Universidad de Buenos Aires - Exactas
departamento de física

Laboratorio 1

2° Cuatrimestre 2025

Laboratorio 1C: martes 14-20 hs

Lucía Famá
Gabriel Paciaroni
Lucía Mazaira
Facundo Sánchez Oyarbide

REPASO DE LA CLASE PASADA …

NUESTRO OBJETIVO!!!

Obtener una expresión VÁLIDA del resultado de una MF

$$x = (\overline{x} \pm \Delta x) \text{ Unidad}$$

Clase de Medición

$\overline{x}$: Valor más representativo (x_0)

Δx: Incerteza Absoluta → **Fuentes de incertezas**

- **Mediciones Directas (MD)**
- **Mediciones Indirectas (MI)**

Mediciones Indirectas (MI)

Resultado de una MF determinada en forma indirecta

$$\boldsymbol{W = f(x, y, z, \dots)} \rightarrow W = (W_0 \pm \Delta W)\ Ud.$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x)\ Ud.$$
$$y = (y_0 \pm \Delta y)\ Ud.$$
$$z = (z_0 \pm \Delta z)\ Ud.$$
$$\vdots$$

x, y, z ... variables independientes

$$W_0 = f(x_0, y_0, z_0, \dots)$$

$$\Delta W = \sqrt{\left(\left. \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x} \right|_{\substack{x_0, \\ y_0, \dots}} \right)^2 \Delta x^2 + \left(\left. \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y} \right|_{\substack{x_0, \\ y_0, \dots}} \right)^2 \Delta y^2 + \ \dots}$$

EXPERIMENTO 4

Obtener el valor de π mediante diferentes métodos

Empecemos a tratar de diseñar nuestro Experimento

Pasos a seguir para obtener una MF

- **1°**

  SIEMPRE *hay que buscar las* ***LEYES FÍSICAS*** *que conozcamos* ***QUE CONTENGAN LA MF*** *que deseamos calcular.*

- **2°**

  Buscar ***CUÁL O CUÁLES PUEDAN APLICARSE*** *con el* ***EQUIPAMIENTO*** *con el que contamos*

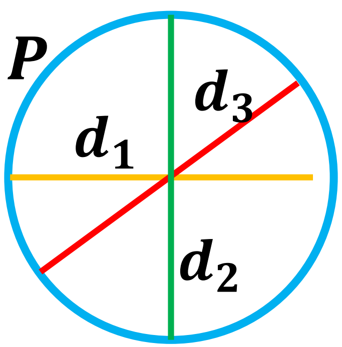
¿Cómo podemos calcular el valor de π?

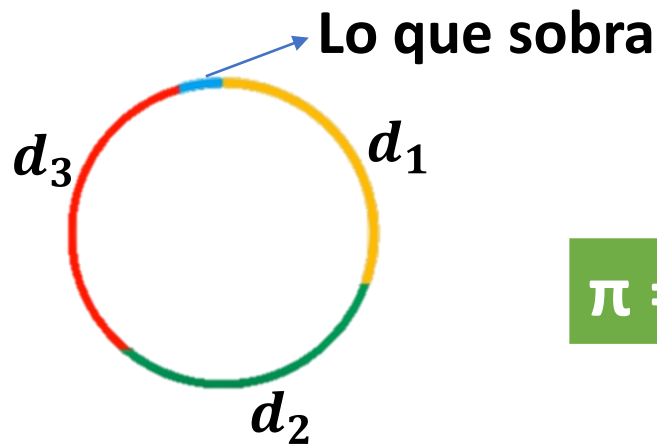
<u>1°:</u> BUSCO UNA LEY FÍSICA QUE RELACIONE A π CON VARIABLES QUE PUEDA MEDIR O ADQUIRIR

<u>*Conceptos básicos:*</u>

- Circunferencia C = Perímetro del círculo P
- Diámetro d

π es el número de veces que entra d en C





π = 3,1416 …

¿Cómo podemos calcular el valor de π?

