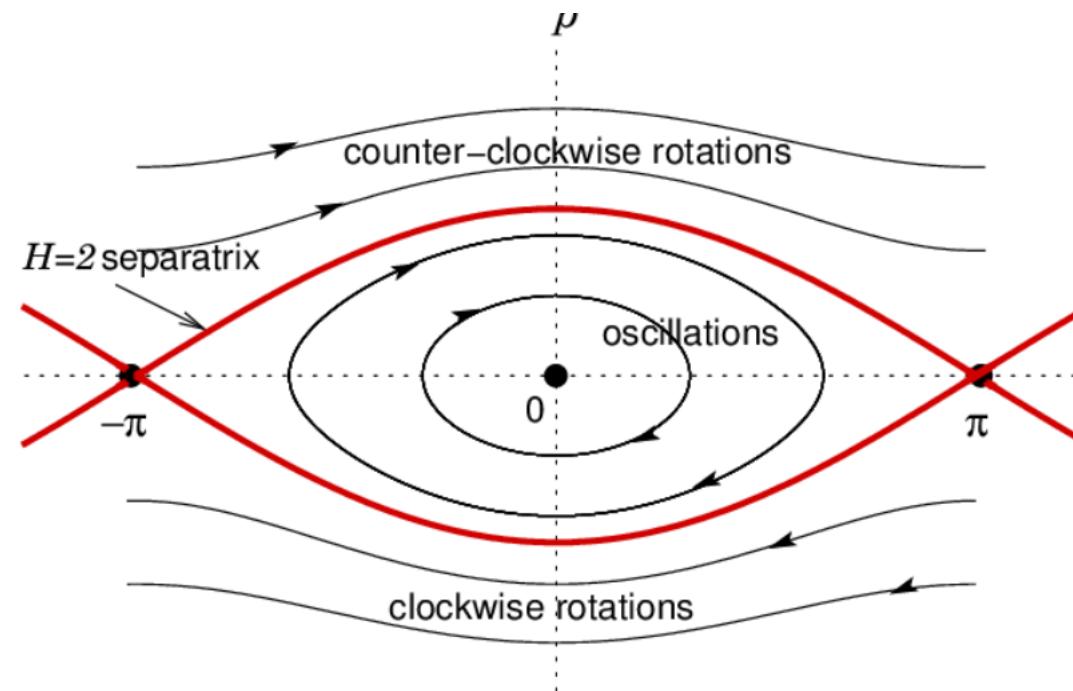


## Variedades invariantes

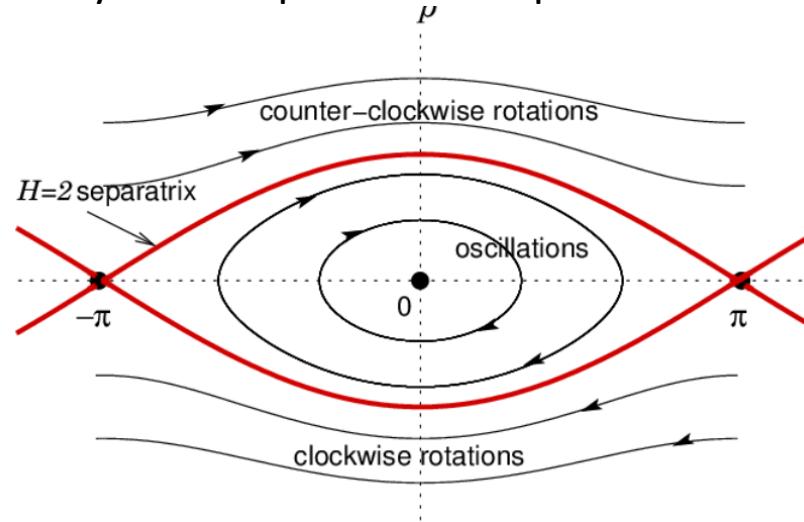
Uno de los objetivos declarados:

$$\theta'' + \sin \theta = 0$$



## Variedades invariantes

Existen trayectorias particulares que ordenan al resto.



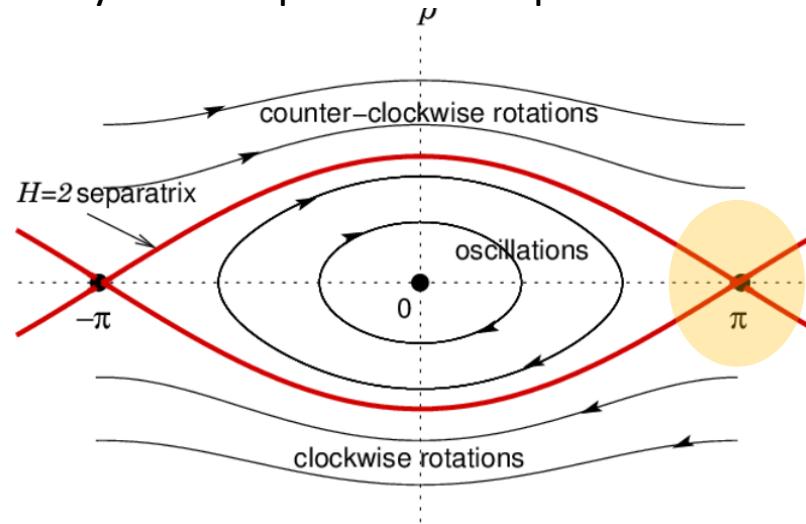
Son **variedades invariantes ante la dinamica**, que incluyen (tocan) a puntos estacionarios

Y se conocen como las variedades estables, inestables o centrales de los puntos fijos.

Son elementos importantísimos de la descripción de un sistema no lineal, porque **ayudan a ordenar lo global!**

## Variedades invariantes

Existen trayectorias particulares que ordenan al resto.



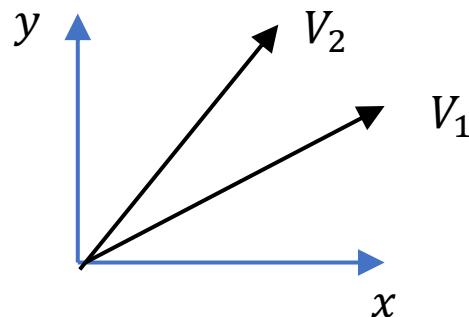
Esto es irse un poquito mas alla de los puntos fijos, para explorar lo global.

Y uno comienza a alejarse del punto fijo, mirando la dinamica **linealizada** alrededor de los puntos fijos

## Un breve repaso de lo que uno puede aprender linealizando

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si existen  $V_1$  y  $V_2$  autovectores de  $A$  con autovalores reales y distintos



$$V_1(t) = V_1(0)e^{\lambda_1 t}$$

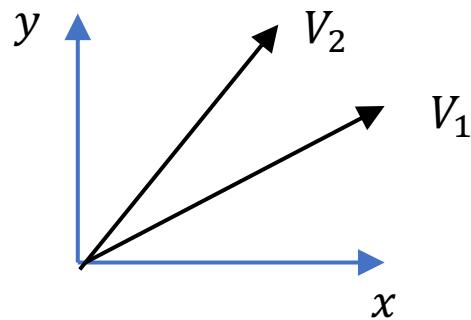
$$V_2(t) = V_2(0)e^{\lambda_2 t}$$

Y como.  $V_1$  y  $V_2$  son linealmente independientes, cualquier punto en el plano puede escribirse en términos de esos vectores, y entonces su evolución será:

## Un breve repaso de lo que uno puede aprender linealizando

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si existen  $V_1$  y  $V_2$  autovectores de  $A$  con autovalores reales y distintos



$$V_1(t) = V_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$V_2(t) = V_2 e^{\lambda_2 t}$$

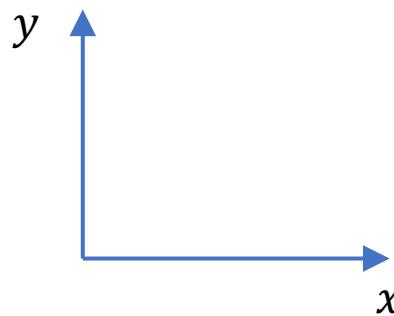
$$\text{Si } x(0) = c_1 V_1 + c_2 V_2$$

$$x(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t}$$

## Un breve repaso de lo que uno puede aprender linealizando

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Supongamos autovalores complejos



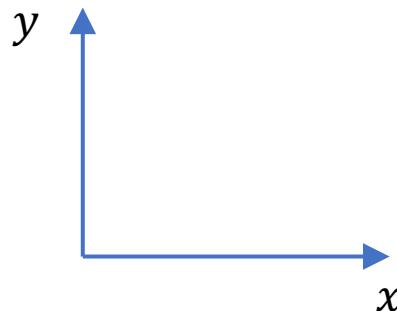
$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene autovalores  $\pm i\beta$

