Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Laboratorio 1

1er Cuatrimestre 2025

Laboratorio 1C: martes 14-20 hs

Lucía Famá, Federico Trupp, Camila Borrazás,
Juan Sangiorgio, Lara Barreiro

REPASO

Mediciones Indirectas (MI)

Valor de una MF determinada en forma indirecta

$$\boxed{\boldsymbol{W = f(x, y, z, \dots)}} \longrightarrow \boxed{W = (W_0 \pm \Delta W)\ Ud.}$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x)\ Ud.$$

$$y = (y_0 \pm \Delta y)\ Ud.$$

$$z = (z_0 \pm \Delta z)\ Ud.$$

$$\vdots$$

x, y, z … variables independientes

$$\boxed{W_0 = f(x_0, y_0, z_0, \dots)}$$

$$\boxed{\Delta W = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}\right|_{x_0, y_{0,\dots}}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\left.\frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y}\right|_{x_0, y_{0,\dots}}\right)^2 \Delta y^2 + \dots}}$$

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Obtener el valor de π mediante diferentes métodos

¿Cómo podemos proseguir para obtener una MF?

- ✓ **1ero:**

SIEMPRE hay que buscar las LEYES FÍSICAS que conozcamos QUE CONTENGAN LA MF que deseamos calcular.

- ✓ **2do:**

Buscar CUÁL O CUÁLES PUEDAN APLICARSE con el equipamiento con el que contamos

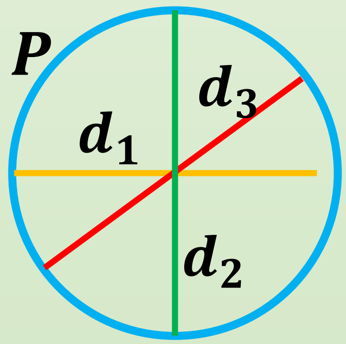
¿Cuánto vale π? ¿Cómo podemos calcularlo?

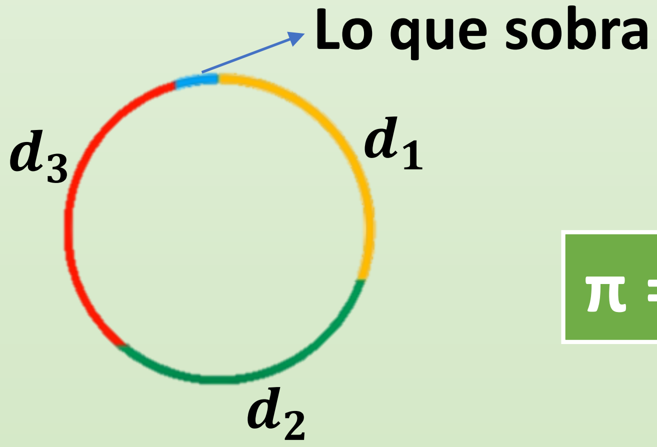
1ero: **BUSCO UNA LEY FÍSICA QUE RELACIONE A π CON VARIABLES QUE PUEDA MEDIR O ADQUIRIR**

Conceptos básicos:

- Circunferencia C = Perímetro del círculo P
- Diámetro d

π es el número de veces que entra d en C





π = 3,1416 …

¿Cuánto vale π? ¿Cómo podemos calcularlo?

π es el número de veces que entra d en C

$$\boxed{P = \pi d}$$

¡Esto ocurre independientemente del diámetro del círculo!!

¡Se puede calcular π para cualquier círculo!

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Obtener π mediante diferentes métodos

<u>Método 1</u>: Obtener **π a partir de calcular d y P de una superficie circular** y empleando **la ecuación (1)**:

$$P = P_0 \pm \Delta P \qquad d = d_0 \pm \Delta d$$

$$\boxed{P = \pi d \quad (1)} \Rightarrow \boxed{\pi = \frac{P}{d}} \qquad \pi = \pi_0 \pm \Delta\pi$$

¿Qué tipo de medición es?

¿Cómo calculo $\Delta\pi$?

