizar el diagrama de bifurcaciones de:

(a) $\dot{x} = 1 + rx + x^2$
(b) $\dot{x} = r + x - ln\,(1+x)$
(c) $\dot{x} = r + x/2 - x/(1+x)$
(d) $\dot{x} = rx + x^2$

(e) $\dot{x} = rx + 4x^3$

7. Determine el parámetro crítico donde ocurre una bifurcación, diga qué tipo es y esquematice el diagrama de bifurcaciones para

$$\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x}$$

8. Pitchfork imperfecta.
Considere el sistema $\dot{x} = rx + ax^2 - x^3$, donde $-\infty < a < \infty$. Para a=0 tenemos la forma normal de la pitchfork supercrítica. Ahora queremos ver el efecto de perturbar el sistema con un término cuadrático.
   (a) ¿Qué simetría se rompe para $a \neq 0$?
   (b) Para cada a realice un diagrama de bifurcaciones x* vs r. A medida que a varia ocurren cambios cualitativos. Encuentre todos los cambios cualitativos que se pueden obtener cambiando a.

9. Switch bioquímico.

Las bandas de las cebras y los patrones de las mariposas son dos de los ejemplos más espectaculares de formación de patrones biológicos. Explicar el surgimiento de dichos patrones es un problema abierto en la biología.
Como uno de los ingredientes necesarios para el surgimiento de dichos patrones, Lewis (1979) consideró un ejemplo sencillo de switch bioquímico, donde un gen G se activa por una señal bioquímica S. Por ejemplo, el gen está normalmente desactivado, pero se puede "prender" para producir un pigmento, u otro producto de los genes cuando la concentración de S excede cierto umbral. Sea $g(t)$ la concentración del producto del gen, y asuma la concentración s_0 de S como constante. El modelo es

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{{k_4}^2 + g^2}$$

donde $k_j > 0$ son constantes de reacción. La producción de g es estimulada por s_0 al ritmo k_1, y por una retroalimentación auto catalítica o positiva (los términos no lineales). Hay también un término de degradación controlado por k_2.

Antes de arrancar el problema, es interesante entender el modelo. En este caso tenemos una concentración de g (que determinará la pigmentación). Este gen es producido por una "señal bioquímica S". Esto está modelado en el primer término, donde estamos diciendo que, en presencia de esta señal, se produce (el término va sumando) el gen g. Noten que el factor que multiplica tiene unidades de s^{-1}, y puede interpretarse como un ritmo de conversión. Otra forma de interpretarlo es como un factor que da cuenta de qué tan probable es que se produzca g, o qué tan eficiente es la conversión.

El segundo término representa una degradación (por eso resta). Eventualmente g puede degradarse y transformarse en otras cosas. Nuevamente, cuanto más g hay, más se degrada, y el ritmo al que ocurre se modela con un factor k_2 que da la probabilidad de que ocurra.
El último término parece un poco más difícil de interpretar. Este término es siempre positivo y nos dice que, si hay alguna cantidad de gen g, esto produce aún más g. Este tipo de reacción se conoce como autocatalítica, donde el mismo producto estimula su producción. La forma particular utilizada modela que cuando tenemos mucho g, eventualmente saturamos este efecto, con una autocatálisis máxima, que depende del factor k_3.

a) Muestre que el problema se puede llevar a la ecuación adimensional
$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2}$$
donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son adimensionales.

b) Muestre que si $s = 0$, hay dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe ser determinado.

c) Asuma que inicialmente no hay ningún producto en la reacción $g(0) = 0$, y suponga que s aumenta lentamente desde 0 (la señal activadora se "prende"): ¿qué pasa con $g(t)$? ¿Qué pasa si s vuelve a caer a cero? ¿El producto se apaga nuevamente?

Flujos bidimensionales

10. Sea el siguiente sistema:
$$\dot{x} = 4x - y;\ \dot{y} = 2x + y$$

(a) Escribir en forma matricial.

(b) Escribir la solución general del sistema.

(c) Resuelva el sistema usando la condición inicial $\binom{x_0}{y_0} = \binom{3}{4}$.