## Un breve repaso de lo que uno puede aprender linealizando

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Supongamos autovalores complejos



$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -i\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

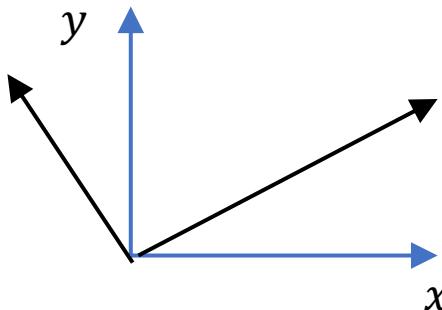
$$-\beta y = -i\beta x \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$X(t) = e^{-i\beta t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) - i\sin(\beta t) \\ i(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ \sin(\beta t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

## Un breve repaso de lo que uno puede aprender linealizando

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Supongamos autovalores complejos



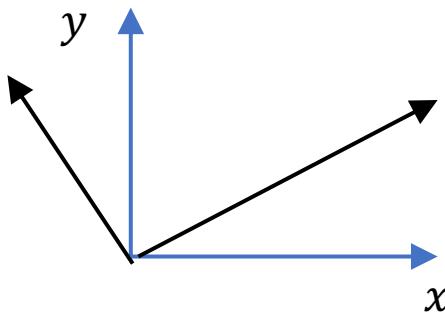
$V_1$        $V_2$

$$X(t) = e^{-i\beta t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ \sin(\beta t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

## Un breve repaso de lo que uno puede aprender linealizando

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Supongamos autovalores complejos



Y como antes, para cualquier condicion inicial, proyectamos en  $V_2(0)$ ,  $V_1(0)$ , y evolucionamos

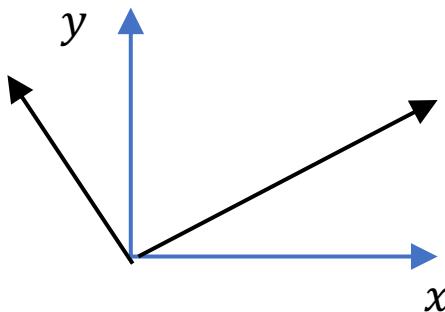
$V_1$                    $V_2$

$$X(t) = e^{-i\beta t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ \sin(\beta t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

## Un breve repaso de lo que uno puede aprender linealizando

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Supongamos autovalores complejos



Y como antes, para cualquier condicion inicial, proyectamos en  $V_2(0)$ ,  $V_1(0)$ , y evolucionamos

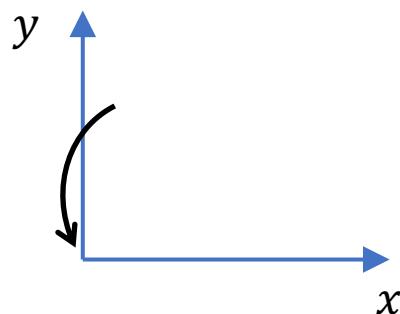
$V_1$                    $V_2$

$$X(t) = e^{-i\beta t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ \sin(\beta t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

## Un breve repaso de lo que uno puede aprender linealizando

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Supongamos autovalores complejos

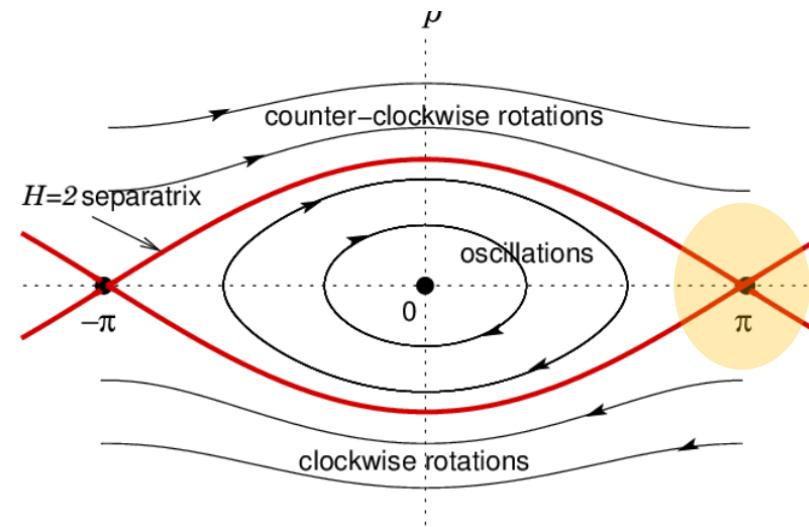


$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -i\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$X(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{(\alpha)t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix} + ie^{(\alpha)t} \begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

Que tiene que ver esta dinamica lineal con nuestro tema?



$$\begin{pmatrix} d\theta/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \Omega \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

## Variedades invariantes

Existen trayectorias particulares que ordenan al resto.

Un poco más formalmente, una variedad de dimensión  $n$  es un [espacio](#) que se parece localmente a  $\mathbb{R}^n$ . Una variedad puede ser vista como un objeto compuesto de parches  $n$ -dimensionales pegados topológicamente (ver [variedad diferenciable](#)).

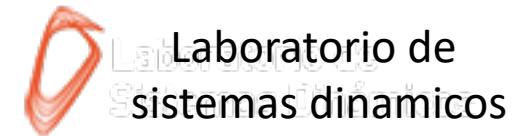
Son [variedades invariantes ante la dinamica](#), que incluyen (tocan) a puntos estacionarios



Y se conocen como las variedades estables, inestables o centrales de los puntos fijos.

Son elementos importantísimos de la descripción de un sistema no lineal, porque **ayudan a ordenar lo global!**

## Variedades invariantes



Existen trayectorias particulares que ordenan al resto.

Invariante ante la dinamica es que  
Como conjunto, se mapea sobre si mismo.  
Una trayectoria, bah.

Son **variedades invariantes ante la dinamica**, que  
incluyen (tocan) a puntos estacionarios

Y se conocen como las variedades estables, inestables o centrales de los puntos fijos.

Son elementos importantísimos de la descripción de un sistema no lineal, porque  
**ayudan a ordenar lo global!**

## Variedades invariantes

ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y^2 \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{array} \right.$$

$$\frac{dx}{dt} = x + y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = -y.$$

Vamos a hacer algo “muy poco nld”  
(buscar soluciones analíticas)

- Sabemos que  $y(t) = y_0 e^{-t}$  es solución de la segunda ecuación. Por lo tanto,

$$\frac{dx}{dt} = x + y_0^2 e^{-2t},$$

por lo que, si proponemos  $x(t) = C e^{-2t}$ ,

$$\frac{dx}{dt} = -2C e^{-2t} = C e^{-2t} + y_0^2 e^{-2t},$$

de donde  $C$  queda definido, al despejar de la última igualdad en la ecuación anterior:

$$C = \frac{-y_0^2}{3}.$$

de donde  $C$  queda definido, al despejar de la última igualdad en la ecuación anterior:

$$C = \frac{-y_0^2}{3}.$$

De este modo, sumando la solución de la ecuación homogénea con esta particular, tenemos que

$$x(t) = \alpha e^t - \frac{y_0^2}{3} e^{-2t},$$

de manera tal que, en términos de las condiciones iniciales  $(x_0, y_0)$ , la solución queda:

$$x(t) = \left( x_0 + \frac{y_0^2}{3} \right) e^t - \frac{y_0^2}{3} e^{-2t},$$

$$y(t) = y_0 e^{-t}.$$

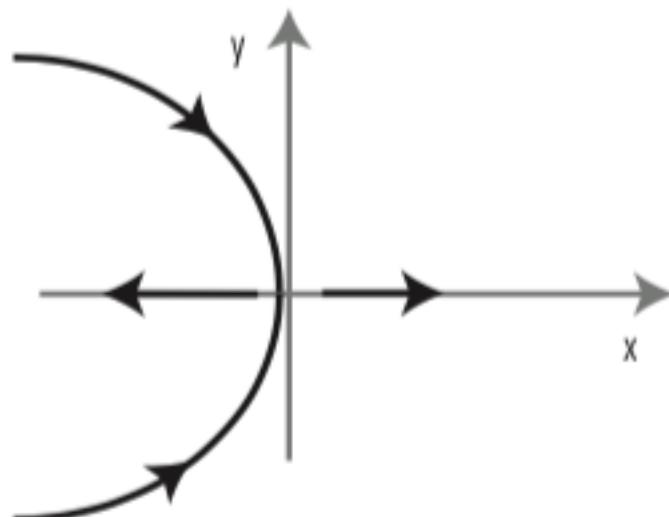
Con esta solución explícita, notemos que existe una trayectoria muy especial. Supongamos que tenemos una condición inicial tal que

$$x_0 + \frac{y_0^2}{3} = 0.$$

Entonces, como se cumple que  $x(t) = -\frac{y_0^2}{3} e^{-2t}$  y que  $y(t) = y_0 e^{-t}$ , se cumple para todo tiempo que:

$$x(t) + \frac{y^2(t)}{3} = \left(-\frac{y_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{3}\right) e^{-2t} = 0.$$

Por lo tanto, la condición inicial que hemos elegido nos coloca en una *variedad invariante*, es decir que la curva es mapeada por el flujo en sí misma ([figura 1](#)).



