Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Laboratorio 1

1er Cuatrimestre 2025

Laboratorio 1C: martes 14-20 hs

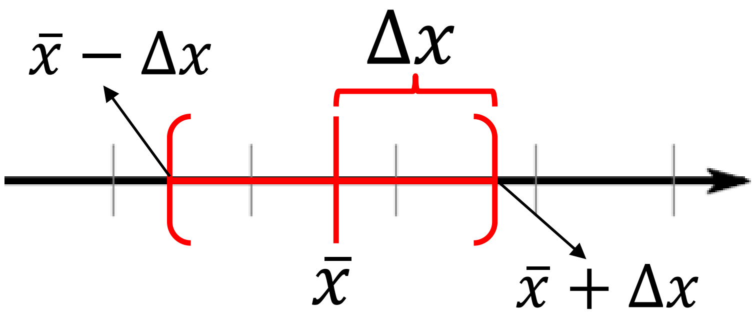
Lucía Famá, Federico Trupp, Camila Borrazas, Juan Sangiorgio, Lara Barreiro

REPASO DE LA CLASE PASADA …

Un **resultado de una MF** será un **intervalo de confianza**

$\overline{x}$: Valor más representativo (x_0)

Δx: Incerteza Absoluta



Resultado:

Intervalo de Confianza

$$\overline{\boldsymbol{x}} - \Delta \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x} \leq \overline{\boldsymbol{x}} + \Delta \boldsymbol{x}$$

$$[\overline{\boldsymbol{x}} - \Delta \boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{x}} + \Delta \boldsymbol{x}]$$

OBJETIVO

Obtener una expresión VÁLIDA del ***resultado de una MF***

REPASO DE LA CLASE PASADA ...

Obtener una expresión VÁLIDA del ***resultado de una MF***

Expresión: $\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}}$

Clase de Medición

$\bar{x}$**:** Valor más representativo (x_0)

Δx**:** Incerteza Absoluta

Fuentes de incertezas

<u>REGLA 2</u> DE LABORATORIO 1

NUNCA REPORTO UN RESULTADO SIN SU INCERTEZA

REPASO DE LA CLASE PASADA …

Mediciones Directas (MD)

1 - Si los datos son todos iguales

⇨ $\overline{\boldsymbol{x}} =$ número leído en el instrumento

⇨ $\boldsymbol{\Delta x = \sigma_{ap}}$ ⇨ $x = \left(\bar{x} \pm \sigma_{ap}\right)\, Ud.$

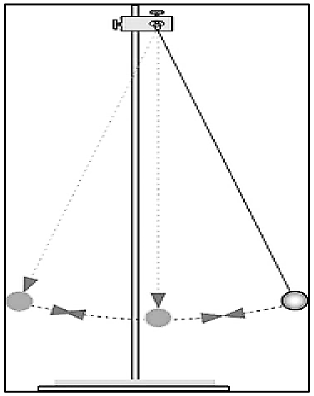
$\boldsymbol{\sigma_{ap} = 0,01\ s}$

$x = (13{,}16 \pm 0{,}01)\ s$

1: Pesa como fuente de incerteza INSTRUMENTAL

REPASO DE LA CLASE PASADA ...

2 - Si hay datos que difieren entre sí



13,10 s	13,19 s	13,16 s
13,14 s	13,15 s	13,11 s
13,20 s	13,21 s	13,16 s

resolución
$0{,}01\ s$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\Delta x = ?$$

Orienta el cálculo de P

$$\boldsymbol{P = \frac{R}{\bar{x}}100}$$

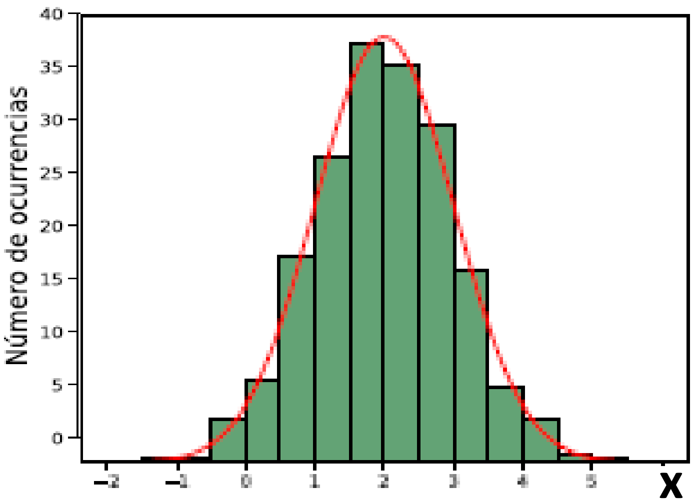
Si $P > 8\%$

2: Pesa como fuente de incerteza ACCIDENTAL

REPASO DE LA CLASE PASADA ...

HISTOGRAMA

- Número total de medidas: ***N***
- Bins (N° de columnas): ***C***
- Clases (ancho de columna): ***a***



Regla de Sturges:

$$\boxed{C = 1 + 3{,}322\, log(N)}$$

El ancho de Histograma nos da idea de la forma de distribución de datos

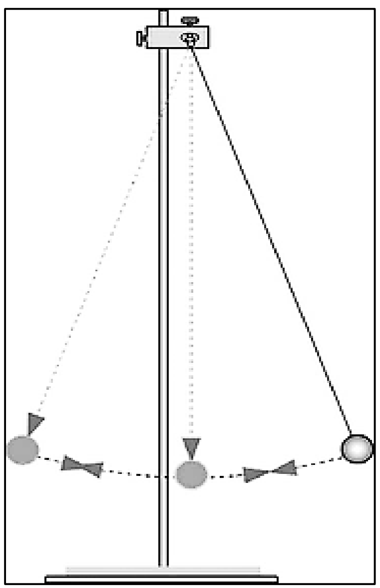
Mediciones Directas (MD)

2 - Si hay datos que difieren entre sí

2: Pesa como fuente de incerteza ACCIDENTAL

¿Cuál es el valor de T?

$$T = (\bar{T} \pm \Delta T)\ Ud.$$



13,10 s	13,19 s	13,16 s
13,14 s	13,15 s	13,11 s
13,20 s	13,21 s	13,16 s

resolución
$0{,}01\ s$

$$\bar{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i$$

$$\Delta T = ???$$

Objetivos de la clase de hoy

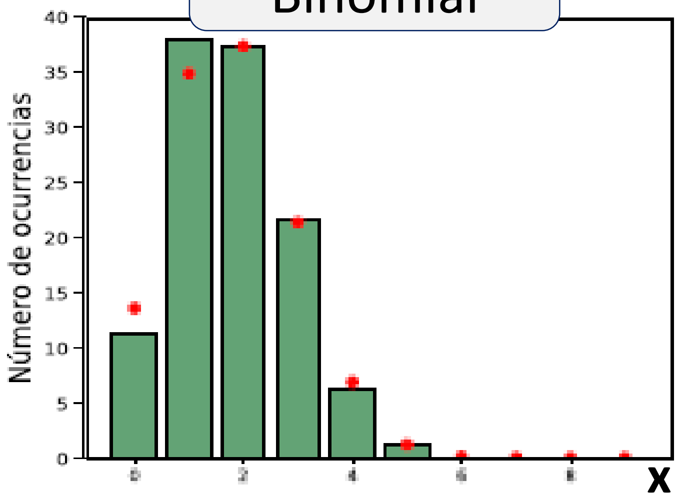
Determinar la incerteza absoluta Δx de medidas aleatorias

Comprender y visualizar la teoría (estadística) a partir de las Figuras de diferentes histogramas un experimento de un péndulo simple.