Objetivo de la clase de hoy

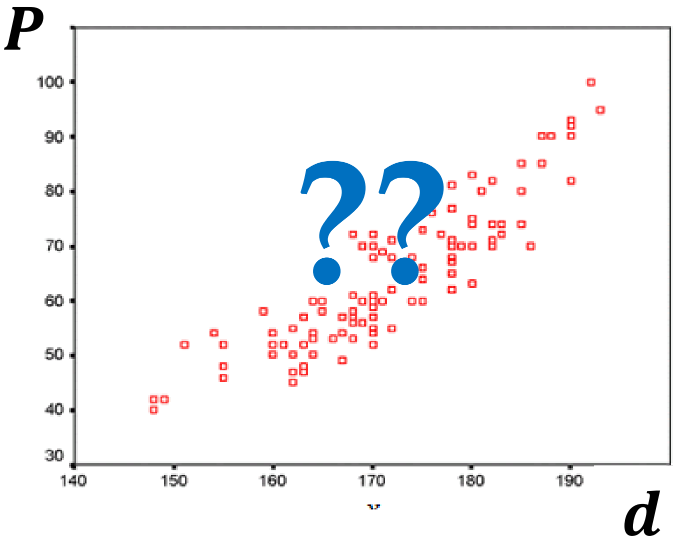
Analizar la **relación entre dos magnitudes** y buscar modelos que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza - **Modelado**

¿Cómo es la relación funcional entre P y d?

$$P_1 = P_0 \pm \Delta P \qquad d_1 = d_0 \pm \Delta d$$

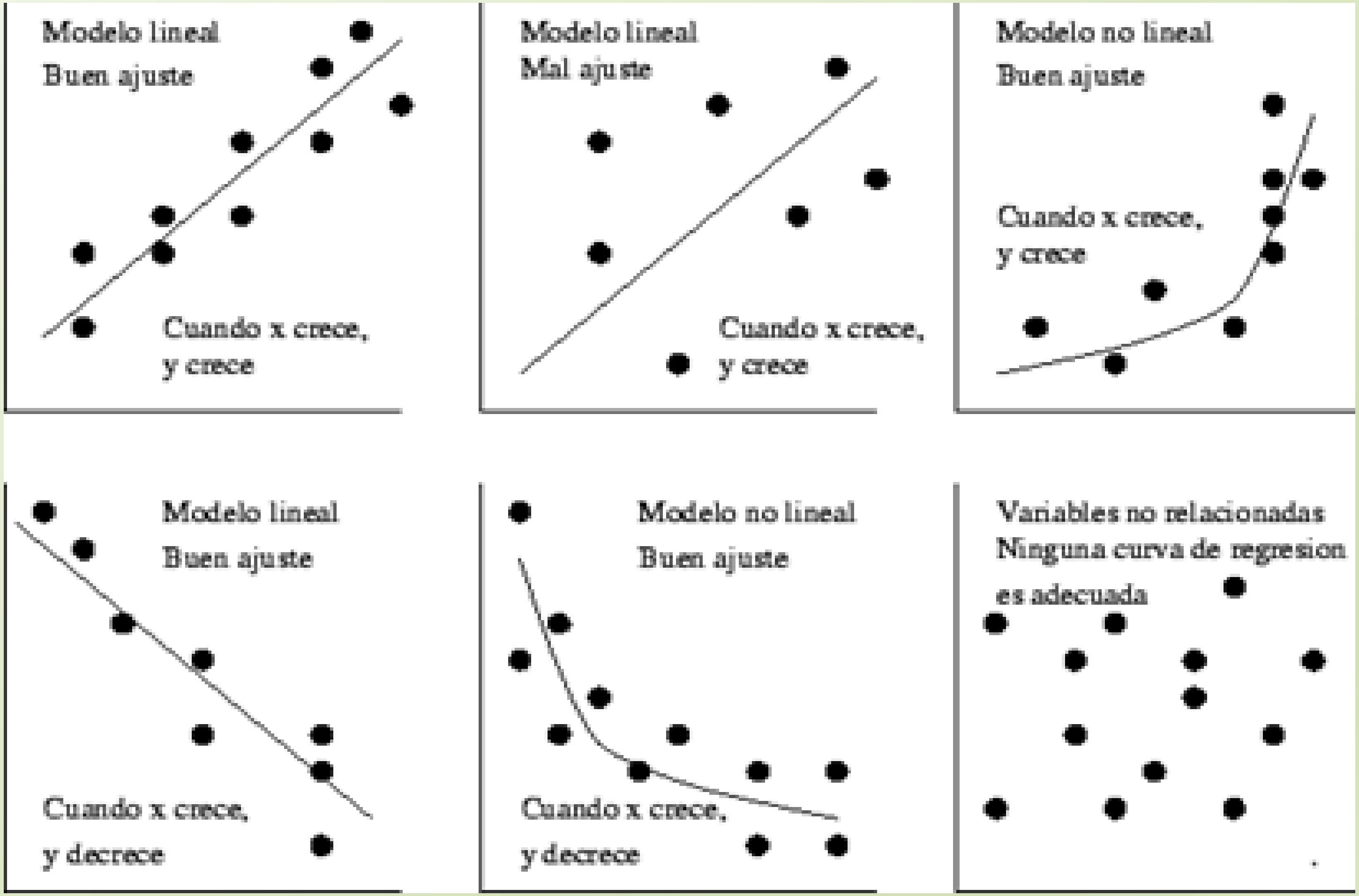
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$P_{10} = P_0 \pm \Delta P \qquad d_{10} = d_0 \pm \Delta d$$