Notar que  $x(t) = -(y_0/3)e^{-2t}$ ,  $y(t) = (y_0)e^{-t}$

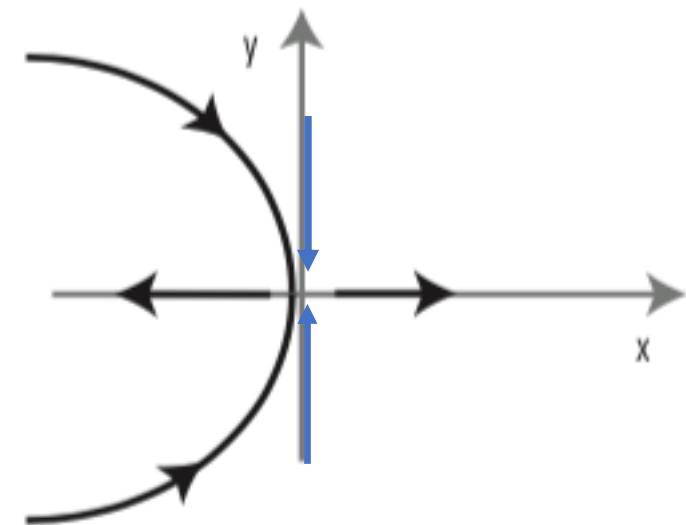
$x$  va acer mucho más rápido que  $y$ , o sea que cerca de cero, va tangente al eje  $y$

Notar que la **tangente** de la variedad invariante estable,  
es **la variedad lineal estable!**

$$\frac{dx}{dt} = x + y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = -y.$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Notar que la **tangente** de la variedad invariante estable,  
es **la variedad lineal estable!**

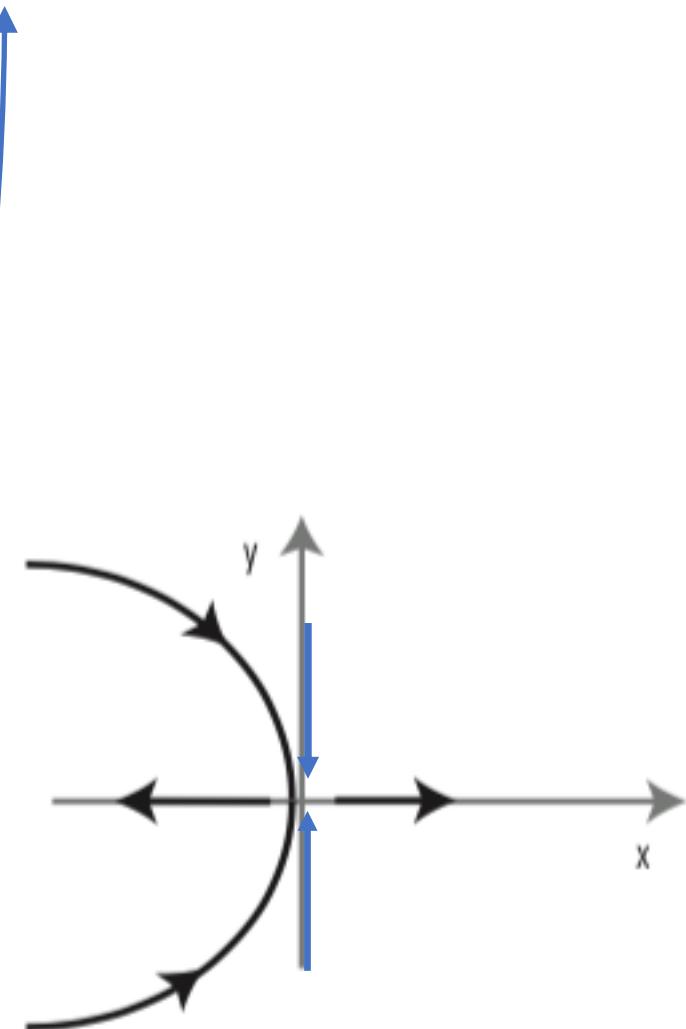
$$\frac{dx}{dt} = x + y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = -y.$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Auto vector 1=  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  con autovalor  $\lambda = 1$

Auto vector 2=  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  con autovalor  $\lambda = -1$



*Definición.* Sea  $x^*$  el punto fijo del sistema  $\dot{x} = F(x)$ , generador del flujo  $\phi_t(x)$ , es decir, del conjunto de trayectorias del problema. Llamamos variedades estables e inestables locales  $W_{loc}^{stable}(x^*)$  y  $W_{loc}^{unstable}(x^*)$  del punto fijo a los siguientes conjuntos:

$$W_{loc}^{stable}(x^*) = \left\{ x \in U \mid \phi_t(x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x^*, \text{ con } \phi_t(x) \in U \text{ para todo } t \right\}$$

$$W_{loc}^{unstable}(x^*) = \left\{ x \in U \mid \phi_t(x) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} x^*, \text{ con } \phi_t(x) \in U \text{ para todo } t \right\}$$

Esto es, los puntos del entorno  $U$  del punto fijo (de ahí el adjetivo “local”) que convergen a (divergen de) este, para todo tiempo, sin escapar del entorno.

*Definición.* Llamamos variedades globales estable e inestable del punto fijo  $x^*$  a los conjuntos

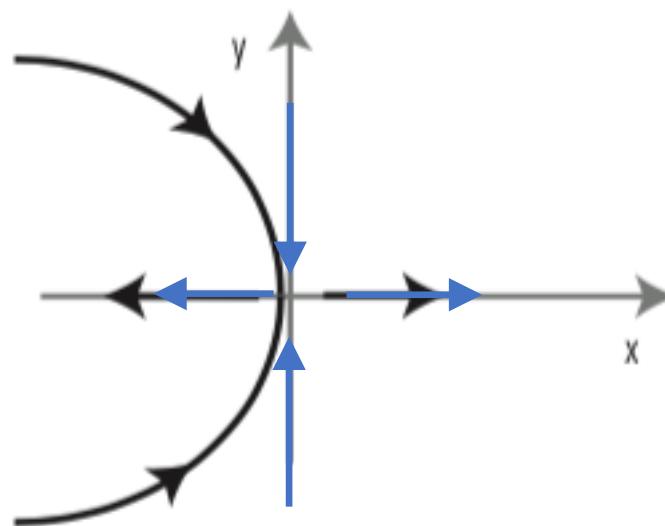
$$W^{stable} = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^{stable}(x^*)),$$

$$W^{unstable} = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^{unstable}(x^*)),$$

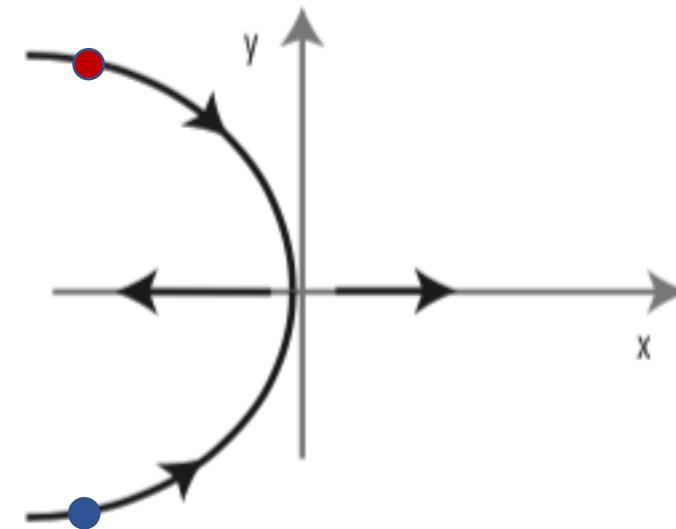
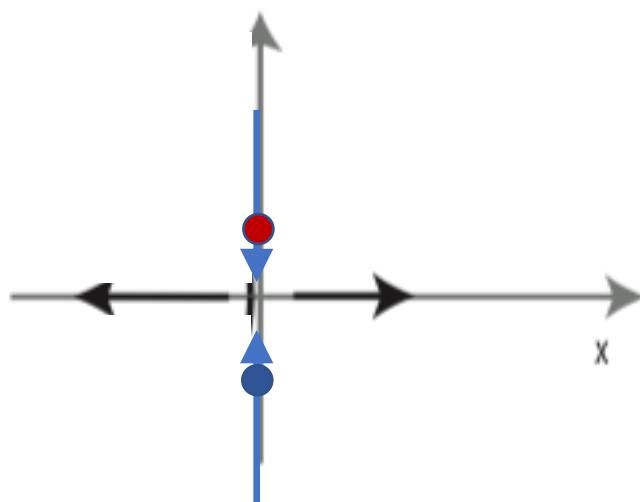
lo cual quiere decir que si conocemos, por ejemplo, las variedades locales estables, podemos iterarlas hacia atrás para obtener las variedades estables globales (esto es, reconstruimos hacia atrás lo que terminará convergiendo en la variedad estable local). De ahí la condición de “ $t \leq 0$ ” en la definición. Equivalentemente, integrando hacia adelante la variedad local inestable, tenemos la variedad inestable.