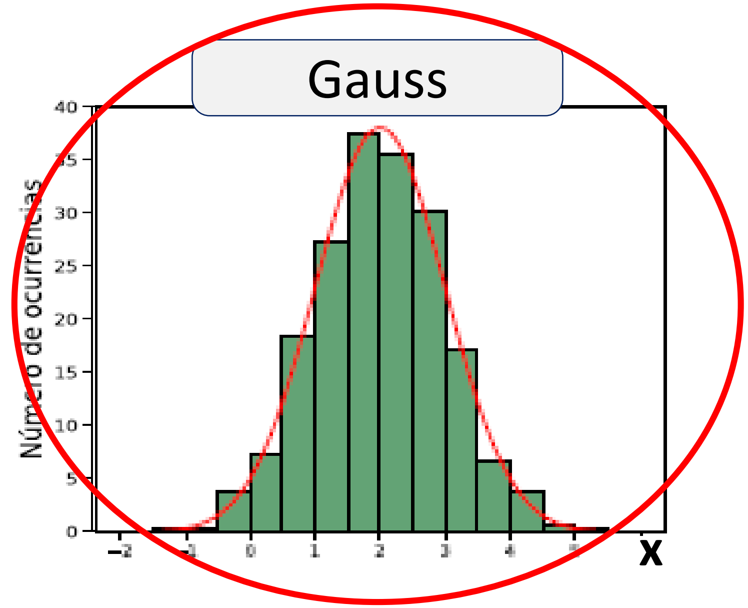
Obtener el resultado del período del péndulo y del período del faro

Ejemplos de distribuciones

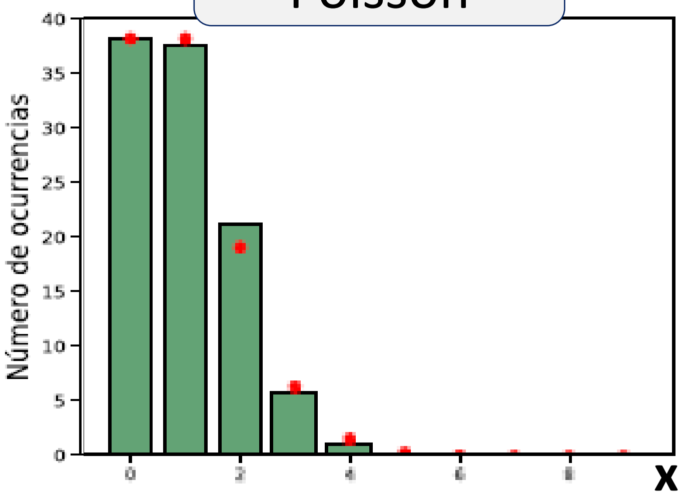
Binomial



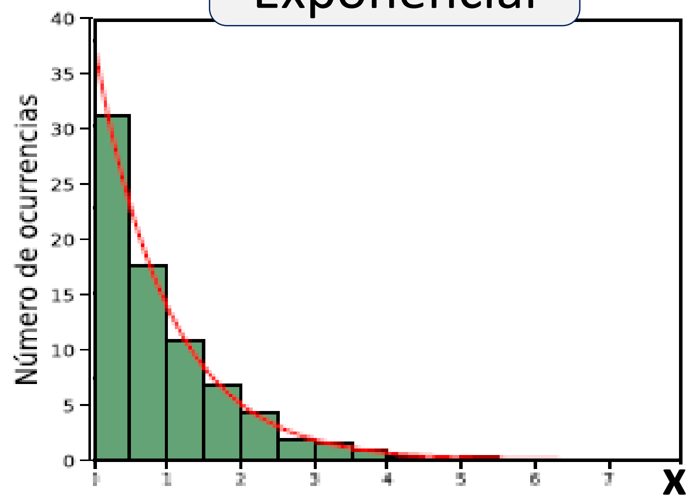
Gauss



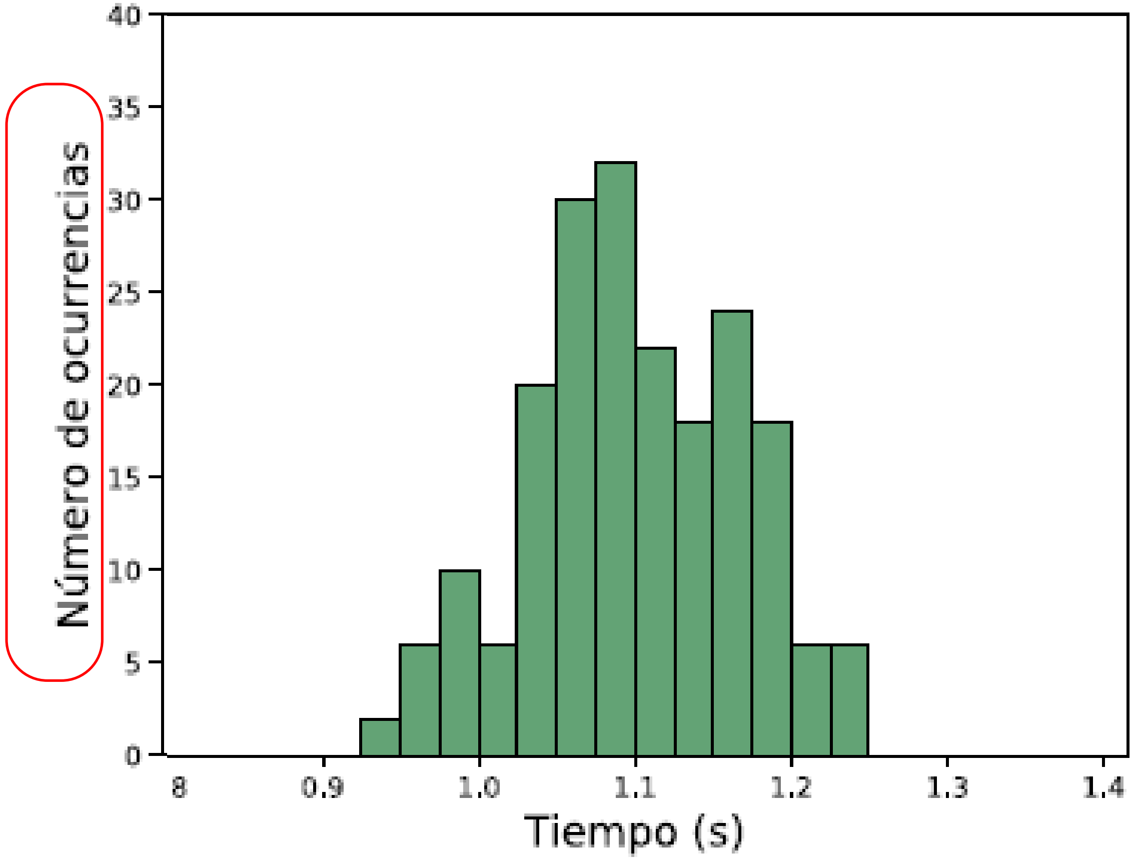
Poisson



Exponencial



¿Si aumenta N?



