Laboratorio de
sistemas dinamicos

El equipo

Gabriel Mindlin (www.lsd.df.uba.ar)

(Gabriel, Gabo, Profe… ud, vos).
gabo@df.uba.ar

Hernan Bocaccio
(Hernan)
hbocaccio@gmail.com

https://materias.df.uba.ar/iamcedlfma2024c2

Modelado del continuo

G. M

Laboratorio de sistemas dinamicos

El equipo

Gabriel Mindlin (www.lsd.df.uba.ar)

(Gabriel, Gabo, Profe… ud, vos).
gabo@df.uba.ar

Hernan Bocaccio
(Hernan)
hbocaccio@gmail.com

https://materias.df.uba.ar/iamcedlfma2024c2

guias

Modelado del continuo

G. M

Laboratorio de sistemas dinamicos

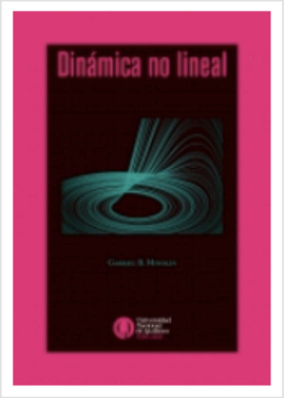
Clase 1. DNL. El origen de la dinámica, trayectorias. Sistemas dinámicos y determinismo.
Clase 2. DNL. Bifurcaciones en sistemas 1d. Transcritica, nodo silla, tridente.
Clase 3. DNL. Sistemas 2d. Ciclos limite, bifurcación de Hopf. Oscilador de relajación.
Clase 4. DNL. Bifurcaciones globales.
Clase 5. DNL. Variedad central.
Clase 6. DNL. Formas normales.
Clase 7. DNL. Sistemas 3d. Oscilador no lineal forzado, Lorenz.
Clase 8. DNL. Mapa de Smale.
Clase 9. DNL. Análisis de series de datos: reconstrucción de espacio de fases
Clase 10. DNL. Obtención de ecuaciones a partir de datos
Clase 11. DNL. Reducción de la dimensionalidad a partir de datos.

Clase 12. Fourier. Definición de serie de Fourier
Clase 13. Fourier. Aplicaciones de series de Fourier
Clase 14. Fourier. Transformaciones integrales. Transformada de Fourier
Clase 15. Fourier. Propiedades y aplicaciones al estudio de PDEs
Clase 16. Fourier. Convolución y transformadas de productos de funciones.
Clase 17. Fourier. Aplicaciones al análisis de señales, FFT

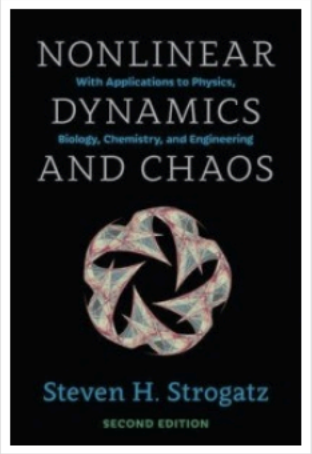
Clase 18. PDE. Introducción al estudio de las PDE y ecuaciones de primer orden
Clase 19. PDE Ecuaciones de segundo orden y condiciones de contorno
Clase 20. PDE. Separación de variables, variables cartesianas
Clase 21. PDE. Separación de variables, variables cilíndricas y esféricas
Clase 22. PDE. Ecuación de Laplace

Bibliografía **dinamica**

- Mindlin G. B. Dinámica no lineal. Editorial Universidad Nacional de Quilmes (2018)

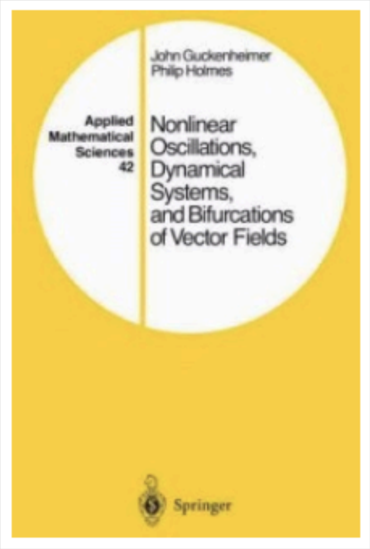


- Strogatz, S. Nonlinear Dynamics and Chaos, Westview (fácil, muy fácil… e ideal para