Estos pasos constituirán un procedimiento algorítmico, una vez prescripto el modo de calcular las variedades locales estables o inestables. Lo logramos gracias a un teorema que afirma que en el entorno del punto fijo  $x^*$ , las variedades locales inestables son tangentes a la variedad inestable del problema linealizado  $E^{unstable}$ , y las estables, a las  $E^{stable}$  (en la medida en que el punto  $x^*$  sea hiperbólico).

*Teorema.* Sea  $x^*$  un punto fijo hiperbólico de  $\dot{x}' = F(x)$ . Entonces existen las variedades locales estables e inestables, de dimensiones  $n_{estables}$ ,  $n_{inestable}$  (las dimensiones de las variedades estable e inestable del problema linealizado  $E^{estable}, E^{inestable}$ ). Más aún, en el punto fijo hiperbólico, las variedades locales estables e inestables son tangentes a  $E^{estable}, E^{inestable}$ .



Ahora estamos equipados para calcular las variedades estables e inestables de un punto fijo hiperbólico. Una vez linealizado el problema, calculamos las variedades estables e inestables. Luego, en el caso de la variedad inestable, tomamos una condición inicial en el entorno del punto fijo, en la dirección de  $E^{inestable}$ . Luego, integramos el campo vector. La trayectoria será cercana a la  $W^{inestable}$ . Para una integración que se llevó a cabo por un tiempo dado, nos garantizamos que hemos elegido una condición inicial adecuada asegurándonos de que, con una condición inicial más próxima aún al punto fijo, obtenemos una curva que se superpone con la original. Un procedimiento análogo, pero eli-



$$\theta'' + \sin(\theta) = 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\sin(\theta)$$

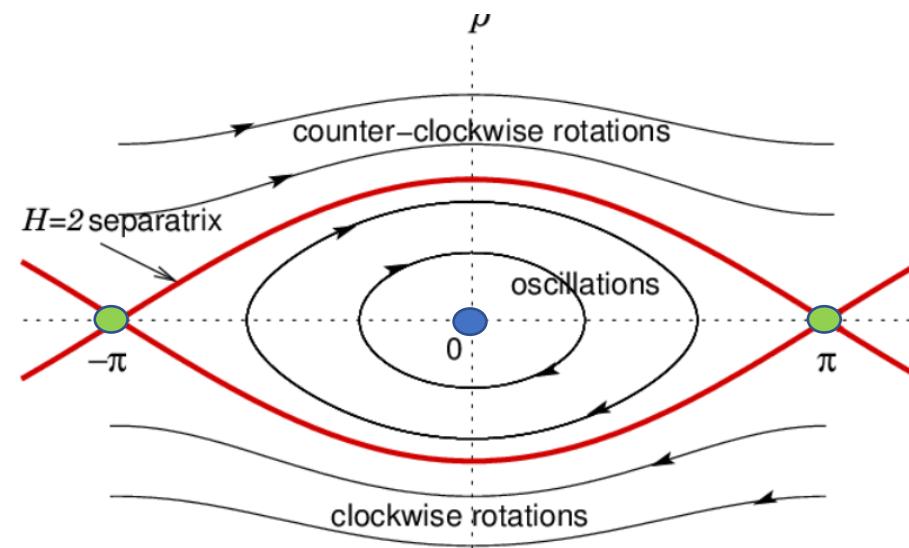
Puntos fijos.  $\theta = 0$ ,  $\Omega = 0$  ( $\theta = \pi$ ,  $\Omega = 0$ )

$$\theta'' + \sin(\theta) = 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\sin(\theta)$$

Puntos fijos.  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi (= -\pi)$



$$\theta'' + \sin(\theta) = 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega = f_1(\theta, \Omega)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\sin(\theta) = f_2(\theta, \Omega)$$

Puntos fijos.  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi (= -\pi)$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \epsilon_\theta \\ \epsilon_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \Omega} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_\theta \\ \epsilon_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_\theta \\ \epsilon_\Omega \end{pmatrix}$$

$$\theta'' + \sin(\theta) = 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega = f_1(\theta, \Omega)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\sin(\theta) = f_2(\theta, \Omega)$$

Puntos fijos.  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi (= -\pi)$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \epsilon_\theta \\ \epsilon_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \Omega} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_\theta \\ \epsilon_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_\theta \\ \epsilon_\Omega \end{pmatrix}$$

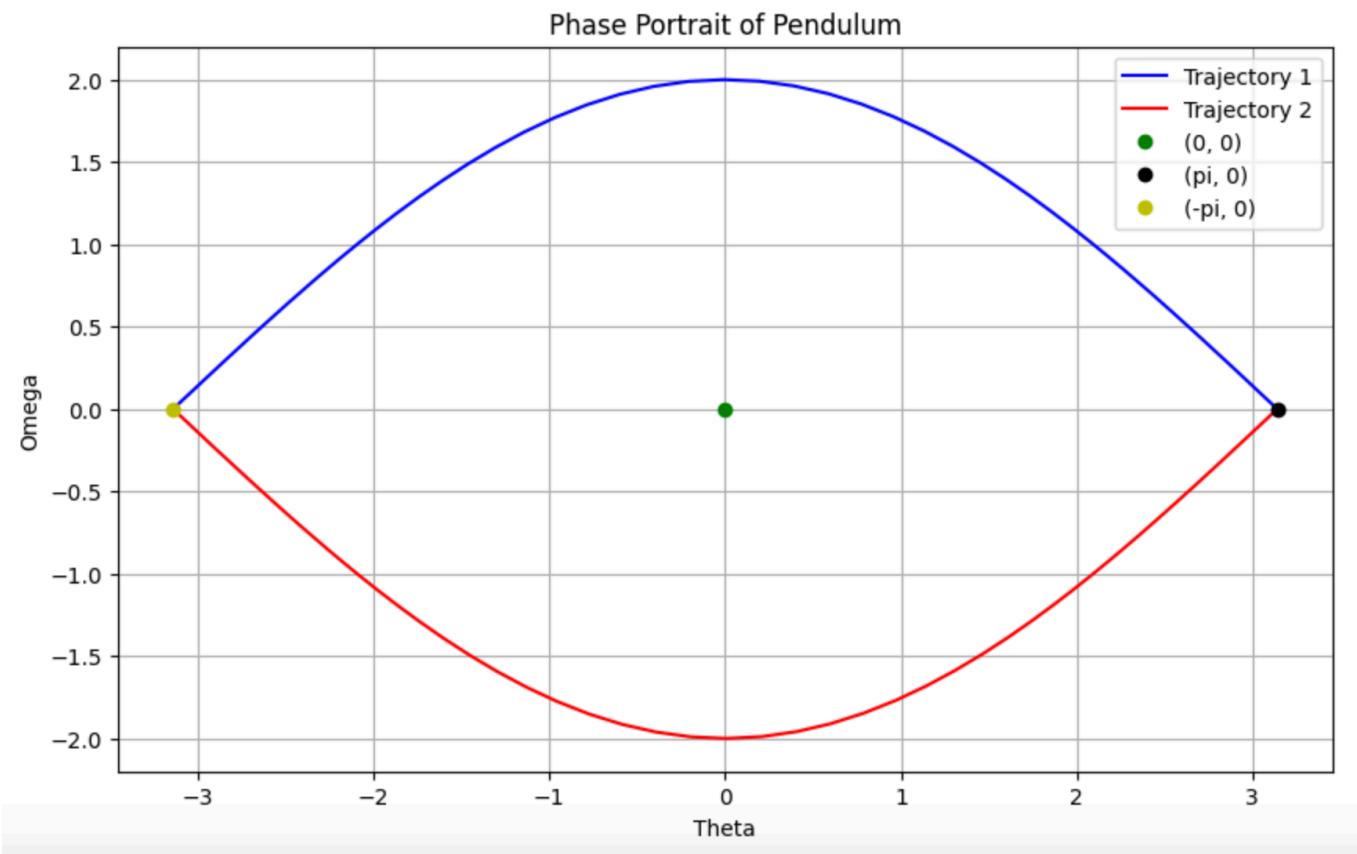
$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\lambda x &= y \\ \lambda y &= x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda &= 1, x = 1, y = 1 \\ \lambda &= -1, x = 1, y = -1\end{aligned}$$