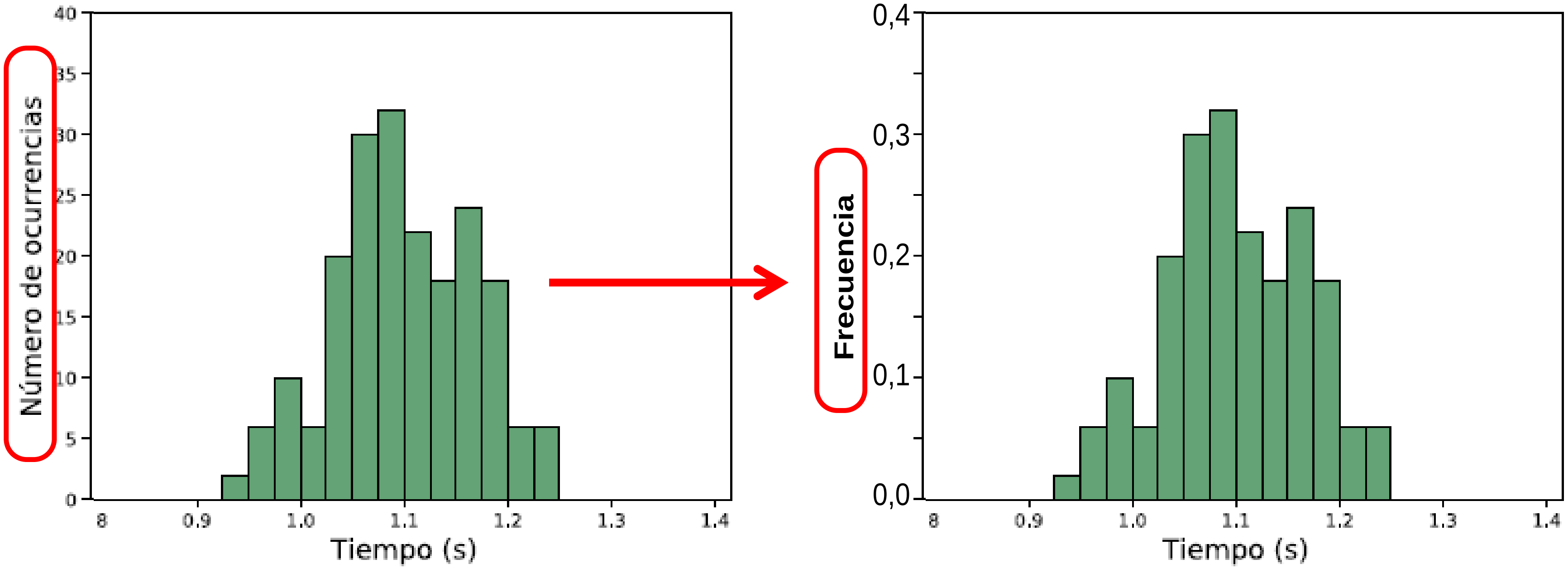
Regla de Sturges

$$C = 1 + 3{,}322\,\log(N)$$

$$\sum_j Número\ de\ ocurrencias_j = N$$

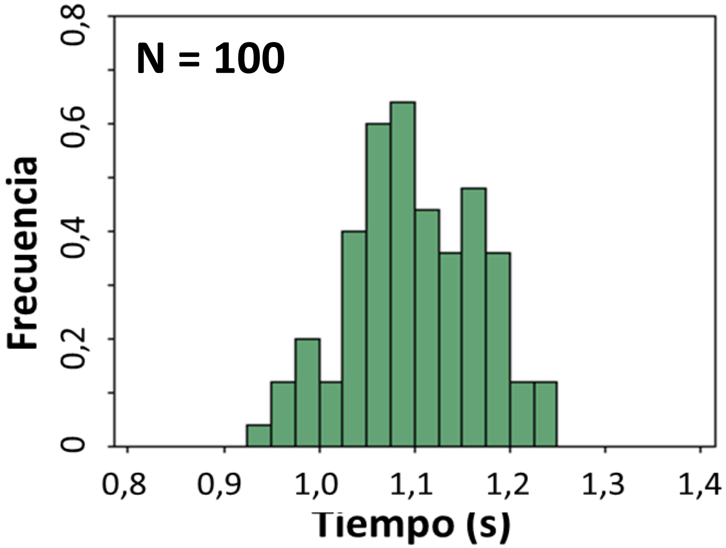
Para poder comparar Histogramas

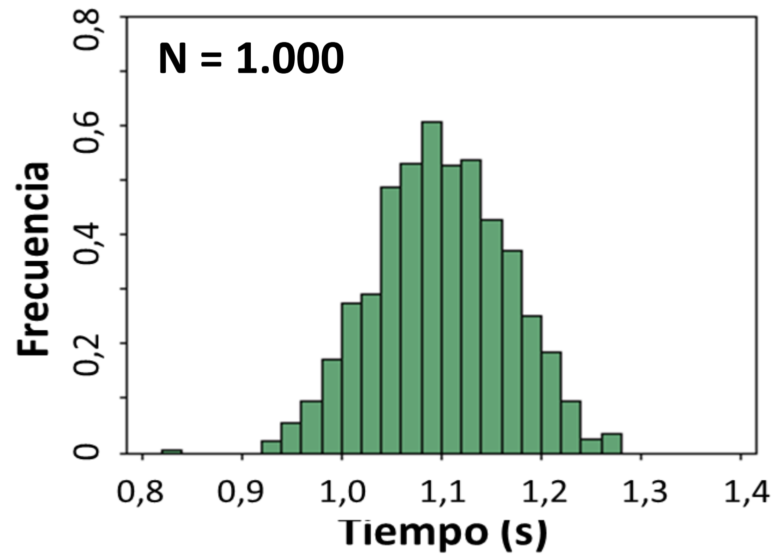
$$\frac{Nº\ Ocurrencias}{N} = Frecuencia$$



¿Si aumenta N?