Método de Cuadrados Mínimos

Relación entre dos variables usando un Modelo Matemático



Objetivo de la clase de hoy

Analizar la **relación entre dos magnitudes** y buscar modelos que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza - **Modelado**

Objetivo Particular de la práctica de hoy

Determinar $\boldsymbol{\pi}$ **a partir del cálculo del diámetro y del perímetro de diferentes objetos con superficie circular** empleando UN **MODELO LINEAL del MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS**

Objetivo de la clase de hoy

Analizar la **relación entre dos magnitudes** y buscar modelos que puedan aproximar datos medibles de la naturaleza - **Modelado**

¿Por qué modelar?

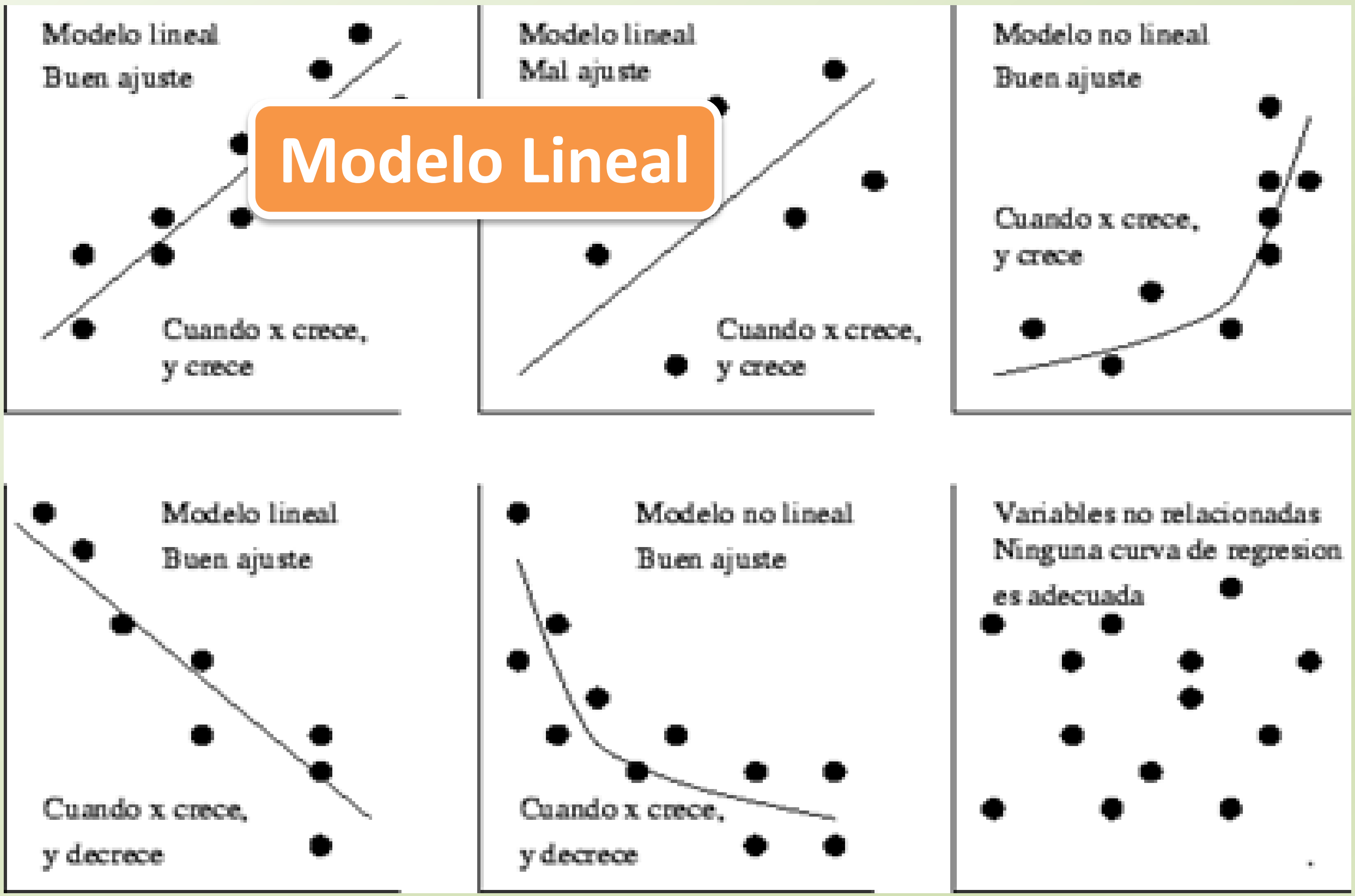
Se puede observar la relación entre variables.