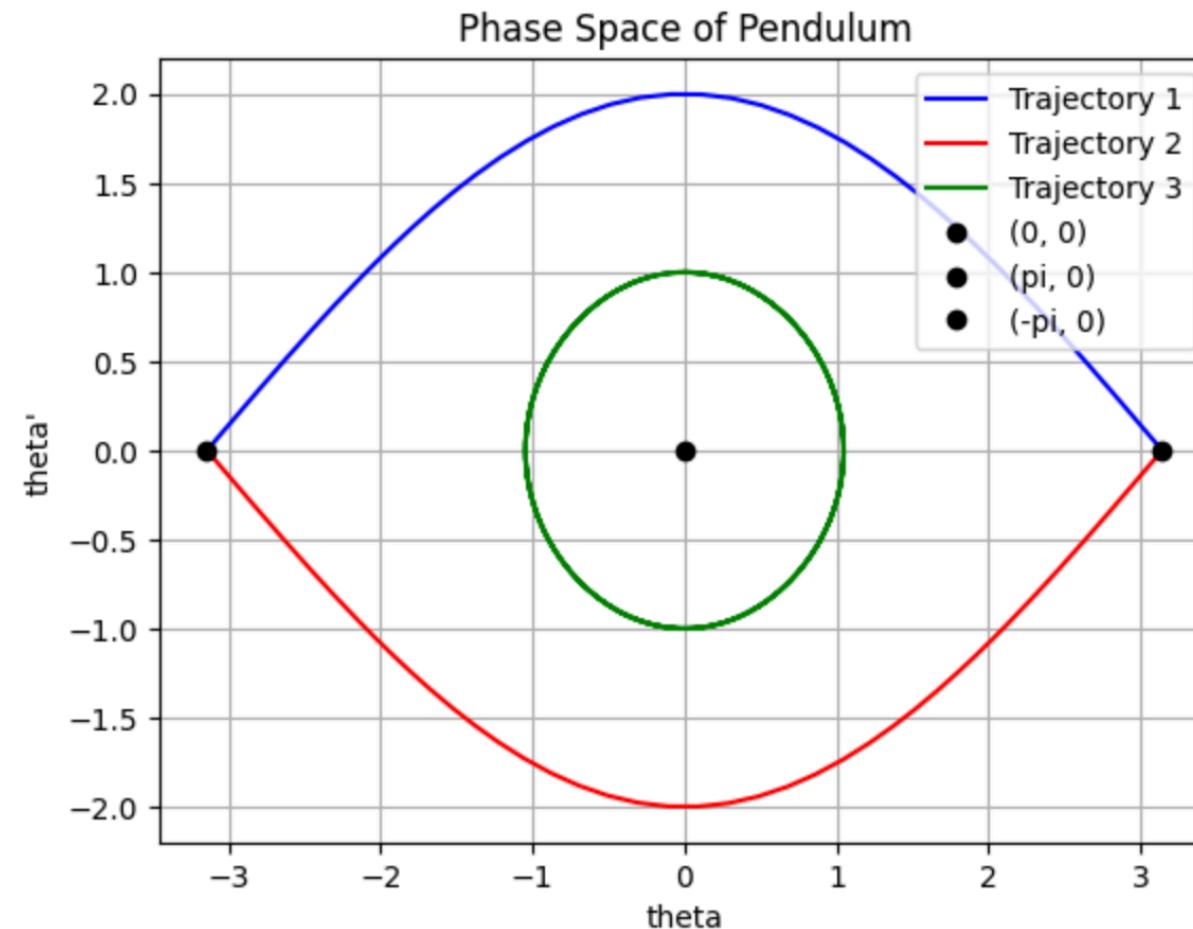
$$\theta'' + \sin(\theta) = 0$$



1. Encuentro el punto fijo Verde  $(\pi, 0)$
2. Linealizo, y encuentro Las variedades locales estable E inestable (autovectores del problema linealizado)
3. Tiro una trayectoria Numerica, cerquita del punto Fijo, y de la variedad estable



$$\theta'' + \sin \theta = 0$$





En algunos casos, es posible demostrar la existencia de tal trayectoria, aunque no la podamos calcular. Supongamos que estamos tratando con un sistema que presenta simetría de reversión temporal, esto es, si

$$t \rightarrow -t$$

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow -\frac{dx}{dt},$$

las ecuaciones no cambian –como ejemplo:  $x'' = F(x)$ –. Esto quiere decir que si  $(x(t), y(t))$  es solución, entonces  $(x(-t), y(-t))$  también lo será.

Un ejemplo de sistema dinámico que presenta esa simetría es:

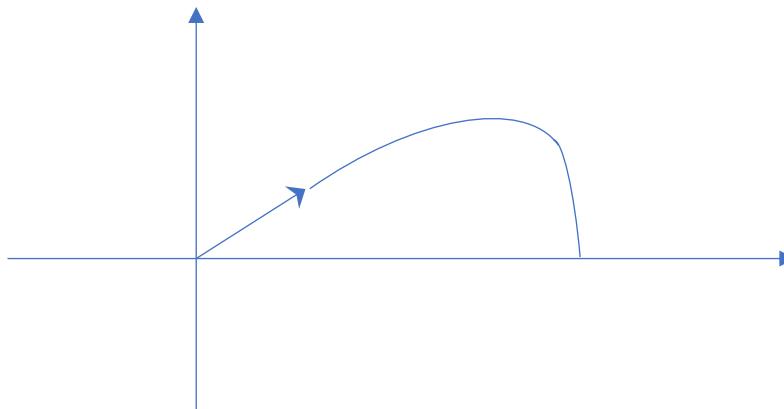
$$\frac{dx}{dt} = y$$

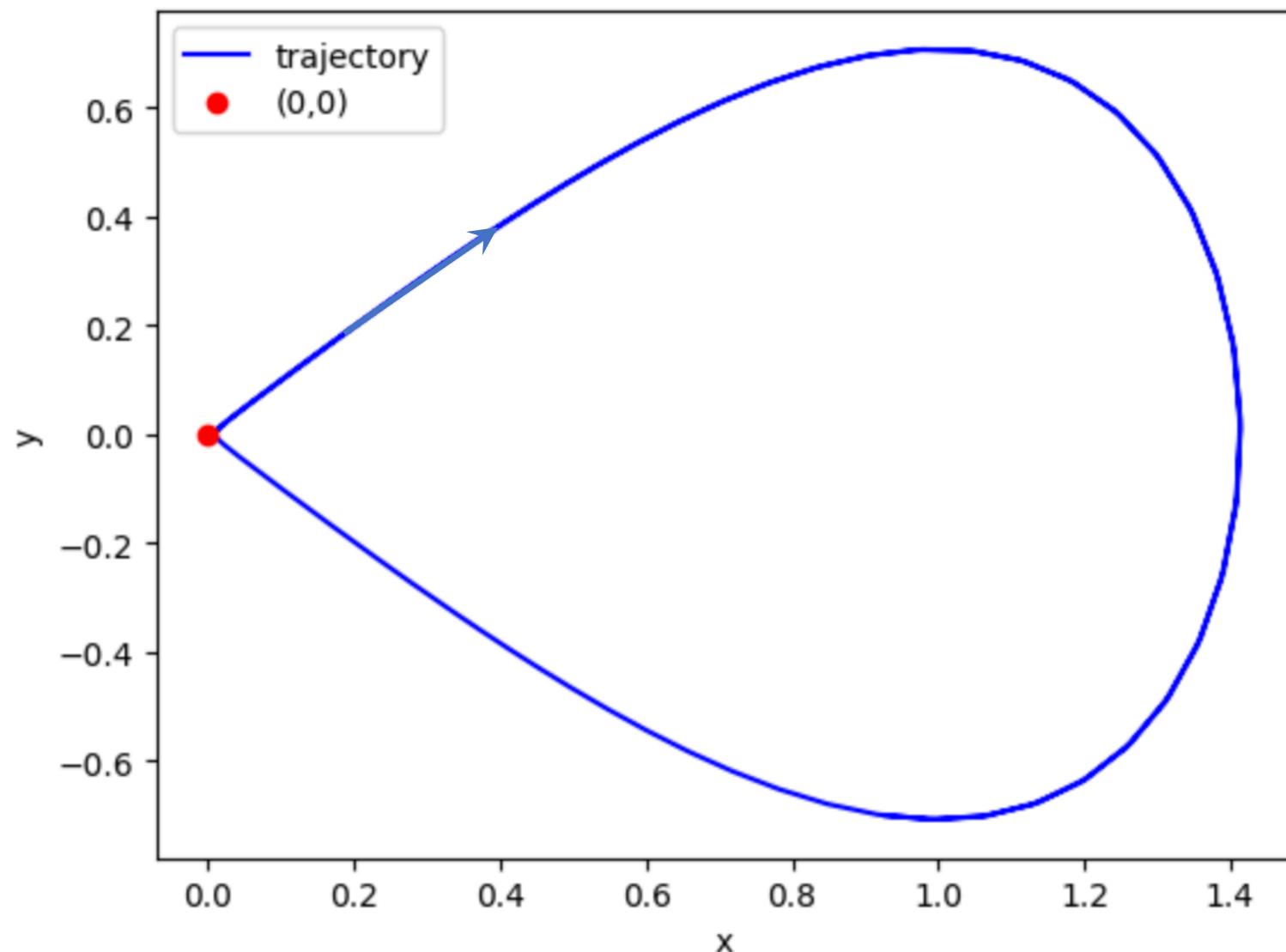
$$\frac{dy}{dt} = x - x^3.$$

Consideremos entonces la variedad inestable del punto ensilladura que posee el sistema en el origen. Esta trayectoria abandona al origen tan-

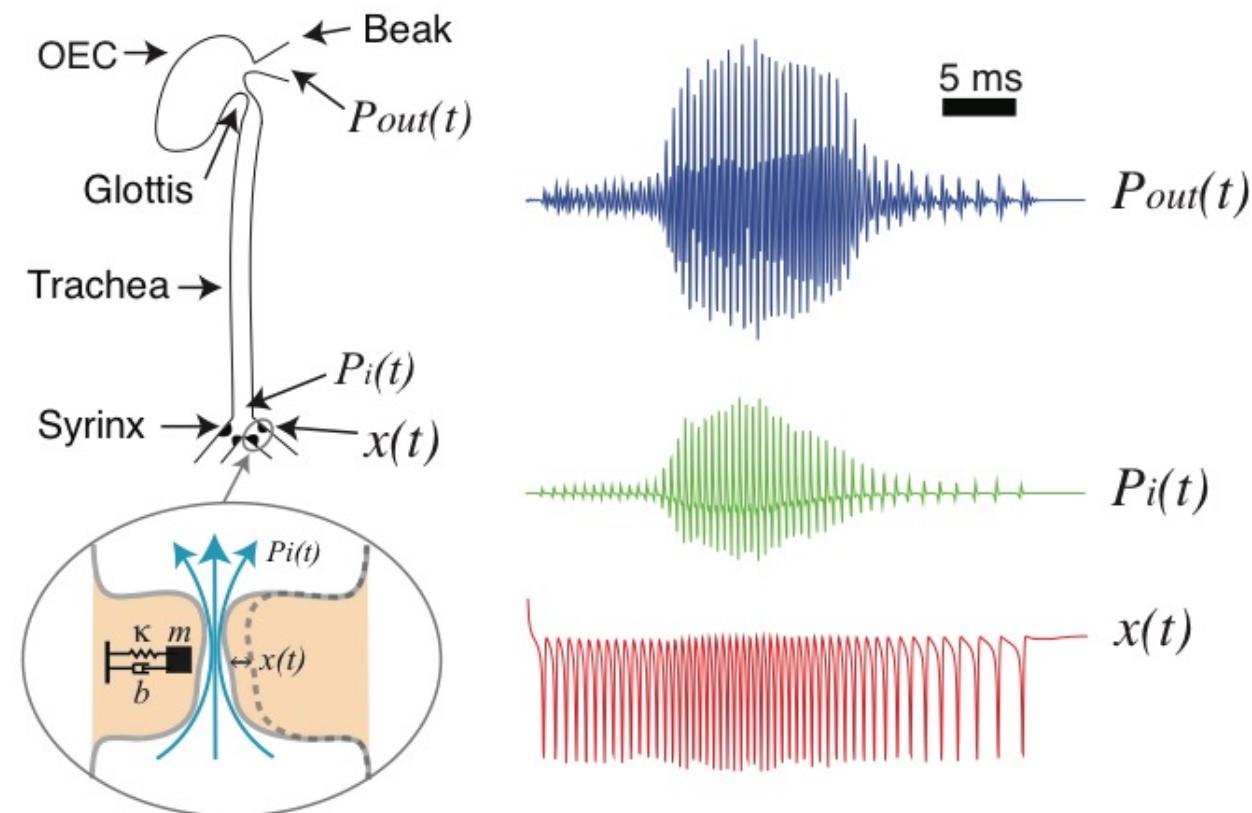


gente al vector  $(1,1)$ . Así, partimos por el primer cuadrante. Tal trayectoria comienza creciendo en  $x$ , y por lo tanto también en  $y$ . Hasta que, por supuesto, llegamos a  $x = 1$ . A partir de allí,  $x$  sigue creciendo, pero  $y$  decrece. No queda otra cosa que eventualmente llegar al eje  $y = 0$ . Ahora bien, tenemos un fragmento de trayectoria en el semiplano superior. Si reflejamos el segmento y cambiamos el sentido de la flecha (de derecha a izquierda), la propiedad de simetría de reversión temporal del sistema nos da otro fragmento que también es solución del problema *por la simetría de reversión temporal*. Ambos fragmentos se cierran en el punto fijo. De modo que construimos una trayectoria que empieza en el entorno (arbitrariamente cerca) del punto fijo y tiende a llegar (arbitrariamente cerca) a ese mismo punto. Esto no es otra cosa que una trayectoria homoclina.