Regla de Sturges $C = 1 + 3{,}322\,\log(N)$

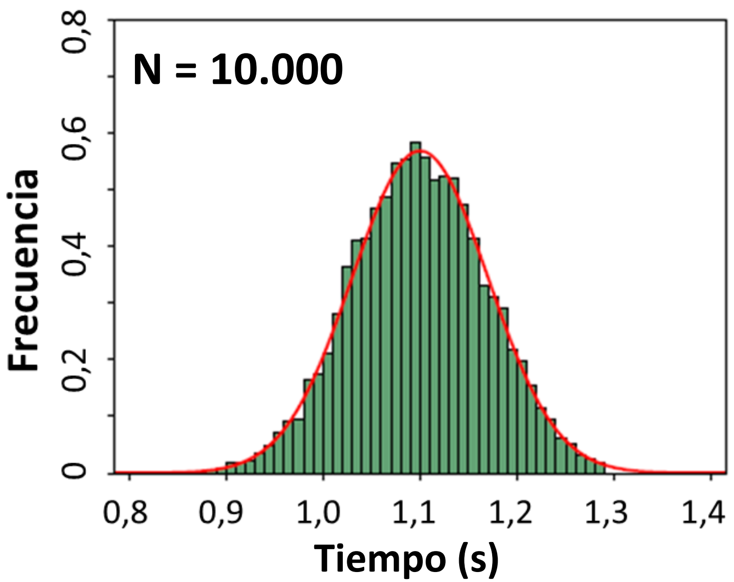




↑ N

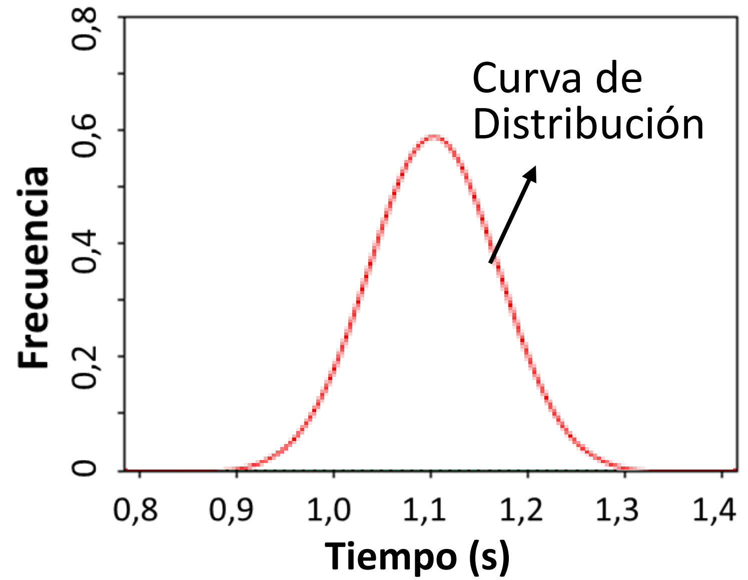
↑ C

↓ *a*



$N \to \infty$

$a \to dt$

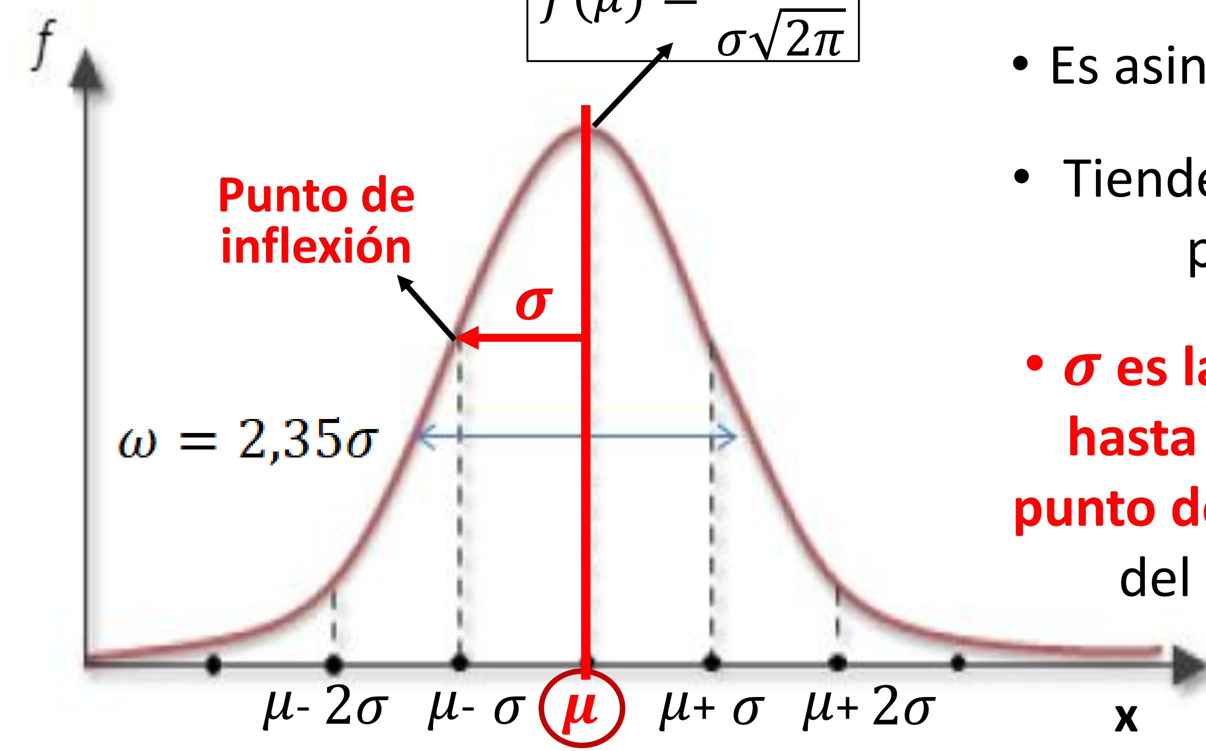


Función de distribución de Probabilidades

Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\boldsymbol{\mu})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\right)$$

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$



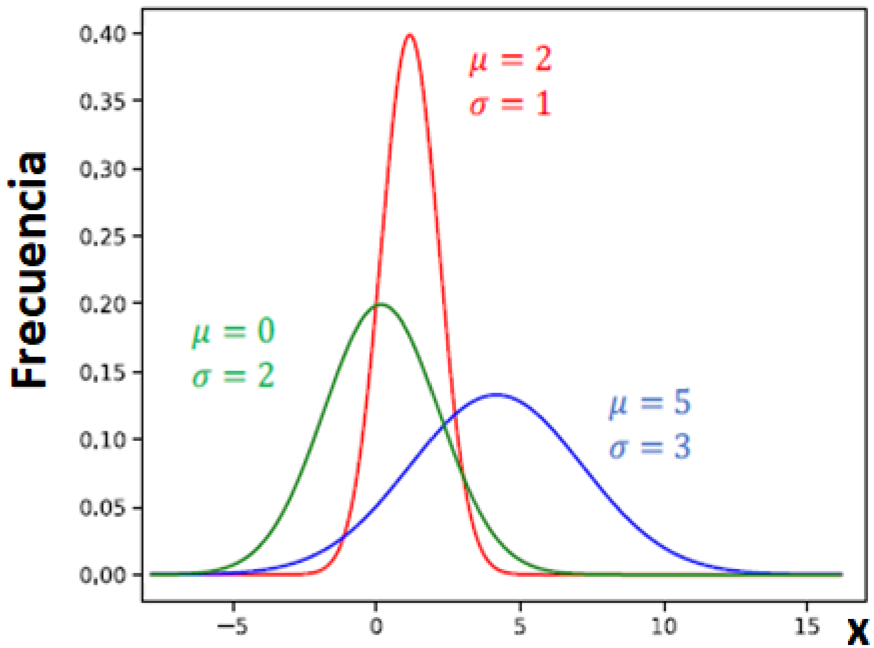
Algunas Propiedades

- **Está centrada en $x = \mu$** .
- Es simétrica respecto de su media
- Es asintótica al eje de abscisas
- Tiende exponencialmente a 0 para $|x-\mu| \gg \sigma$.
- **σ es la distancia de la media hasta la curva a la altura del punto de inflexión**, y da una idea del ancho de la curva de distribución.

Función de distribución de Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\boldsymbol{\mu})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\right)$$

Función de distribución de 3 Muestras

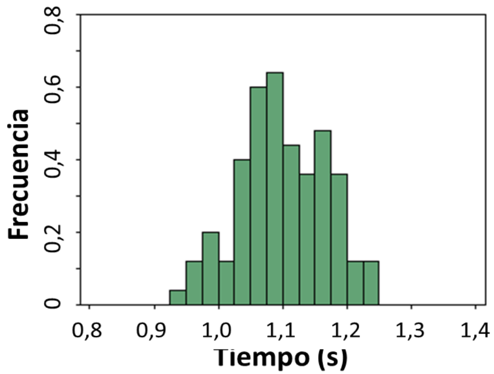


$\boldsymbol{\mu}$ Corrimiento en x hacia la derecha

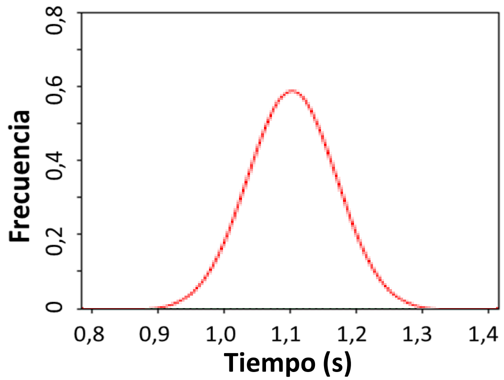
$\boldsymbol{\sigma}$ Aumento del ancho de la distribución. **Mayor dispersión de datos**