Se puede realizar predicciones para MF de alcance no posible.

El resultado es más representativo del sistema que tomar un único caso.

MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS

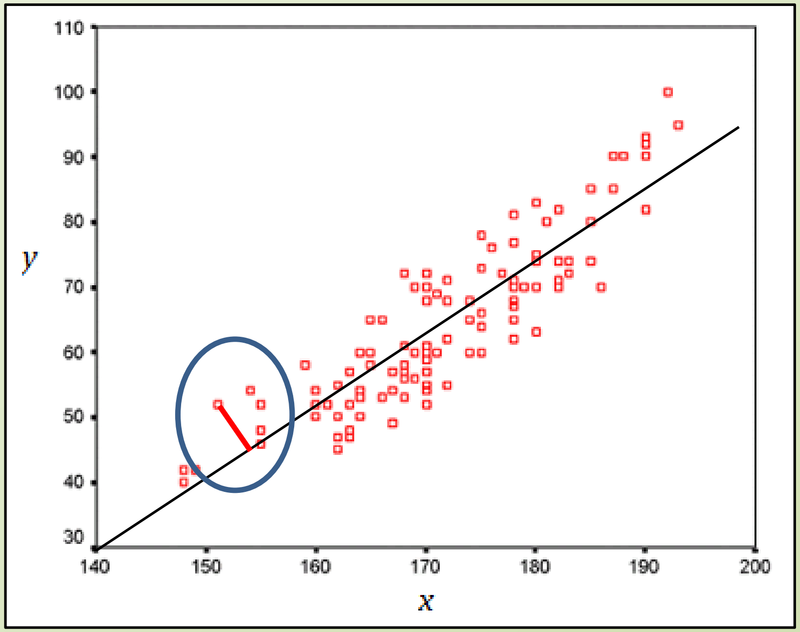
Relación entre dos variables:
Modelo Matemático más sencillo



Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

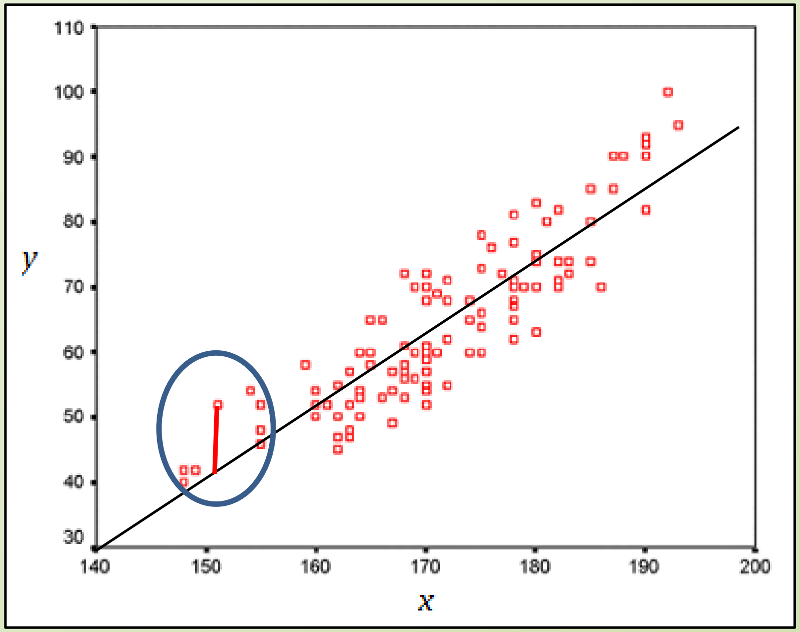
$$y = mx + b$$

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas **(x_i, y_i)**



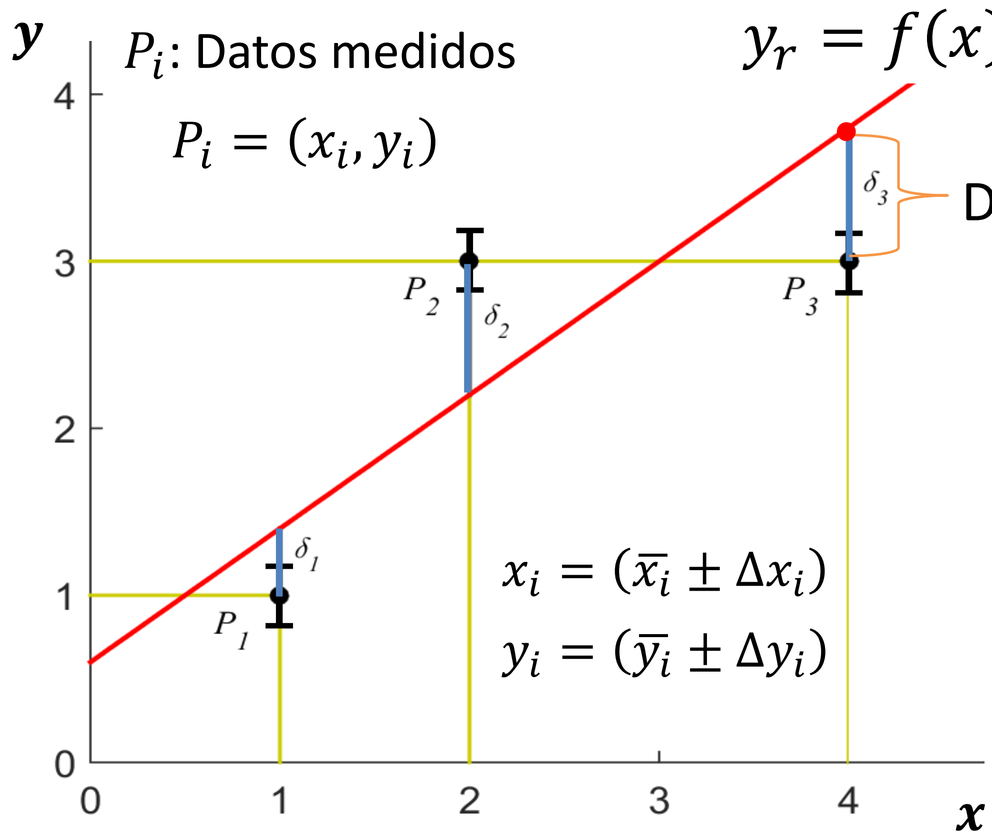
Partamos asumiendo que la relación es:

$$y = mx + b$$

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo en el eje "y"

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Considerando la **Distancia en "y"**



Hipótesis:

$$\varepsilon_{ry} \gg \varepsilon_{rx}$$

$$\varepsilon_{ry} = \left|\frac{\Delta y}{y_o}\right|$$

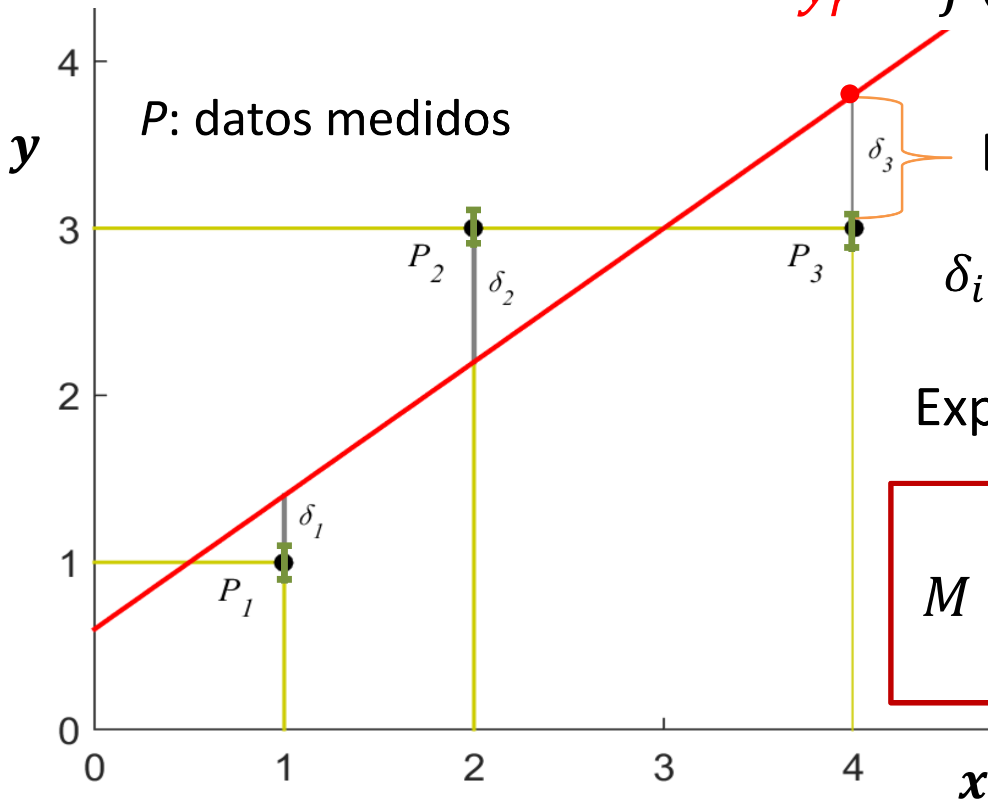
D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2

Caso A

Cuadrados mínimos **NO Ponderados**

Cuando todos los datos en "y" tienen igual incerteza

$$y_r = f(x) = mx + b$$



Distancia ➡ **Residuos** (δ_i)

$$\delta_i{}^2 = [y_i - y_r]^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Experimental   Recta

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{N} \delta_i{}^2 = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2}$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

¿Cómo encontramos los parámetros m y b?