π es el número de veces que entra d en C

$$\boxed{P = \pi d}$$

¡Independientemente del círculo elegido!!

¡Se puede calcular π para cualquier círculo!

EXPERIMENTO 4

Obtener el valor de π mediante diferentes métodos

Método 1: Obtener π **a partir de calcular** d **y** P **de una superficie circular** y usando la **ecuación (2)**

$$P = P_0 \pm \Delta P$$

$$d = d_0 \pm \Delta d$$

$$\pi = \pi_0 \pm \Delta\pi$$

¿Cómo calculo $\Delta\pi$*?*

$$\boxed{P = \pi d \quad (1)}$$

$$\boxed{\pi = \frac{P}{d} \quad (2)}$$

¿Qué tipo de medición es?

Indirecta

Obtener el valor de π mediante diferentes métodos

Método 2: AYUDA! ¿Es representante el Método 1?

NO!!!

Debería medir N circunferencias!!

$$P_1 = P_0 \pm \Delta P \qquad d_1 = d_0 \pm \Delta d$$

$$P_2 = P_0 \pm \Delta P \qquad d_2 = d_0 \pm \Delta d$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$P_N = P_0 \pm \Delta P \qquad d_N = d_0 \pm \Delta d$$

EXPERIMENTO 4

Obtener el valor de π mediante diferentes métodos

Método 2: AYUDA! ¿Es representante el Método 1?

NO!!!

Debería medir N circunferencias!!

Existe algo más sencillo!!!

Objetivo de la clase de hoy

Obtener **una relación funcional válida** entre dos variables para obtener una MF en forma más representativa al sistema de estudio - **MODELADO**

Determinar el valor de $\boldsymbol{\pi}$ **empleando un modelo que relacione** $\boldsymbol{P}$ **con** $\boldsymbol{d}$

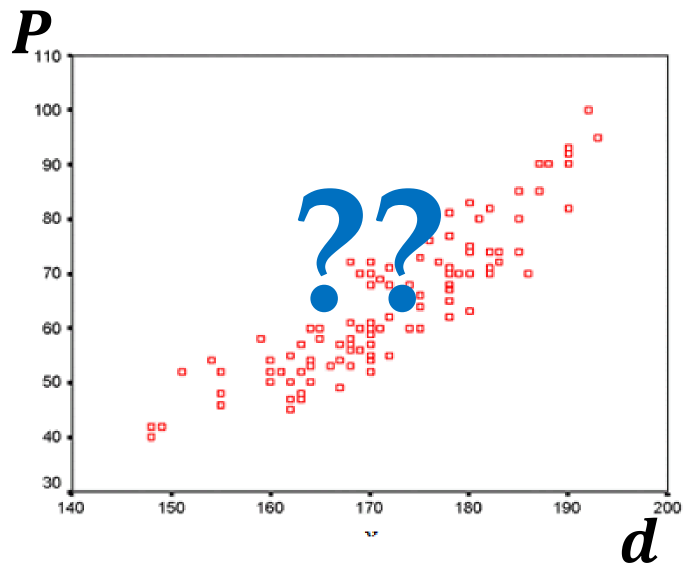
¿Cómo es la relación funcional entre P y d?