1 Serie de mediciones

Parámetros de la distribución



$N \to \infty$



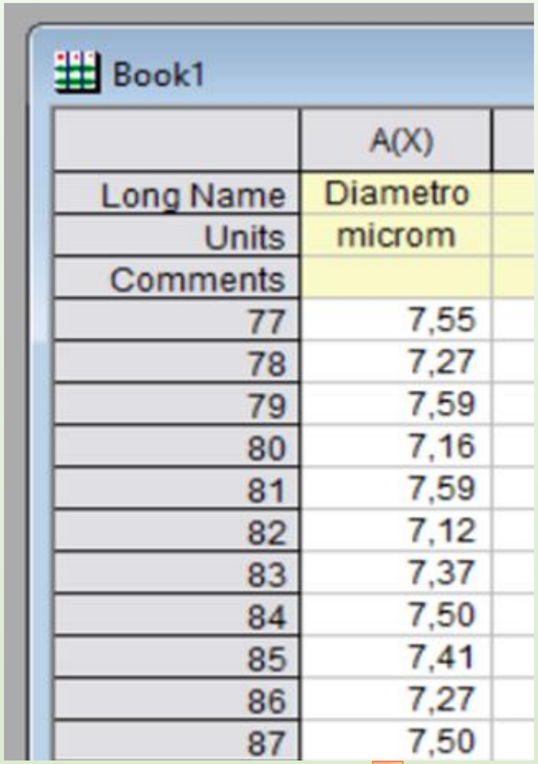
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \longleftrightarrow \quad \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$S = Desviación\ Estándar \quad \longleftrightarrow \quad \sigma$$

Análisis de estadístico

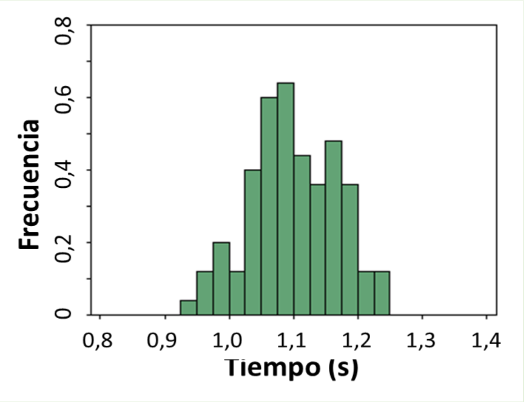
Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

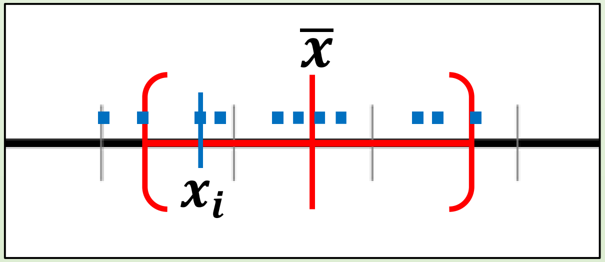
$$\boldsymbol{N = \{x_1, x_2, \ldots, xi, \ldots, x_N\}}$$



Book1

	A(X)
Long Name	Diametro
Units	microm
Comments	
77	7,55
78	7,27
79	7,59
80	7,16
81	7,59
82	7,12
83	7,37
84	7,50
85	7,41
86	7,27
87	7,50





$$\boldsymbol{\overline{x} = 7,29\ \mu m}$$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

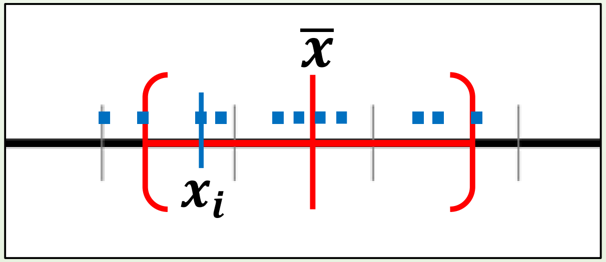
$$N = \{x_1, x_2, \dots, xi, \dots, x_N\}$$

$\bar{x} - x_i$ $\quad (\bar{x} - x_i)^2$

Book1

	A(X)	B(Y)	C(Y)
Long Name	Diametro	X-Xmedia	(X-Xmedia)^2
Units	microm	microm	microm^2
Comments			
77	7,55	0,26	0,07
78	7,27	-0,02	0,00
79	7,59	0,30	0,09
80	7,16	-0,13	0,02
81	7,59	0,30	0,09
82	7,12	-0,17	0,03
83	7,37	0,08	0,01
84	7,50	0,21	0,05
85	7,41	0,12	0,01
86	7,27	-0,02	0,00
87	7,50	0,21	0,04

$$\bar{x} = 7,29\ \mu m$$



VARIANZA: Dispersión cuadrática de los datos respecto del valor promedio

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

Desviación Estándar (S)

Error cuadrático medio

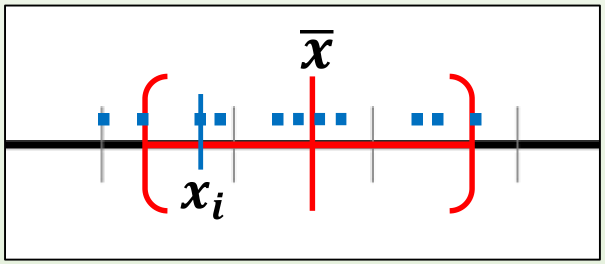
$$S = \sqrt{Var\,(x)}$$

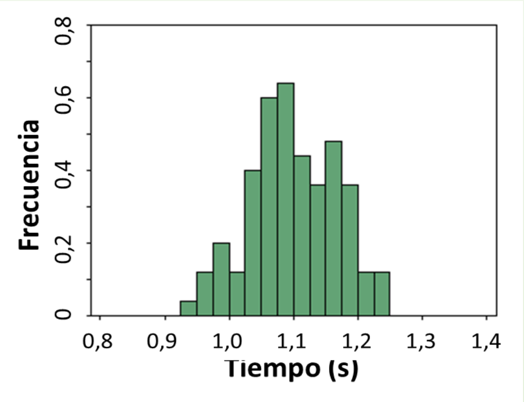
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$\boldsymbol{N = \{x_1, x_2, \ldots, xi, \ldots, x_N\}}$$





Valor más representativo: Promedio de los datos: $\bar{x}$

```
X = np.mean(x)
print("El valor medio es =", X, "s")
```

```
El valor medio es = 32.54231578947369 s
```

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Análisis de estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$\boldsymbol{N} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{xi}, \dots, \boldsymbol{x_N}\}$$

VARIANZA: Dispersión cuadrática de los datos respecto del valor promedio

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

```
C=np.var(x)
print("La varianza es =", C)
```

```
La varianza es = 0.010171163434903046
```

Desviación Estándar (S)

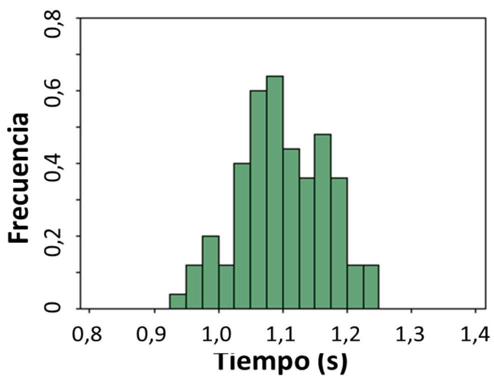
$$\boldsymbol{S} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

```
S=np.std(x)
print("La desviación estándar es S =", S, "s")
```

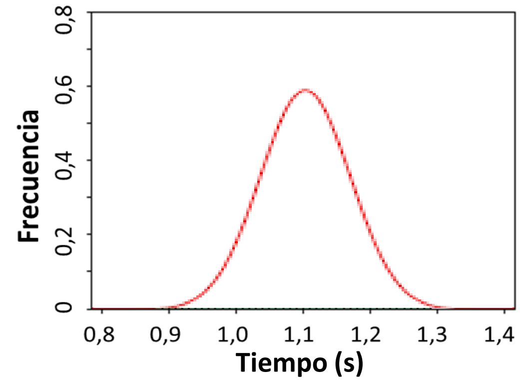
```
La desviación estándar es S = 0.10085218606903396 s
```