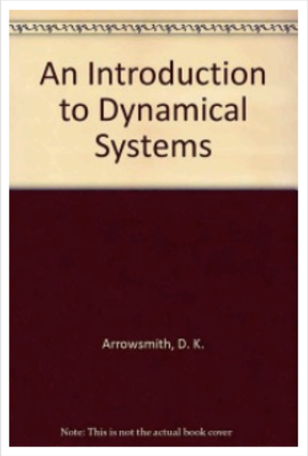


las primeras dos partes del curso)

- Guckenheimer J. and Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Sistems and Bifurcations of vector fields. (y… es la biblia del tema. Para el que se anime…)



- Arrowsmith D and Place C. An introduction to dynamical systems, Cambridge (duro, pero lo que se aprende aquí, sirve siempre. Ideal para la parte 3 del curso)
Aperitivos para curiosos de fin de semana



Dinamica no lineal

Dinamica no lineal

Mecanismos responsables de regir la **evolucion temporal** de un sistema

Dinamica no lineal

Mecanismos **no lineales**

Dinamica no lineal

Mecanismos **no lineales (tecnicismos en un rato)**

Nomenclatura historica
Es un poco como hablar de la "biologia no bacteriana"

Dinamica no lineal

Mecanismos **no lineales**

Nomenclatura historica
Es un poco como hablar de la "biologia no bacteriana"

Razones historicas

¿Que vamos a aprender?

1. Elementos de la descripcion

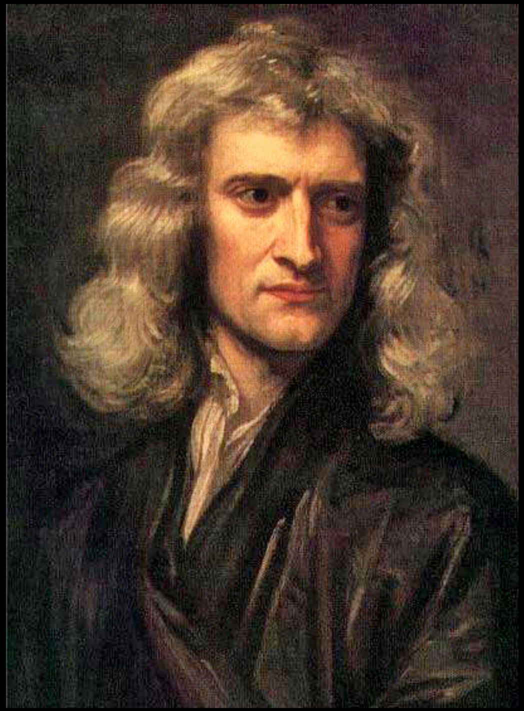
2. Como identificar si/cuales de esos elementos estan presentes en un problema descripto por un sistema de ecuaciones no lineales

3. Como escribir ecuaciones minimales cuyas soluciones presentan esos elementos.

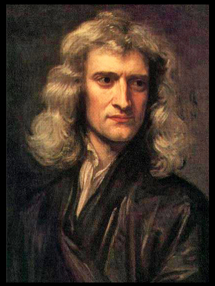
Laboratorio de Sistemas Dinámicos

Counterpoint with history

Kepler (1571-1630)



Newton (1643-1727)



Laboratorio de Sistemas Dinámicos

Laplace (1749-1827): this is the “world’s system”
All we have to do is to compute “f”, and the initial conditions

El paradigma de Newton

Definimos la velocidad: $$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{m} \end{cases}$$

En ausencia de interacciones con el universo(Galileo)

Multiplicado por un functional que describe la interaccion

Algunas fundamentales

$$\boldsymbol{F} = \frac{-G\, m\, M}{{r_{12}}^{2}} \boldsymbol{e_{12}}$$

Y otras fenomenológicas, como

$$F = -kx$$

El paradigma de Newton

Definimos la velocidad: $\dfrac{dx}{dt} = v$

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{En ausencia de interacciones con el universo(Galileo)} \\ \dfrac{1}{m} & \text{Multiplicado por un functional que describe la interaccion} \end{cases}$$