Conexion homoclinica



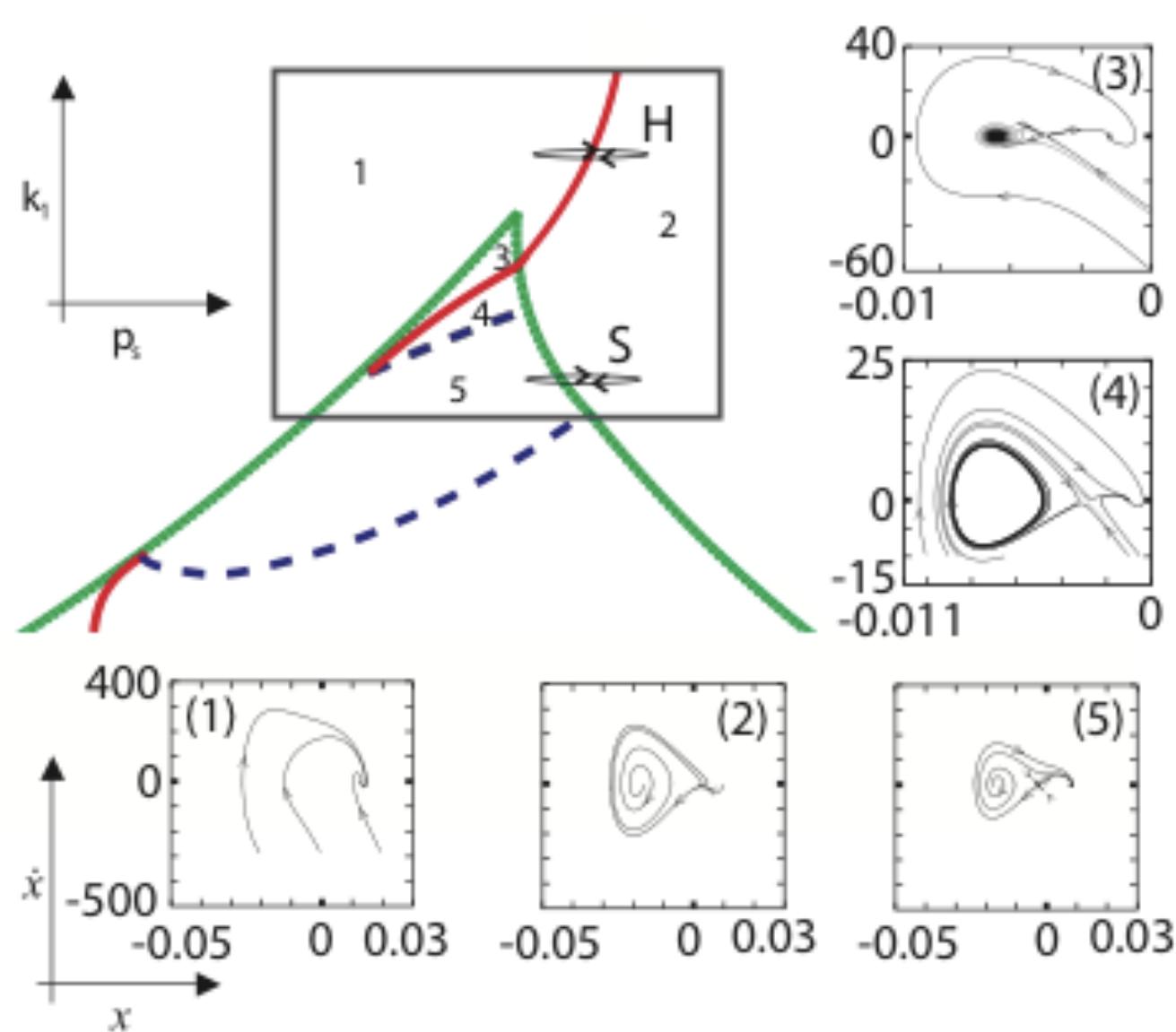


Si exploramos este sistema dinamico para distintos valores de  $p_s$  y  $k$

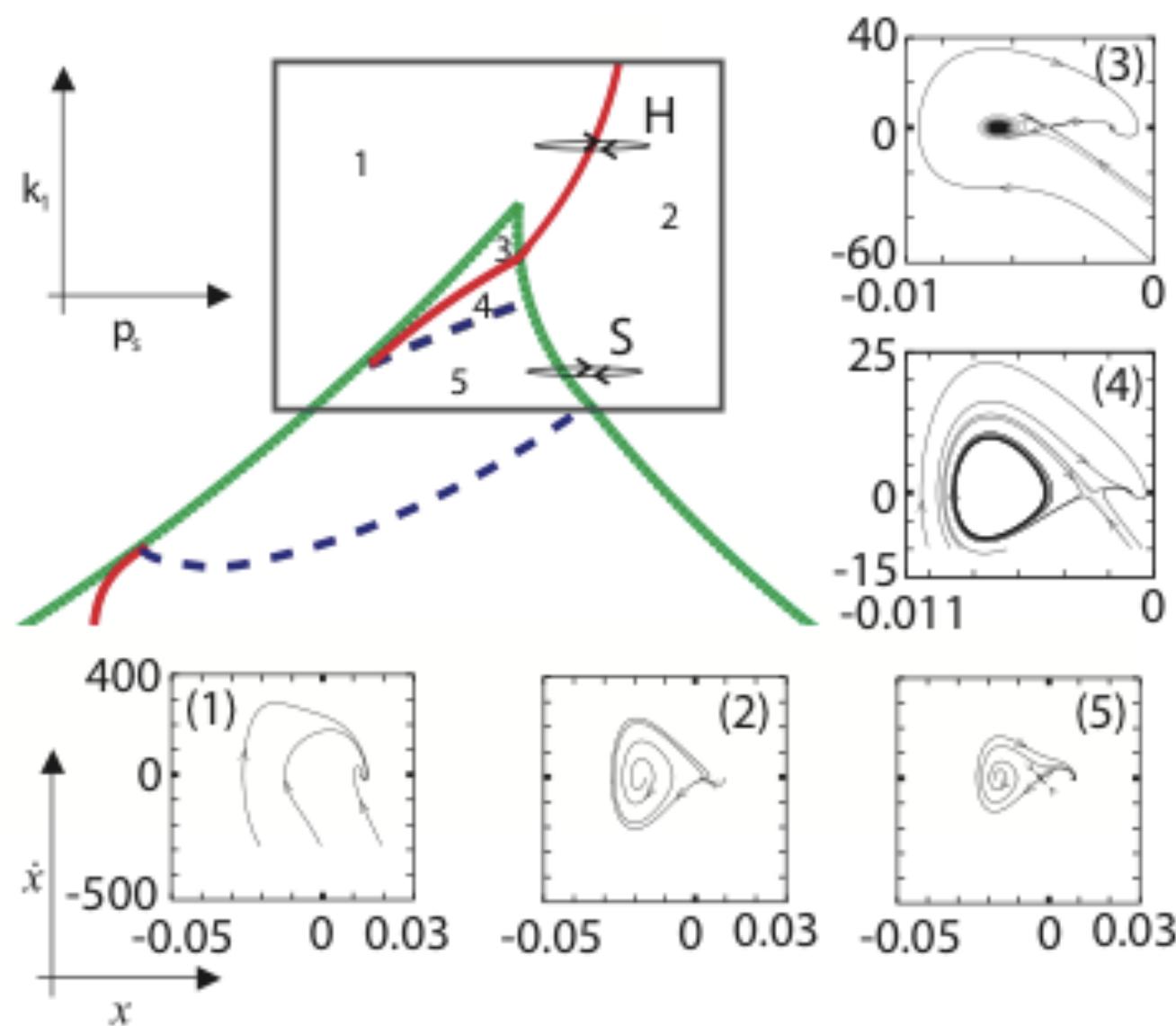
$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = (1/m) \left[ -k(x)x - b(y)y - cx^2y + a_{\text{lab}} p_s \left( \frac{\Delta a + 2\tau\tau}{a_{01} + x + \tau y} \right) \right].$$

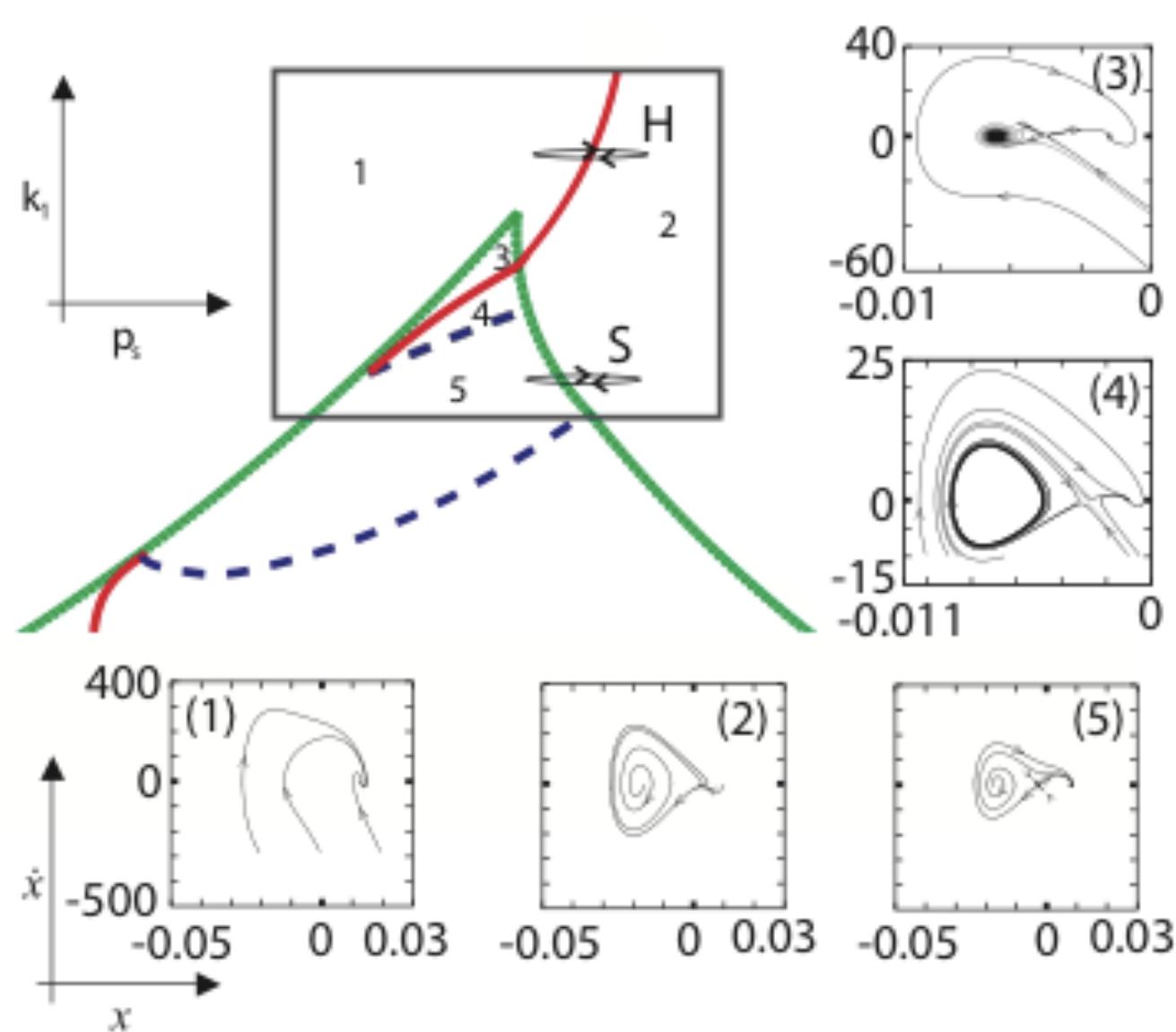
tenemos...