1 Serie de mediciones

Parámetros de la distribución



$N \rightarrow \infty$



$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \longleftrightarrow \quad \mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

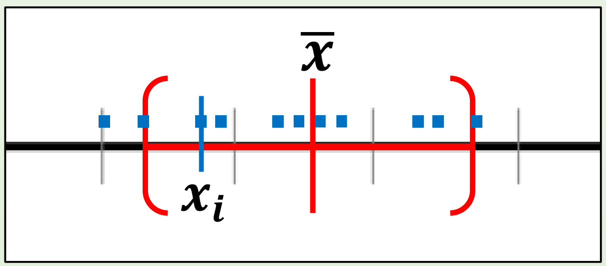
$$\text{VAR (x)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N} \quad \longleftrightarrow \quad \text{VAR (x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

$$S = \sqrt{VAR\ (x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}} \quad \longleftrightarrow \quad \sigma = \sqrt{VAR\ (x)}$$

Análisis estadístico… hasta ahora

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$\{x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_N\}$$



Promedio

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

VARIANZA

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

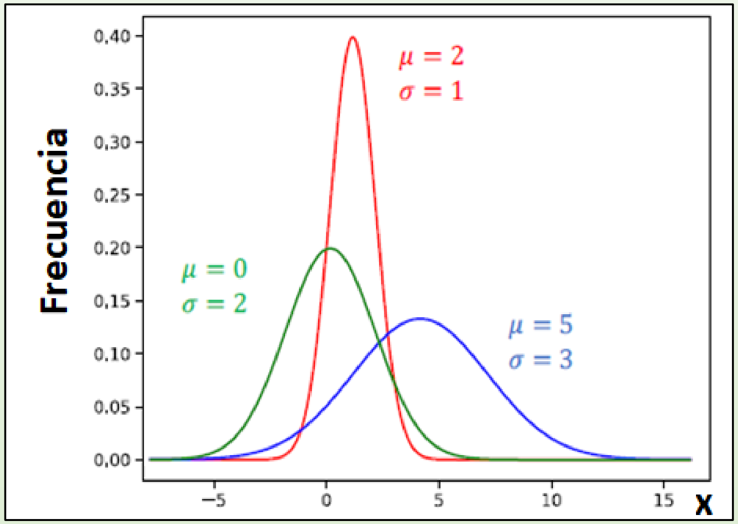
Desviación Estándar (S): Error cuadrático medio de una serie

$$S = \sqrt{Var\,(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Desviación estándar y sus usos ….

Comparación: ¿Quién mide en forma más precisa?

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$



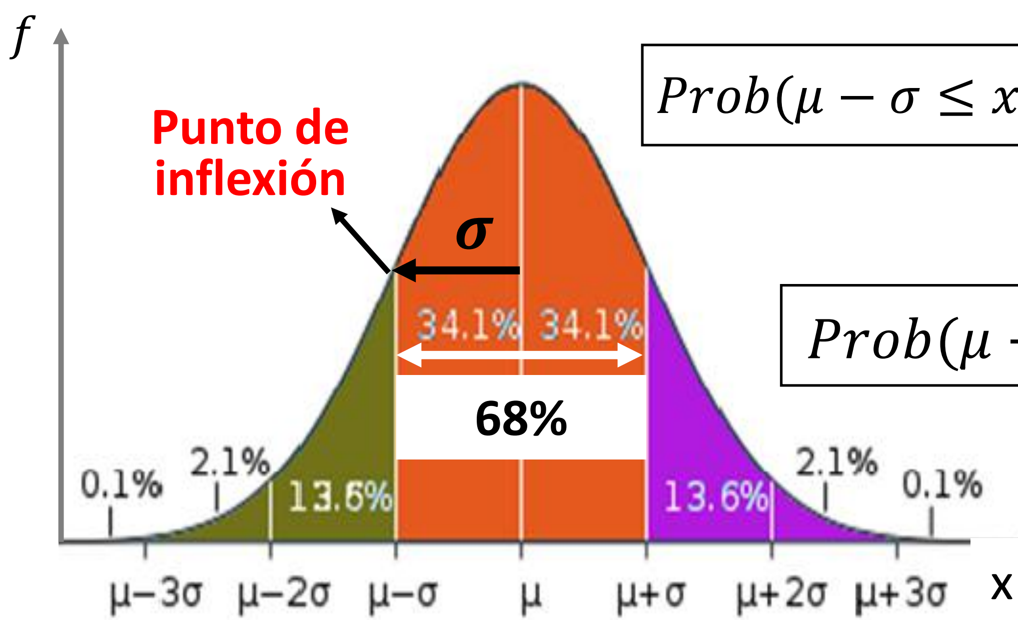
Un MENOR valor de *S* representa MAYOR PRECISIÓN EN LA FORMA DE MEDIR

Desviación estándar y sus usos ….

Si tomamos 1 NUEVA MEDIDA x_i, ésta tendrá una probabilidad de encontrarse en el intervalo de confianza $[\overline{x} - S, \overline{x} + S]$ con ~ 68%

¿Por qué? Volviendo a Guass …

$$Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx$$



$$Prob(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) \cong \mathbf{0,6827}$$

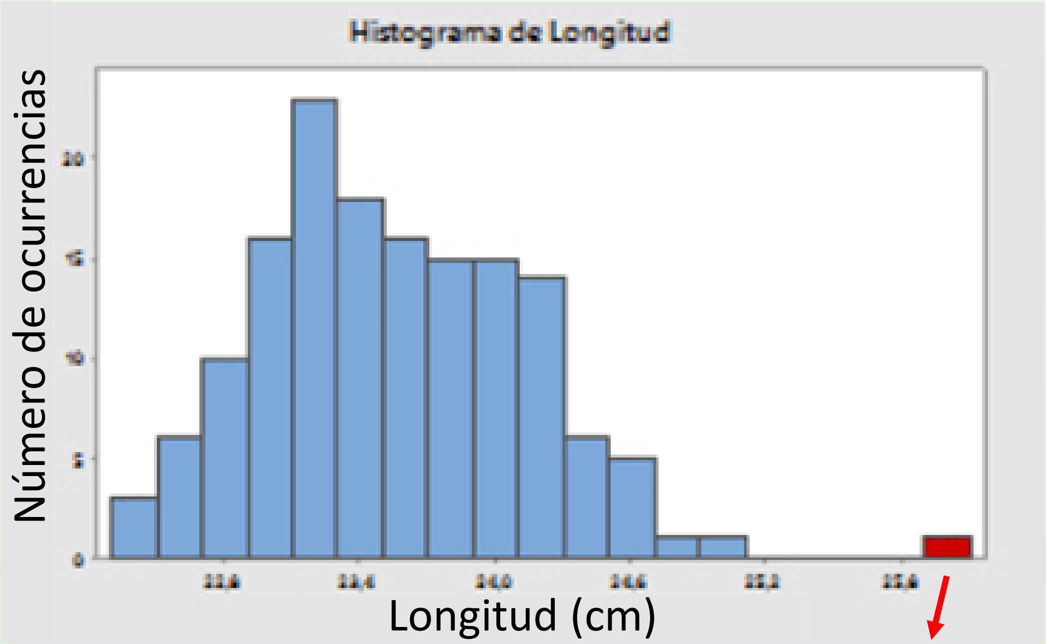
~ 68%

$$Prob(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \cong \mathbf{0{,}95}$$

Mayor a 3σ (o 3S para nosotros) es muy baja la probabilidad!!!

$$Prob(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) \cong \mathbf{0{,}99}$$

Cuánta info me da un Histograma!