Algunas fundamentales

$$\boldsymbol{F} = \frac{-G\,m\,M}{{r_{12}}^2}\boldsymbol{e_{12}}$$

Y otras fenomenológicas, como

$$F = -kx$$

ODE $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = f(x, y) \end{cases}$

Un sistema dinámico es:

(en el marco de estas clases)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(x) \qquad \boldsymbol{x} \in R^n$$

$$\boldsymbol{x}(t = 0) = \boldsymbol{x_0}$$

Bajo condiciones de suavidad del campo vector ($\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), d\boldsymbol{f}/d\boldsymbol{x}$ continuos en un entorno de $\boldsymbol{x}_0$), la solución es única. Esto es: cada punto del espacio de fases ($\boldsymbol{x}$) tiene un único futuro. Esto es: no hay auto intersecciones en las trayectorias.

Por que es tan glorioso este paradigma?

1. Mediante una batería de experimentos, se dilucida la regla que describe la fuerza experimentada por una partícula localizada en una dada posición y con una dada velocidad.
2. Se mide el par $\left(\vec{x}(t=0), \frac{d\vec{x}}{dt}(0)\right)$
3. Se computa el avance del tiempo en un cantidad pequeña:

$$\vec{x}(t=\Delta t) \approx \vec{x}(t=0) + \frac{d\vec{x}}{dt}(t=0)\Delta t,$$

lo cual puede hacerse porque se conoce la velocidad inicial, que fue medida. Pero más interesante aún, como se conoce la aceleración *en todo punto del espacio, para cualquier velocidad del cuerpo es posible computar la velocidad en ese nuevo instante*:

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t=\Delta t) \approx \frac{d\vec{x}}{dt}(t=0) + \frac{1}{m}\vec{F}\left(\vec{x}(t=0), \frac{d\vec{x}}{dt}(t=0)\right)\Delta t.$$

Si bien esto no es necesario para saber la posición del cuerpo en el instante Δt, este cómputo permite *repetir el procedimiento* y calcular la posición de la particular en $t = 2\Delta t$:

2´. Se incrementa el tiempo en Δt a partir de $t = \Delta t$:

$$\vec{x}(t=2\Delta t) \approx \vec{x}(t=\Delta t) + \frac{d\vec{x}}{dt}(t=\Delta t)\Delta t,$$

y nuevamente, como al conocerse la aceleración en todo punto del espacio, para cualquier posición y velocidad del cuerpo, es posible calcular la velocidad en el nuevo instante:

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t=2\Delta t) \approx \frac{d\vec{x}}{dt}(t=\Delta \mathrm{t}) + \frac{1}{m}\vec{F}\left(\vec{x}(t=\Delta t), \frac{d\vec{x}}{dt}(t=\Delta t)\right)\Delta t.$$

1. Mediante una batería de experimentos, se dilucida la regla que describe la fuerza experimentada por una partícula localizada en una dada posición y con una dada velocidad.
2. Se mide el par $\left(\vec{x}(t=0), \frac{d\vec{x}}{dt}(0)\right)$
3. Se computa el avance del tiempo en un cantidad pequeña:

$$\vec{x}(t = \Delta t) \approx \vec{x}(t = 0) + \frac{d\vec{x}}{dt}(t = 0)\Delta t,$$

lo cual puede hacerse porque se conoce la velocidad inicial, que fue medida. Pero más interesante aún, como se conoce la aceleración *en todo punto del espacio, para cualquier velocidad del cuerpo es posible computar la velocidad en ese nuevo instante*:

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t = \Delta t) \approx \frac{d\vec{x}}{dt}(t = 0) + \frac{1}{m}\vec{F}\left(\vec{x}(t = 0), \frac{d\vec{x}}{dt}(t = 0)\right)\Delta t.$$

trayectoria

Condicion inicial

Si bien esto no es necesario para saber la posición del cuerpo en el instante Δt, este cómputo permite *repetir el procedimiento* y calcular la posición de la particular en $t = 2\Delta t$:

2´. Se incrementa el tiempo en Δt a partir de $t = \Delta t$:

$$\vec{x}(t = 2\Delta t) \approx \vec{x}(t = \Delta t) + \frac{d\vec{x}}{dt}(t = \Delta t)\Delta t,$$

y nuevamente, como al conocerse la aceleración en todo punto del espacio, para cualquier posición y velocidad del cuerpo, es posible calcular la velocidad en el nuevo instante:

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t = 2\Delta t) \approx \frac{d\vec{x}}{dt}(t = \Delta t) + \frac{1}{m}\vec{F}\left(\vec{x}(t = \Delta t), \frac{d\vec{x}}{dt}(t = \Delta t)\right)\Delta t.$$

Modelado del continuo

G. M

Laboratorio de sistemas dinamicos

Un sistema dinámico es:

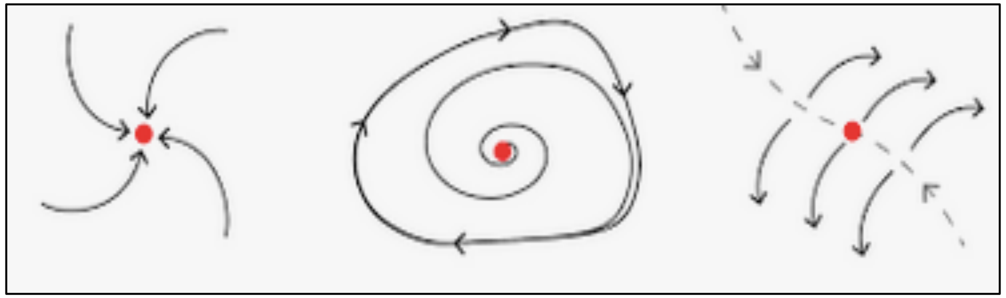
(en el marco de estas clases)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(x) \qquad \boldsymbol{x} \in R^n$$

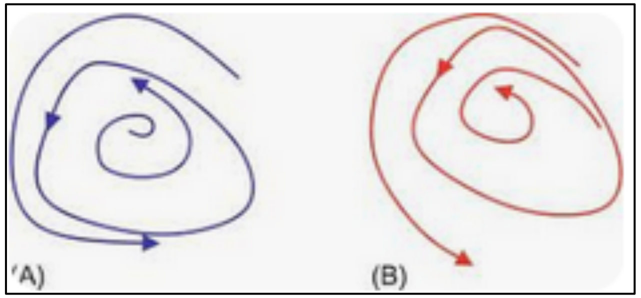
$$\boldsymbol{x}(t = 0) = \boldsymbol{x_0}$$

Resolver analíticamente estas es usualmente imposible, así que

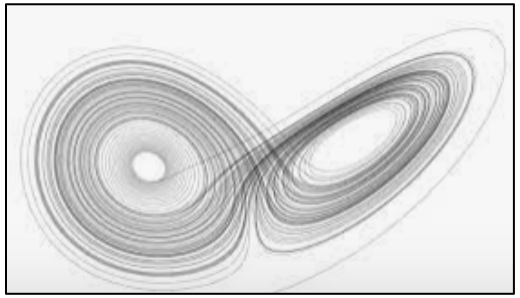
Puntos fijos



Ciclos limite



Atractores extraños



En la década de 1950, Hodgkin y Huxley escribieron el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales, para dar cuenta de la tasa de variación del voltaje a través de la membrana celular de una neurona:

$$\begin{cases} C\dfrac{dV}{dt} = I - g_K n^4(V - E_K) - g_{Na} m^3 h(V - E_{Na}) - g_i(V - E_i) \\ \dfrac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V)n \\ \dfrac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m \\ \dfrac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)h \end{cases},$$

donde V es el voltaje, I la corriente a través de un parche de la membrana y (n, m, h) variables que describen el estado dinámico de los canales vocabulario

Este curso se concentrará fundamentalmente en ecuaciones diferenciales ordinarias, esto es, aquellas en las que hay una sola variable independiente: el tiempo. Esto es, nos concentraremos en ecuaciones como:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

A diferencia de ecuaciones a derivadas parciales, en las cuales
Aparecen varias variables independientes.