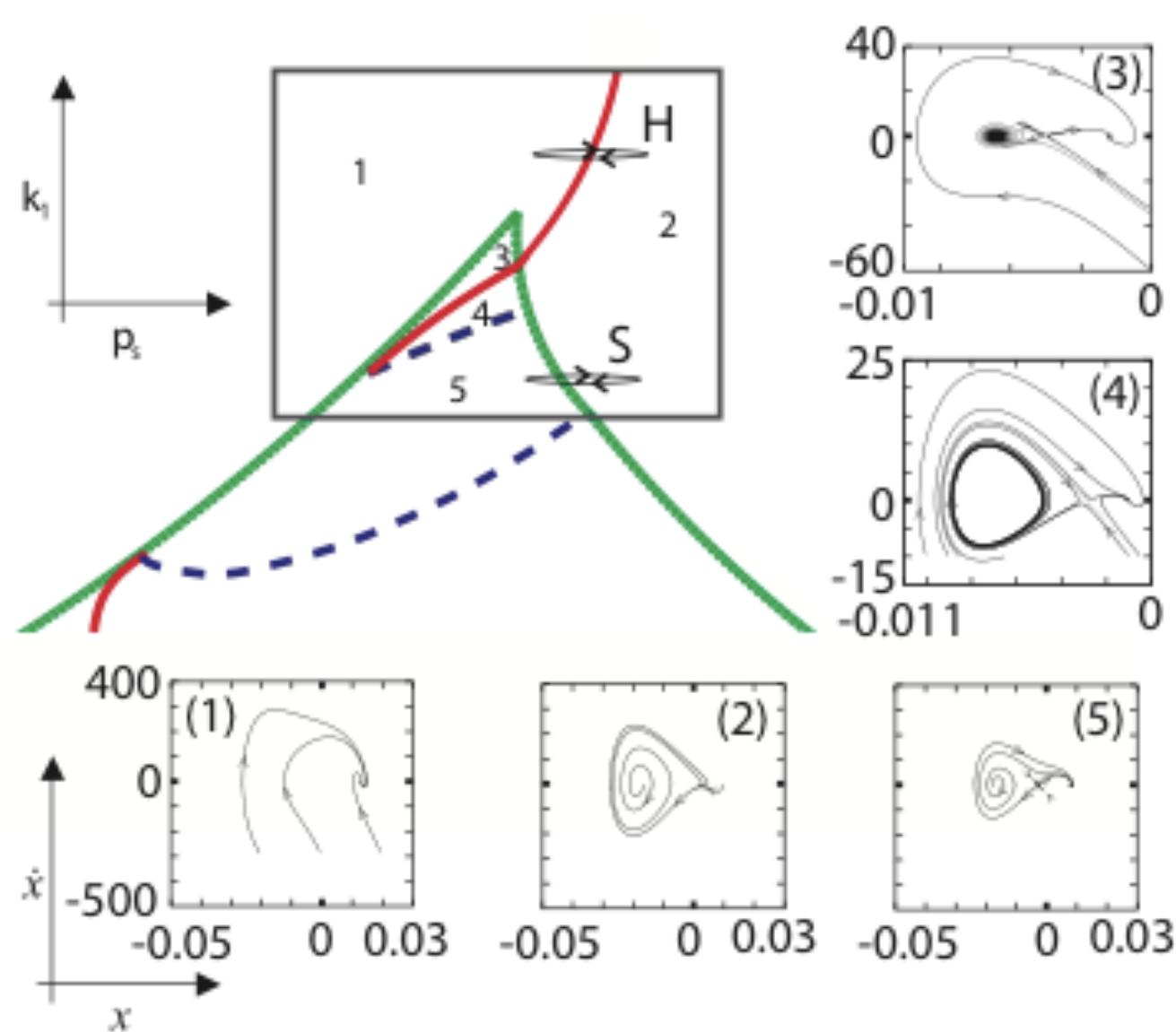
$1 \rightarrow 3$	$SN$
$3 \rightarrow 1.$	$SN$

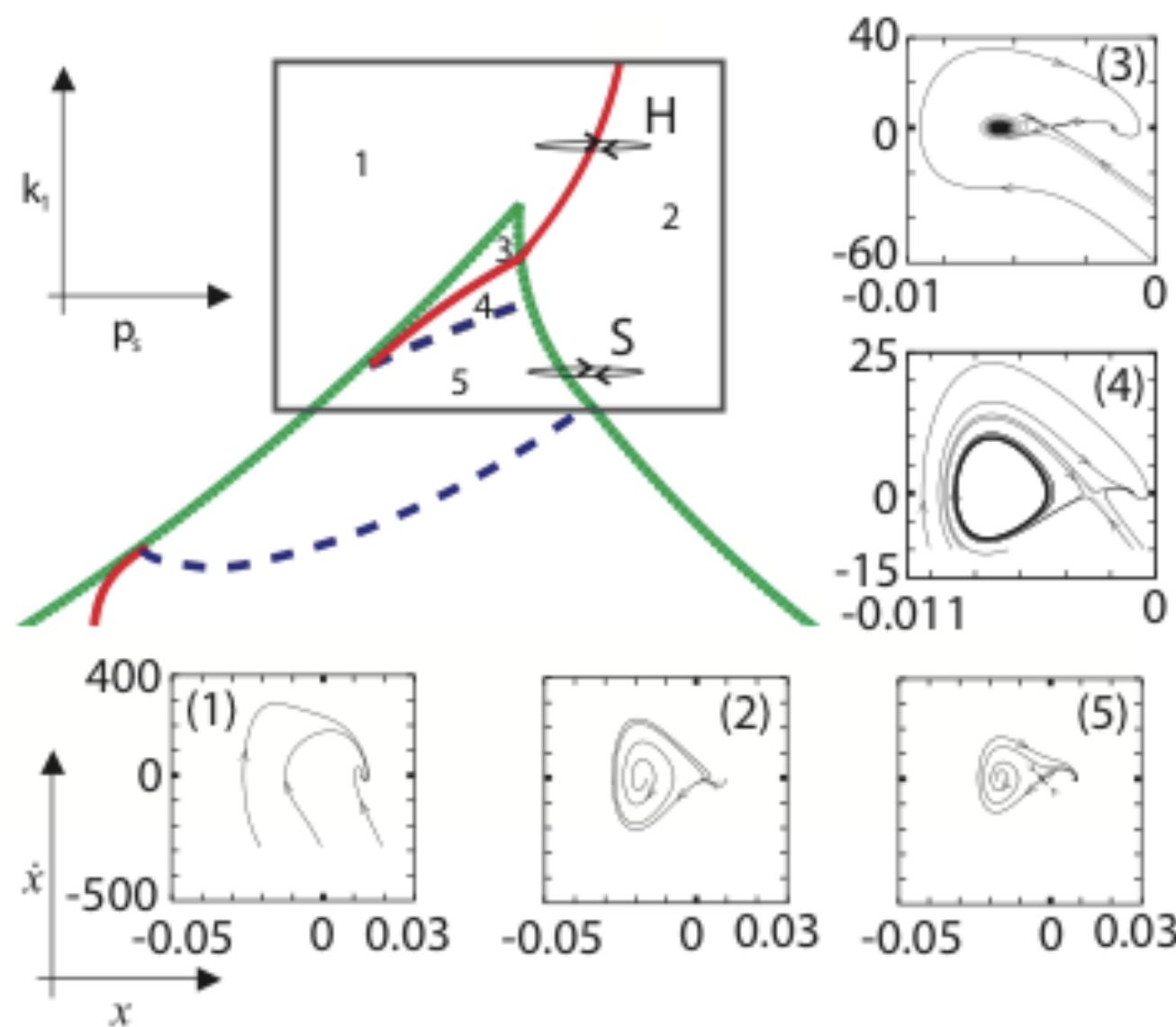


$3 \rightarrow 4.$  Hopf



4 → 5. Homoclinic connection


 $1 \rightarrow 2 \quad \text{Hopf}$



5 → 2. SNLC