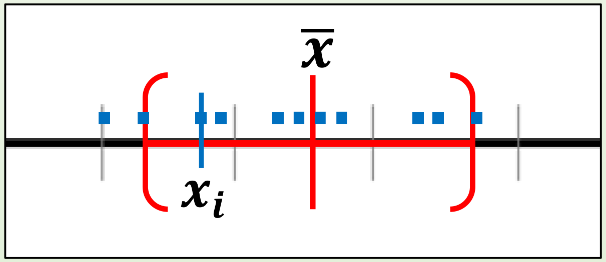


Medida “raras”

Análisis estadístico… hasta ahora

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$$



Promedio

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

VARIANZA

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

Desviación Estándar (S): Error cuadrático medio de una serie

$$S = \sqrt{Var\,(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

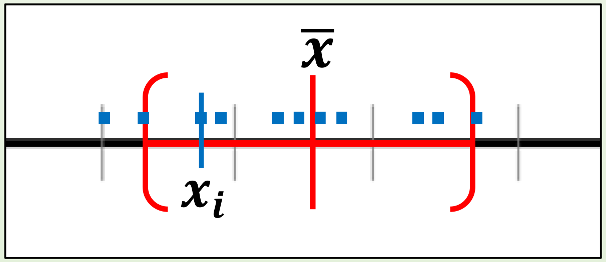
$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}$$

¿Y Cómo calculamos Δx?

Análisis estadístico

Tomamos N mediciones de una variable aleatoria:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$$



Promedio

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

VARIANZA

$$VAR\,(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

Desviación Estándar (S): Error cuadrático medio de una serie

$$S = \sqrt{Var\,(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Error Estadístico (σ_e): Error cuadrático medio del Promedio

$$\Delta x = \sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

¿Por qué usar el error estadístico?

Varias Series de mediciones

Teorema del Límite Central (TLC)

- ✓ Si el numero de datos es suficientemente grande, como para tener definido el proceso estadístico, entonces

$$\boldsymbol{S_{x1} \cong S_{x2} \cong S}$$

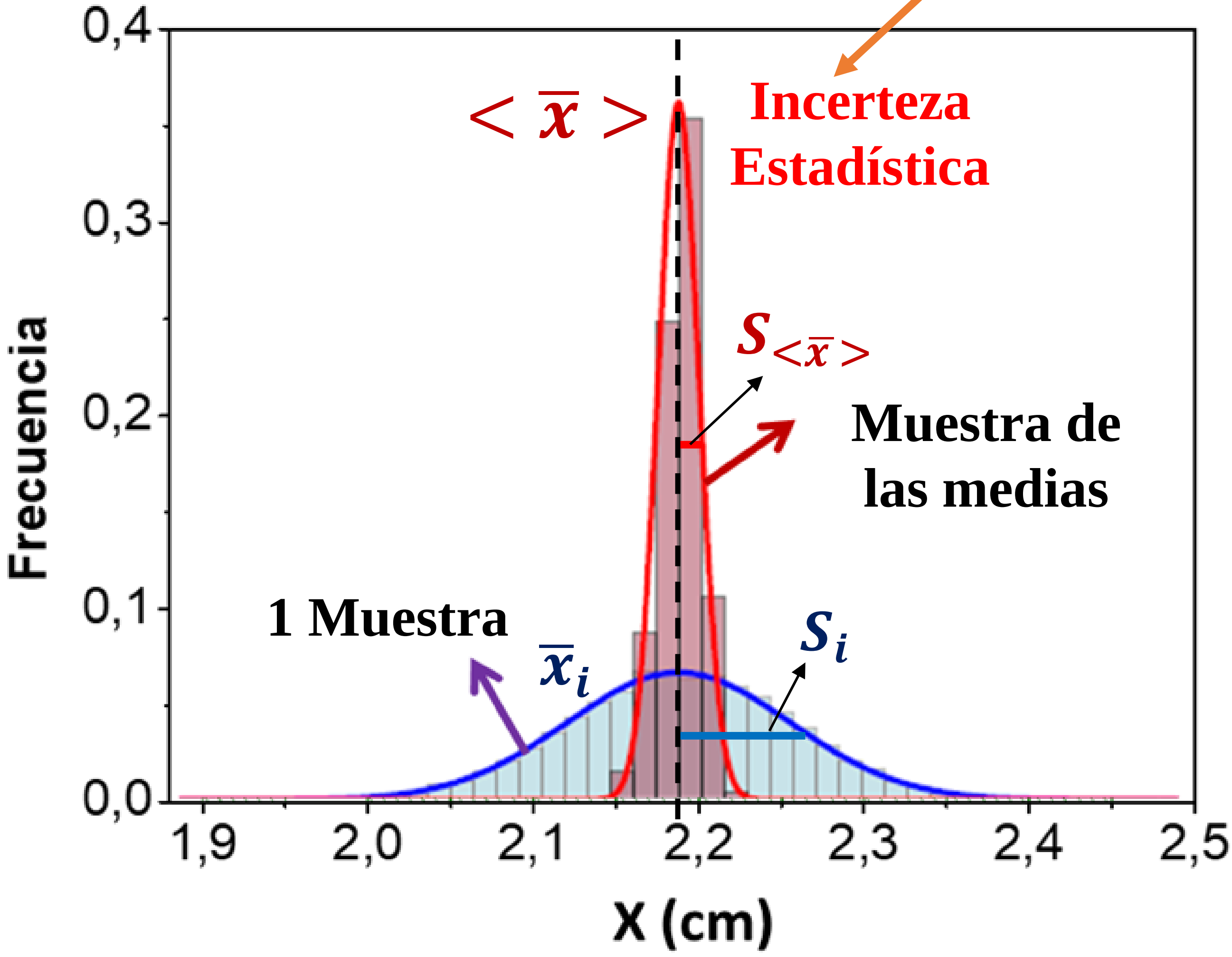
- ✓ **Los valores promedios $\bar{x}_i$ de las diferentes muestras de N datos** cada una, **van a seguir una distribución gaussiana,** centrada en: $<\bar{\chi}>$

$$\boxed{S_{<\bar{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e}$$

Teorema del Límite Central (TLC)

$$\boldsymbol{S_{x1} \cong S_{x2} \cong S}$$

$$S_{<\overline{x}>} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sigma_e$$



En general se toma una única muestra de N medidas …

Se **toma como hipótesis** que bajo las mismas condiciones experimentales, aunque se tome 1 serie de mediciones, se cumple TLC. Entonces:

Valor más representativo

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Desviación Estándar

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Error del promedio

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}$$

Si tomo N medidas:

Δx será igual al que resulte mayor entre σ_e y σ_{ap}

Si realizamos 1 NUEVA SERIE DE MEDIDAS, la probabilidad de encontrar el valor más representativo $\bar{x}_i$ de la nueva serie en el intervalo de confianza $[\bar{x} - \sigma_e, \bar{x} + \sigma_e]$ será de ~ 68%

Desviación estándar y sus usos ….

¿Cuál va a ser el error de cada medida de la muestra general?