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$M(a,b) = \sum_i {y_i}^2 + a^2 \sum_i {x_i}^2 + Nb^2 + 2ab \sum_i x_i - 2a \sum_i x_i y_i - 2b \sum_i y_i$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a \sum_i {x_i}^2 + 2b \sum_i x_i - 2 \sum_i x_i y_i = 0 \\ 2Nb + 2a \sum_i x_i - 2 \sum_i y_i = 0 \end{cases}$$

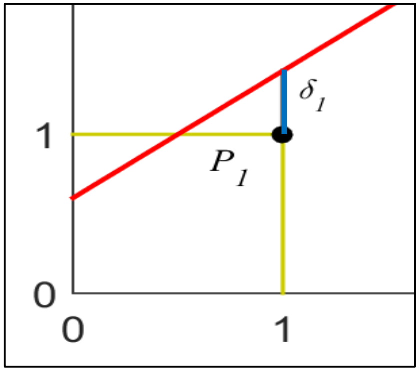
$$m = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

¿Cómo encontramos S_m y S_b?

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

Propagación de errores!! → *D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2*



Estamos evaluando la incerteza en el eje y

→ *Hipótesis:* Consideremos a la incerteza como δ_i

$$S_m = S_y \sqrt{\frac{N}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$S_b = S_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}} \dashrightarrow S_y = \sqrt{\frac{\sum {\delta_i}^2}{N-2}}$$

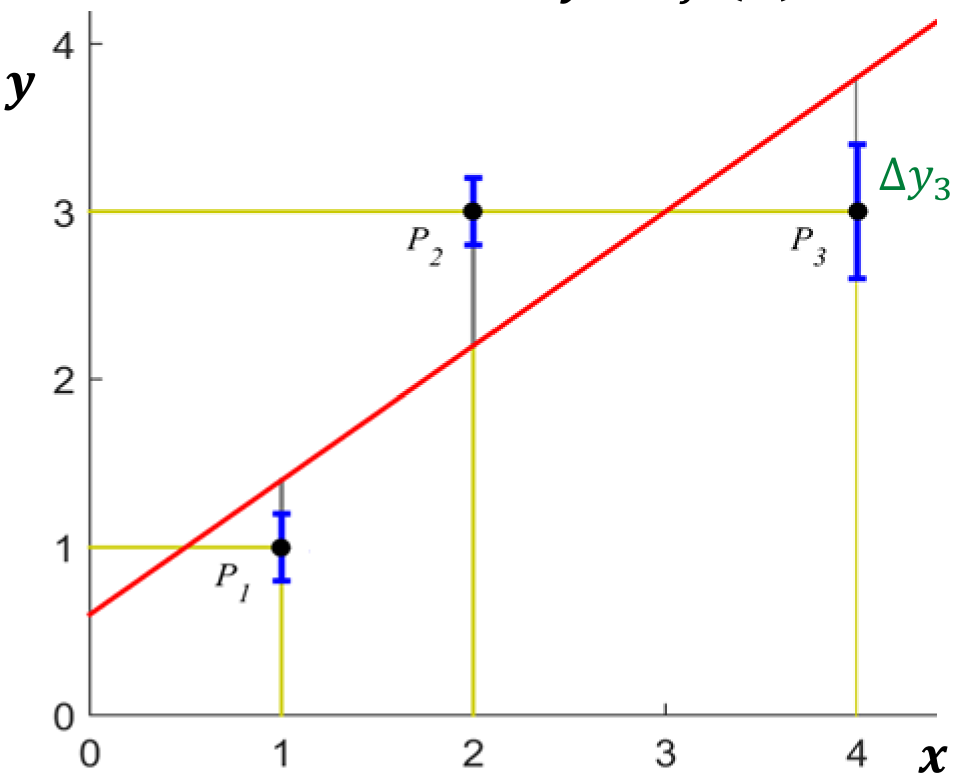
Válido cuando todas las medidas de y tienen igual precisión