11. Sea el sistema:
$$\dot{x} = x - y; \dot{y} = x + y.$$

(a) Escribirlo matricialmente. Buscar autovalores y autovectores

(b) Escribir la solución general.

12. Esquematizar el flujo para el siguiente sistema no lineal:

(a) $\dot{x} = x - y;\ \dot{y} = 1 - e^x$

(b) $\dot{x} = x - x^3;\ \dot{y} = -y$

(c) $\dot{x} = x(x - y);\ \dot{y} = y(2x - y)$

(d) $\dot{x} = x(2 - x - y);\ \dot{y} = x - y$

(e) $\dot{x} = sen(y);\ \dot{y} = x - x^3$

Bifurcaciones en 2D

13. Gusanos vs. Bosque. Ludwig propuso un modelo para los efectos de una población de gusanos en un bosque de abetos. Se asume que la condición del bosque está caracterizada por S(t) (tamaño promedio de los árboles) y E(t), reserva de energía (una medida de la salud del bosque). En presencia de una población constante de gusanos B, la dinámica del bosque está dada por:

$$\dot{S} = r_S S\left(1 - \frac{S}{K_S}\frac{K_E}{E}\right)$$
$$\dot{E} = r_E E\left(1 - \frac{E}{K_E}\right) - \frac{PB}{S}$$

(a) Interprete las ecuaciones.
(b) Adimensionalice.
(c) Dibuje las nulclinas, y analice las bifurcaciones.
(d) Dibuje el retrato de fases par B grande y para B chico.

14. Bifurcación de Hopf.

Para cada uno de los siguientes sistemas muestre que el origen tiene una bifurcación de Hopf en $\mu = 0$ y, mediante simulaciones numéricas, verifique si la es subcrítica o supercrítica.

(a) $\dot{x} = \mu x + y \quad ; \quad \dot{y} = -x + \mu y - x^2 y$
(b) $\dot{x} = \mu x + y - x^3 \quad ; \quad \dot{y} = -x + \mu y + 2y^3$

15. Este sistema se conoce como el del "predador-presa".

$$\dot{x} = x\left(b - x - \frac{y}{1+x}\right)$$
$$\dot{y} = y\left(\frac{x}{1+x} - ay\right)$$

(a) Dibuje las nulclinas.
(b) Analice las bifurcaciones, y muestre que hay una bifurcación de Hopf.

16. Analizar el diagrama de bifurcaciones del sistema:

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy$$

Describir que ocurre sobre la curva $\mu_1 = -{\mu_2}^2$.

17. Este sistema modela la dinámica de una epidemia, dividiendo a los individuos en tres grupos: x, el número de individuos sanos; y el número de individuos enfermos; z el número de individuos muertos (“recuperados” en modelos más optimistas).

$$\dot{x} = -kxy$$
$$\dot{y} = kxy - ly$$
$$\dot{z} = ly$$

(a) Encuentre y clasifique todos los puntos fijos.
(b) Haga un dibujo de las nulclinas y del campo vector.
(c) Encuentre una cantidad que se conserve en el sistema.
(d) Haga un retrato de fases. ¿Qué pasa en $t \to \infty$?
(e) Sea (x_0, y_0) una condición inicial. Una epidemia ocurre cuando $y(t)$ aumenta inicialmente. ¿Bajo que condiciones esto ocurre?

Formas normales

18. Determine la forma normal de los siguientes sistemas linearizados.

(a) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$, a orden 2.
(b) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, a orden r.
(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, a orden r.

19. Oscilador de van der Pol. Llevar a la forma normal el siguiente sistema:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0$$

Caos

20. Sistema de Lorenz. Sea el conjunto de ecuaciones:

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X)$$
$$\frac{dY}{dt} = rX - Y - XY$$
$$\frac{dz}{dt} = XY - bZ$$

(a) Mostrar que el sistema es invariante ante la simetría $X \to -X$, $Y \to -Y$, $Z \to Z$.

(b) Calcular los puntos fijos del sistema y su estabilidad.

(c) Simular para $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28.$