$$P_1 = P_0 \pm \Delta P \qquad d_1 = d_0 \pm \Delta d$$

$$P_2 = P_0 \pm \Delta P \qquad d_2 = d_0 \pm \Delta d$$

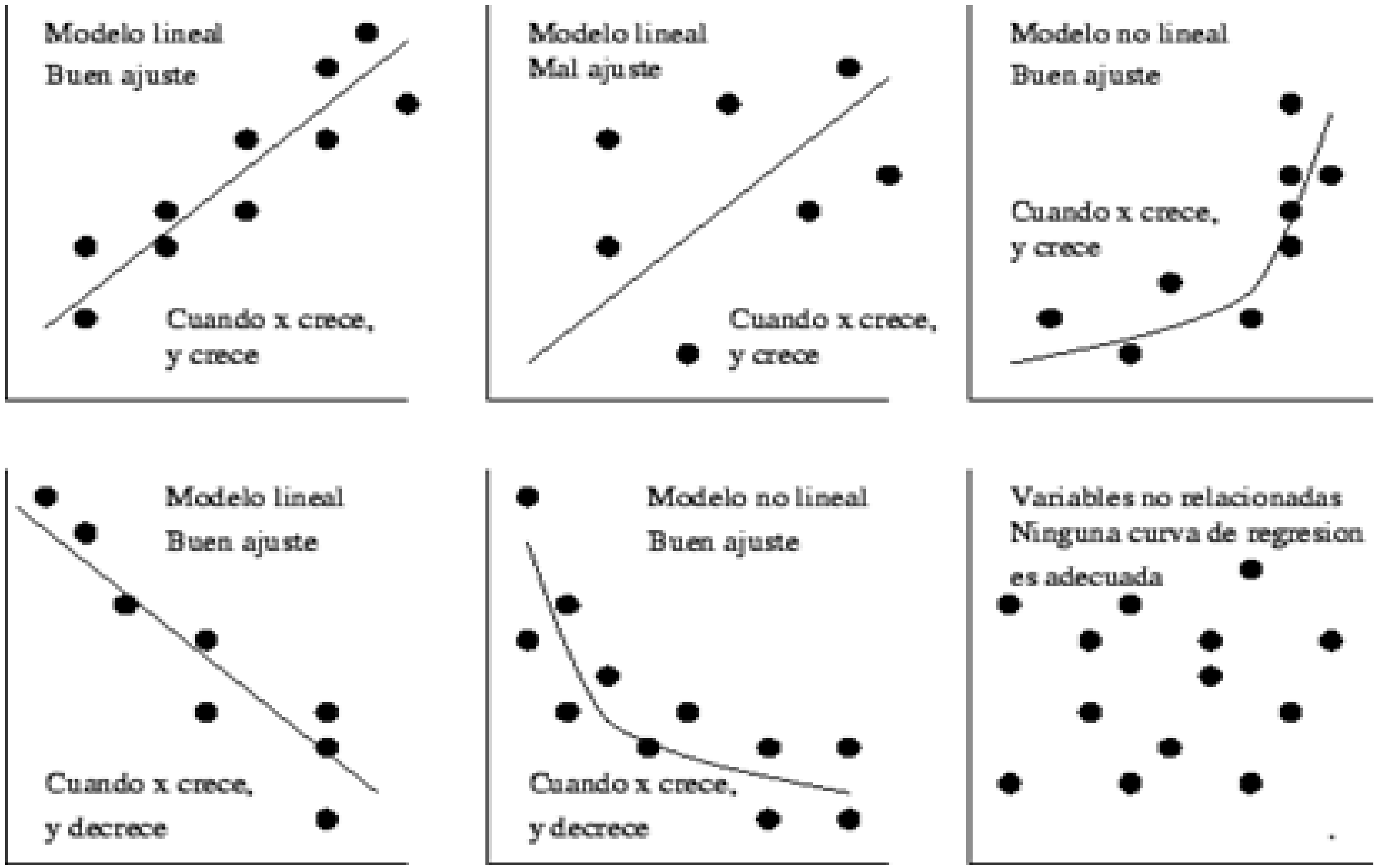
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$P_N = P_0 \pm \Delta P \qquad d_N = d_0 \pm \Delta d$$



MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS

Relación entre 2 variables usando un Modelo Matemático



Objetivo de la clase de hoy

Obtener ***π* a partir de medir *P* y *d* de diferentes superficies circulares** y usando **UN MODELO LINEAL del MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS**