Caso B

Cuadrados mínimos **Ponderados**

Cuando todos los datos en "*y*" tienen diferente incerteza

$$y = f(x) = mx + b$$

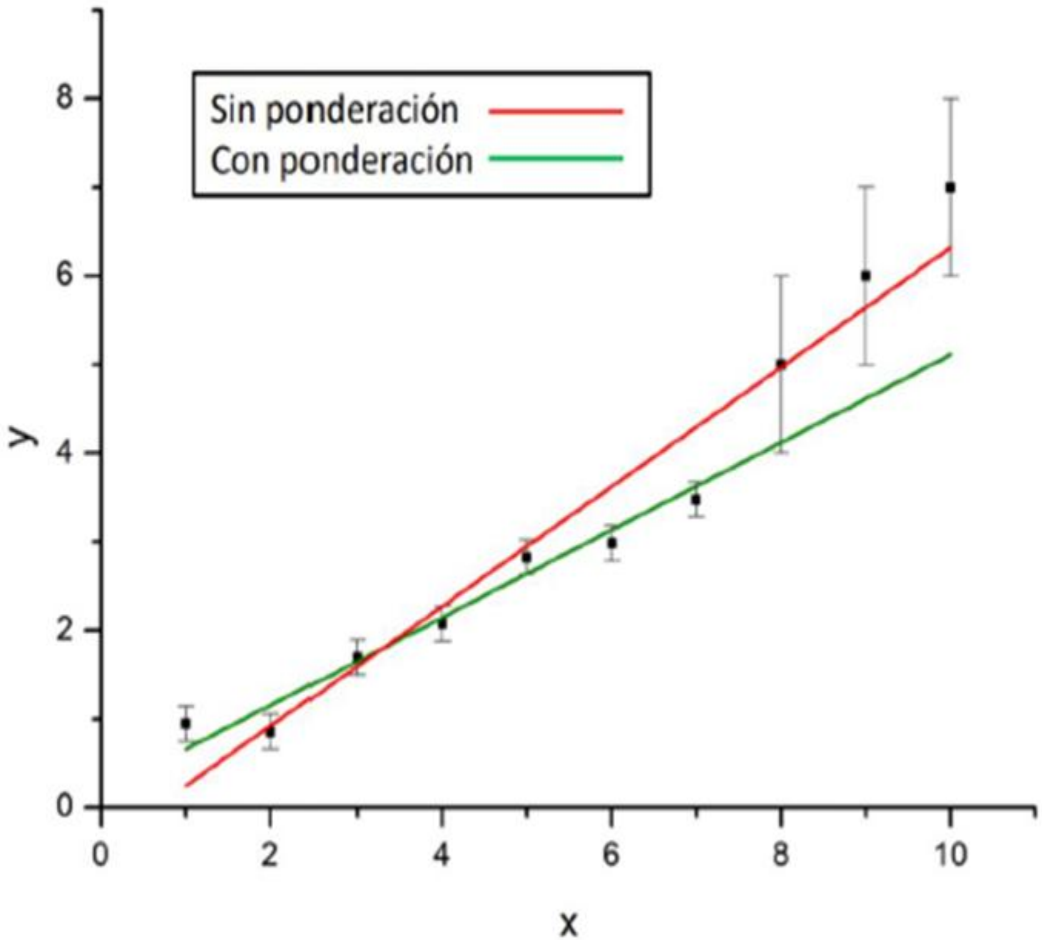


Hipótesis: **Considera a las medidas más precisas las más relevantes**

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos
Normalizados al error de cada medida

SIN Ponderación vs CON Ponderación



SIN

$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

ACTIVIDAD

EXPERIMENTO

Exp. 4

Obtener π mediante diferentes métodos

Método 2: Obtener el valor de π **a partir de calcular** d **y** P **de 10 DIFERENTES superficies circulares y usando un modelo lineal del método de cuadrados mínimos.**

$$P_1 = P_0 \pm \Delta P \qquad d_1 = d_0 \pm \Delta d$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$P_{10} = P_0 \pm \Delta P \qquad d_{10} = d_0 \pm \Delta d$$

EXPERIMENTO

Exp. 4

ACTIVIDAD

Método 2:

- **Figura 1: SOLO PARA OBSERVAR, NO PARA MODELAR:** Graficar $\boldsymbol{P}$ **en función de** $\boldsymbol{d}$ (gráfico de puntos con incertezas). *¿Qué forma parece tener la función graficada?*
- Determinar los **errores relativos** $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ de las variables a graficar ($\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{d}$) y definir qué variable presenta mayor ε_r. *¿En qué eje la graficarán?*
- **Figura 2:** Hacer un gráfico empleando la variable con mayor ε_r en el eje "y", y aplicar un modelo lineal del método de cuadrados mínimos: $y = ax + b$. Expresar los resultados de a y de b. *¿Pueden decir que b resultó nula? ¿Era lo esperable?*
- **Obtener el valor de $\boldsymbol{\pi}$ a partir de los resultados del modelo y** compararlo con el calculado en el Método 1 y con el de la calculadora: diferencias significativas, precisión y exactitud.