Salvo que…

A tal conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden lo llamaremos sistema dinámico de dimensión *N*. Si nos encontramos con ecuaciones diferenciales involucrando una derivada de orden mayor, nuestro primer paso será reescribir la ecuación diferencial como un sistema de ecuaciones diferenciales, cada una de ellas de orden uno. Por ejemplo, la celebrada ecuación que rige la dinámica de un oscilador con disipación:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0\,,$$

se reescribirá como un conjunto de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello definimos $v \equiv {}^{dx}/_{dt}$, lo que da lugar a:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m}(-\beta v - kx) \end{cases},$$

que es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

5. ECUACIONES LINEALES Y NO LINEALES

En los sistemas de ecuaciones de primer orden que acabamos de presentar, el lado derecho es un arreglo de funciones $(f_1, f_2, \ldots f_N)$ al que denominamos campo vector.

Ejemplo. En el caso de nuestro oscilador amortiguado, el campo vector se escribe:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{m}(-\beta v - kx) \end{pmatrix}.$$

Si el campo vector es una función lineal de las variables, decimos que el sistema es lineal. En caso contrario, decimos que el sistema dinámico es no lineal. El ejemplo que acabamos de presentar corresponde pues a un campo vector lineal.

Ejemplo. En el caso del péndulo físico, la ecuación de Newton que rige el comportamiento del sistema es:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin(\theta),$$

lo cual puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden del siguiente modo. Definiendo $\Omega \equiv {}^{d\theta}/_{dt}$,

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \Omega \\ \dfrac{d\Omega}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin(\theta) \end{cases},$$

de modo que el campo vector resulta ser

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \Omega \\ -\frac{g}{l}\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Como las componentes de $\vec{F}$ son funciones no lineales de las variables del problema (θ, Ω), decimos que el sistema dinámico es no lineal.

Definición. El espacio constituido por las variables en término de las cuales está dada la prescripción determinista que rige la dinámica del problema, se conoce como *espacio de fases*. En nuestro ejemplo anterior, el espacio de fases es el constituido por (θ, Ω). En ese espacio, el dibujo de $\theta(t), \Omega(t)$ correspondiente a seguir la evolución de una condición inicial dada se conoce como *trayectoria*.

7. QUÉ PUEDE PASAR EN UN SISTEMA LINEAL Y EN UNO NO LINEAL

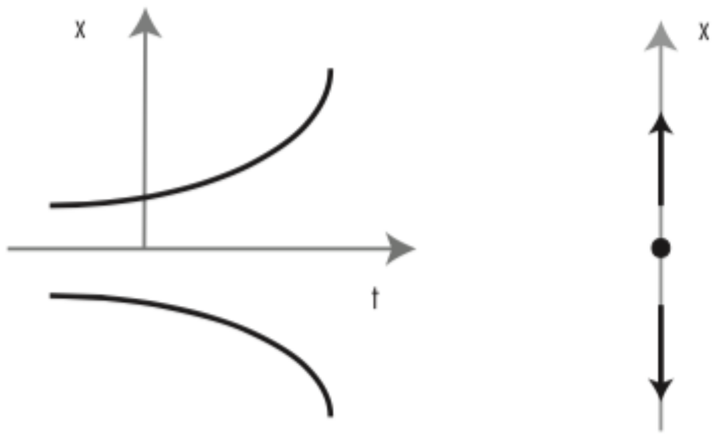
Comencemos por el sistema lineal más sencillo. La dimensionalidad más baja concebible para describir una dinámica (¡uno!), y un campo vector lineal:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

donde a es un parámetro real, x una variable real, y $\frac{dx}{dt}$ es la rapidez de cambio de la variable dinámica. En esas condiciones, sucede que 1) si K es un número real,

$$x(t) = Ke^{at}$$

Es solucion, y es unica;



$$\frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{N}\right).$$

Sucumbamos a la tentación de buscar una solución analítica para este problema. De hecho, encontraremos que, en efecto, esta ecuación puede resolverse analíticamente. Escribiendo:

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int a dt$$

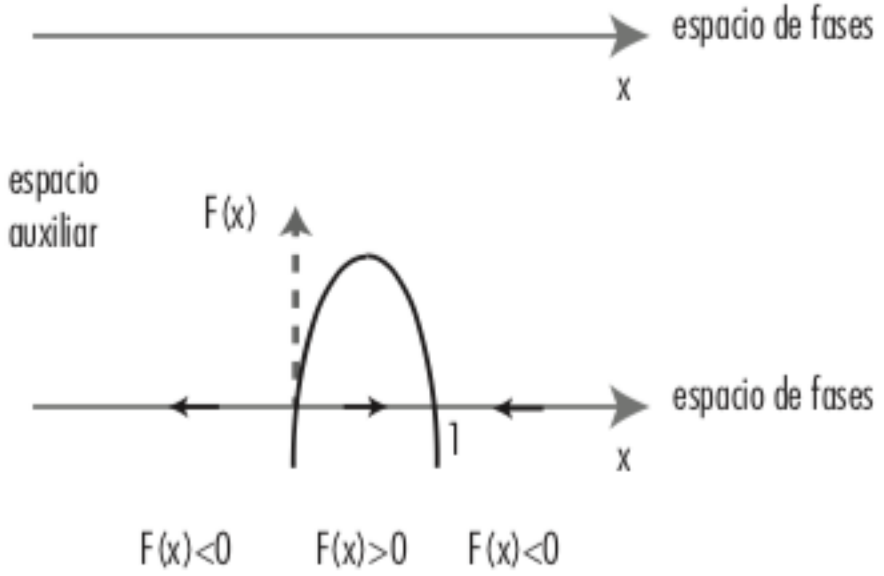
$$\int dx\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = at + c = \ln\left(\frac{x}{|x-1|}\right)$$

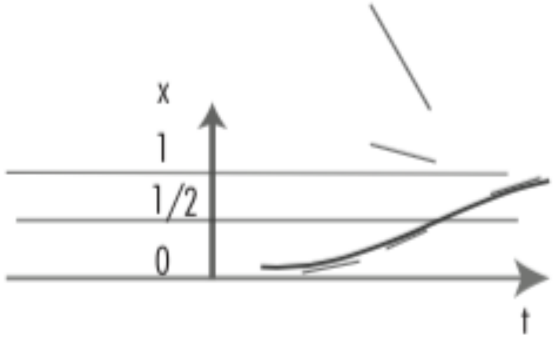
y si $x<1$, entonces

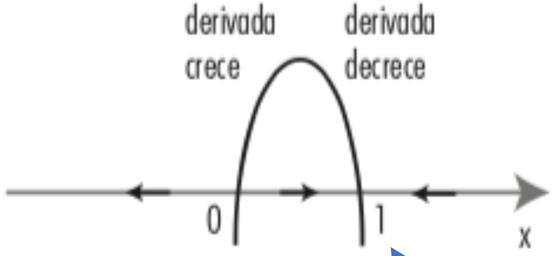
$$\frac{x}{1-x} = Ke^{at}$$

lo cual lleva a que

$$x(t) = \frac{Ke^{at}}{1+Ke^{at}},$$







Primeras aproximaciones a las descripciones cualitativas de las soluciones.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = a\varepsilon,$$

$x(t) = 1 + \varepsilon(t)$. De este modo, la ecuación para el comportamiento de la variable que describe el apartamiento de la posición de equilibrio es

$$\frac{d(1+\varepsilon)}{dt} = a(1+\varepsilon)\big(1-(1+\varepsilon)\big) = a(1+\varepsilon)(-\varepsilon) = -\varepsilon a - a\varepsilon^2 \approx -\varepsilon a,$$

8. UN PRIMER ACERCAMIENTO A LA LINEALIZACIÓN

Sea x^* un punto estacionario, y sea η la variable que mide pequeños apartamientos de ese punto. Entonces, podemos escribir para la dinámica de la perturbación que

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d(x(t) - x^*)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x^* + \eta) = f(x^*) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*} \eta + O(2),$$

con $f(x^*) = 0$ y, por lo tanto,

$$\frac{d\eta}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*} \eta + O(2).$$

Si $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*} \neq 0$, despreciamos el término cuadrático. Así, el factor $1 \big/ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*}$ es un tiempo característico que describe la tasa de crecimiento (decrecimiento) del (al) estado estacionario. Al menos en este problema, emparentado con el original, cuyas soluciones aspiramos poder mostrar, son buenas aproximaciones a las verdaderas de nuestro problema.

Laboratorio de
sistemas dinamicos

Paradigma Newtoniano

Es importante destacar que cuando decimos que el comportamiento de un sistema viene dado por un sistema dinámico, esto es

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

con condiciones iniciales

$$x(0) = x_0,$$

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x(t-T)}{N}\right).$$

Fuera del paradigma Newtoniano