13,10 s	13,19 s	13,16 s
13,14 s	13,15 s	13,11 s
13,20 s	13,21 s	13,16 s

El error de cada medida es S, no σ_{ap}

Si tomamos una nueva medición x_i, la incerteza de ese nuevo dato será S

El error del promedio

$$\sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

que en la práctica es:

$$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Está en todos los libros de estadística.

```
Dx=S/np.sqrt(len(x))
print("El error del promedio es Dx =", Dx, "s")
```

```
El error del promedio es Dx = 0.02313707827947787 s
```

Expresión del resultado $\boxed{T = (\bar{T} \pm \sigma_e)\ Ud.}$

```
print("El resultado de la medición fue: T =", f'({X:.3f} ± {Dx:.3f}) s')
```

```
El resultado de la medición fue: T = (32.542 ± 0.023) s
```

En general se toma una única muestra de N medidas …

Valor más representativo	Desviación Estándar Error de una medida	Error del promedio
$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$	$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N}}$	$\sigma_e = \frac{S}{\sqrt{N}}$

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unidades}$$

Si tomo N medidas:

Δx ***será igual al que resulte mayor entre*** $\boldsymbol{\sigma_e}$ ***y*** $\boldsymbol{\sigma_{ap}}$

- **Si tomamos 1 NUEVA MEDIDA, la probabilidad de encontrarla en el intervalo de confianza** $[\overline{x} - S, \overline{x} + S]$ **será de ~ 68%**

- **Si realizamos 1 NUEVA SERIE DE MEDIDAS, la probabilidad de encontrar el valor más representativo** $\overline{x_i}$ **de la nueva serie en el intervalo de confianza confianza** $[\overline{x} - \sigma_e, \overline{x} + \sigma_e]$ **será de ~ 68%**

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 2

Período de un Péndulo de (70,0 ± 0,1) cm de longitud

- **1 integrante del grupo!!** Obtenga **200 medidas** tomando **5 series de 40 mediciones cada una**.

- **Realicen 4 Histograma** manteniendo el rango del eje X y del eje Y usando **Frecuencia:** 1) N = 40, 2) N = 80, 3) N = 120, 4) N = 200. Comparación *¿Depende de N la forma, el centro, y/o el ancho de los histogramas? ¿Presentan una forma similar a la de una distribución Gaussiana?*
- Hagan **1 Figura superponiendo** los **histogramas** de N = 40 y N =200. Así verán claramente las diferencias!

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 2

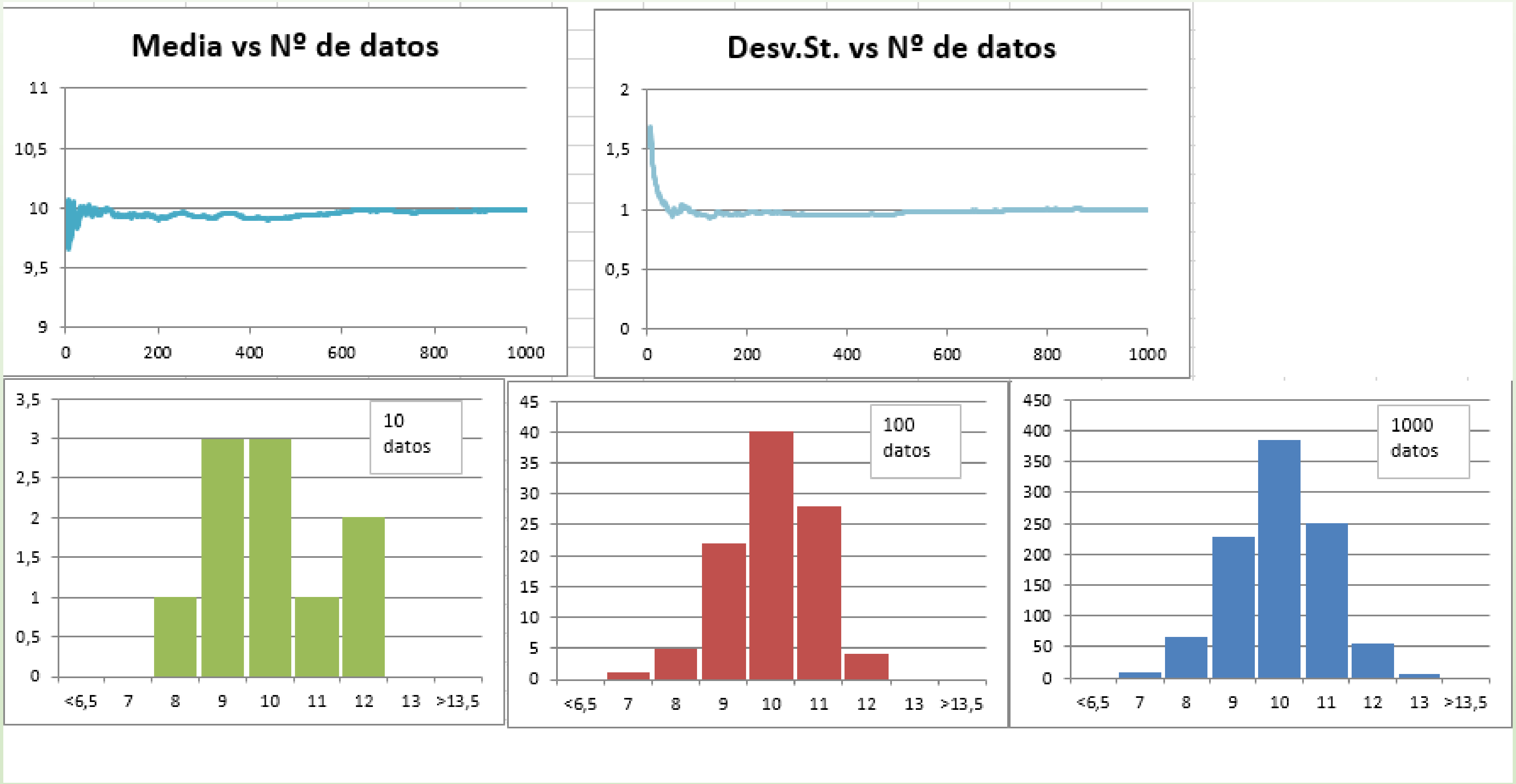
Período de un Péndulo de (70,0 ± 0,1) cm de longitud

- Utilicen grupos de N = 20, 30, 40, …, 200 y calculen, para cada grupo, el valor más representatico $\overline{\boldsymbol{T}}$ y la desviación estándar $\boldsymbol{S}$.
  ¿Parece depender $\overline{\boldsymbol{T}}$ o $\boldsymbol{S}$ de ***N****?*
- Intenten hacer un gráfico de puntos de $\overline{\boldsymbol{T}}$ en función de ***N*** y otro de $\boldsymbol{S}$ en función de ***N***. ¿Observan una clara dependencia?

- **Calculen el RESULTADO del período del péndulo:** $\boldsymbol{T = (\overline{T} \pm \Delta T)\ Ud}$

considerando que **N = 200** es representativo para su experimento. Exprese el resultado con **2 cifras significativas**. *¿Qué hipótesis se debe cumplir para poder asumir que $\Delta T = \sigma_e$? ¿Creen que la cumplieron?*

Cómo dependen el valor más representativo y la desviación estándar del número de mediciones



ENTREGA 2 MARTES 08-4 HASTA LAS 12 H

Usar el Formato de la Entrega 1

- **Figura 1:** Los 4 Histogramas de N = 40, 80, 120, 200.

Discutir: *¿depende de N la forma, el centro, el ancho de los histogramas?*

- **Figura 2:** Los Histogramas superpuestos de N = 40 y N = 200.

- **Figura 3:** Resultados de S en función de N para N = 20, 30, 40, …, 200.
  Figura 4: Resultados de $\overline{T}$ en función de N para N = 20, 30, 40, …, 200.
- **Discutir las Figuras 3 y 4:** *¿dependen de N estos dos parámetros estadísticos? A partir de qué valor de N puede considerar que cumple con el teorema central del límite?*

- **Expresión del resultado del período del péndulo T (usando N=200) con 2 cifras significativas**. *Discutir si consideran que se cumplió con la hipótesis para expresarlo así.*