AYUDA: Si $\varepsilon_{rP} \gg \varepsilon_{rd}$

Debo graficar $\boldsymbol{P}$ **en función de** $\boldsymbol{d}$

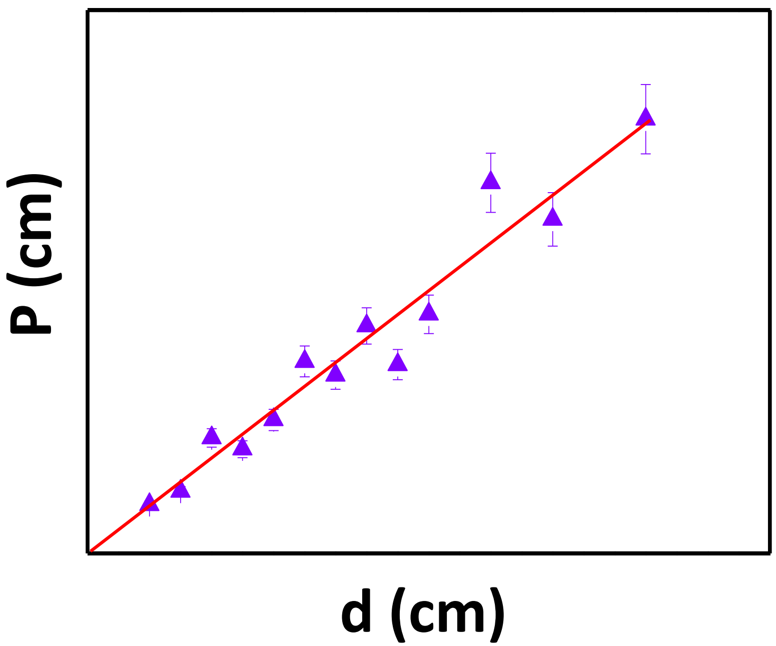
$$P = \pi d$$

y x

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$\pi = m \longrightarrow \bar{\pi} = \bar{m}$

¿ $\Delta\pi$?



EXPERIMENTO

Exp. 4

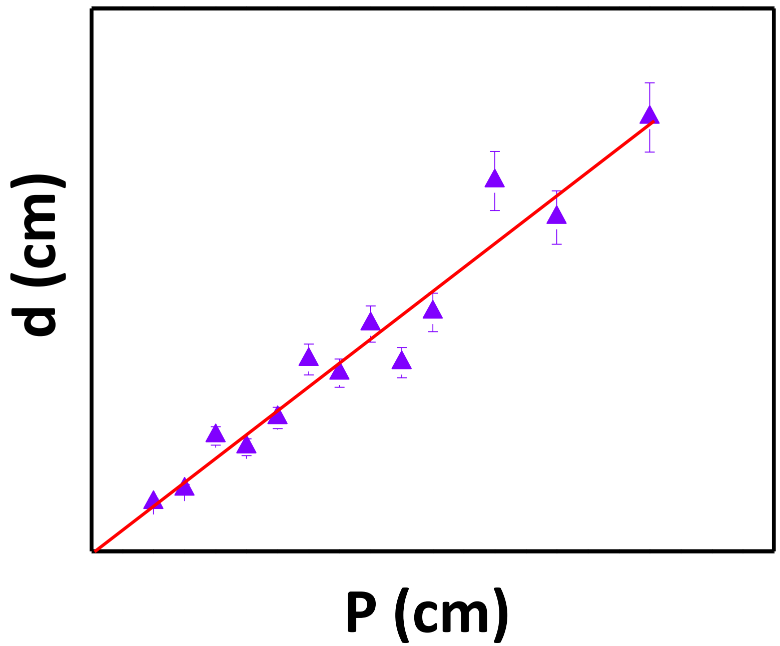
AYUDA: Si $\varepsilon_{rd} \gg \varepsilon_{rP}$

Debo graficar P **en función de** d

$$d = \frac{P}{\pi} \Rightarrow \underset{y}{d} = \frac{1}{\pi}\underset{x}{P}$$

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{1}{\pi} \qquad \boxed{\pi = \frac{1}{m}} \longrightarrow \bar{\pi} = \frac{1}{\bar{m}}$$



¿ $\Delta\pi$? **Propago!!** $\Delta\pi = \sqrt{\left|\frac{\partial\pi}{m}\right|^2_{m_o} \Delta m^2} = ???$