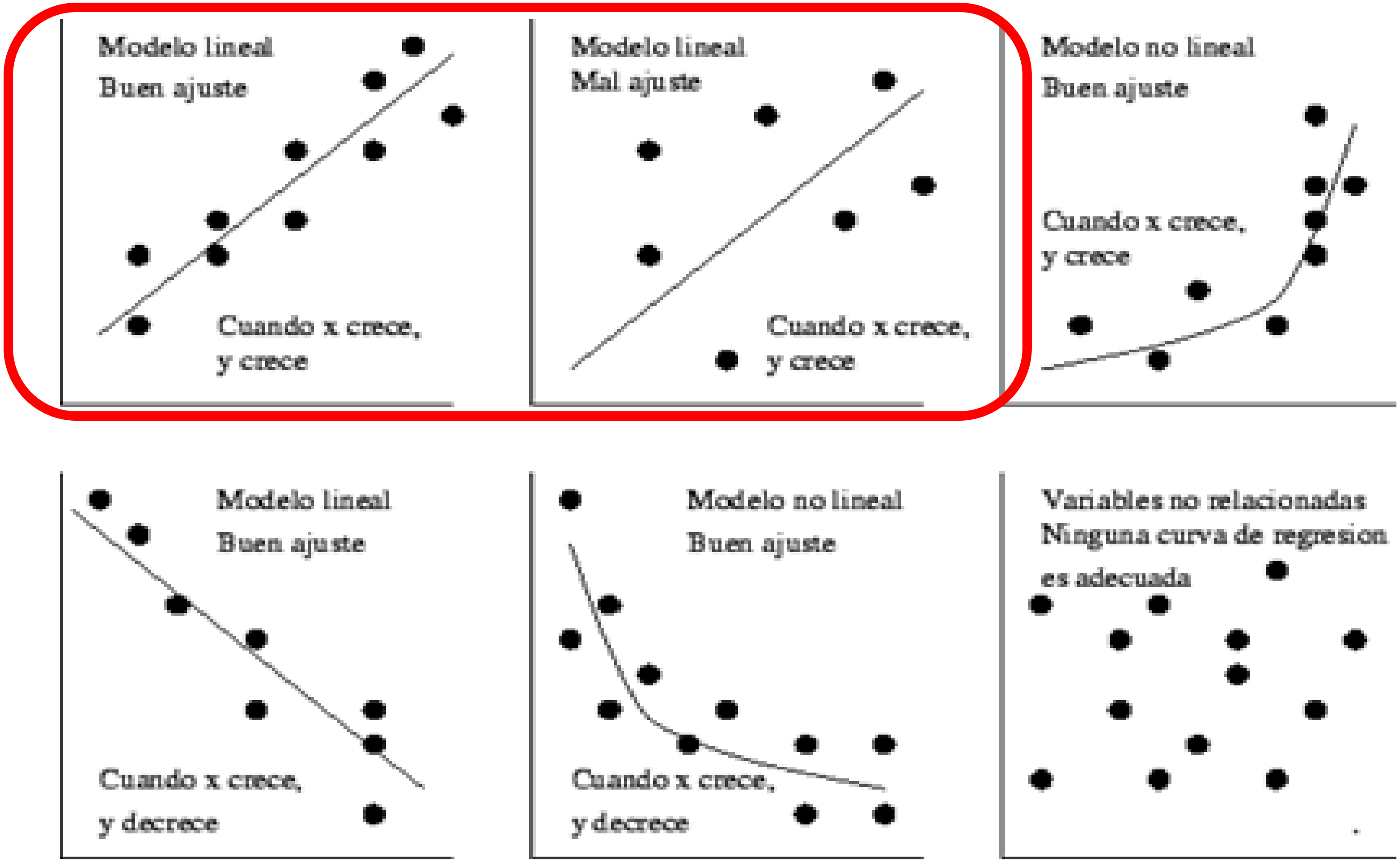
¿Por qué conviene usar un modelo?

- ✓ Permite observar la **relación entre variables.**
- ✓ Permite realizar **predicciones para MF de alcance no posible.**
- ✓ El **resultado es más representativo** que tomar un único caso de estudio.

Método de Cuadrados Mínimos

Relación MAS SENCILLA entre 2 variables

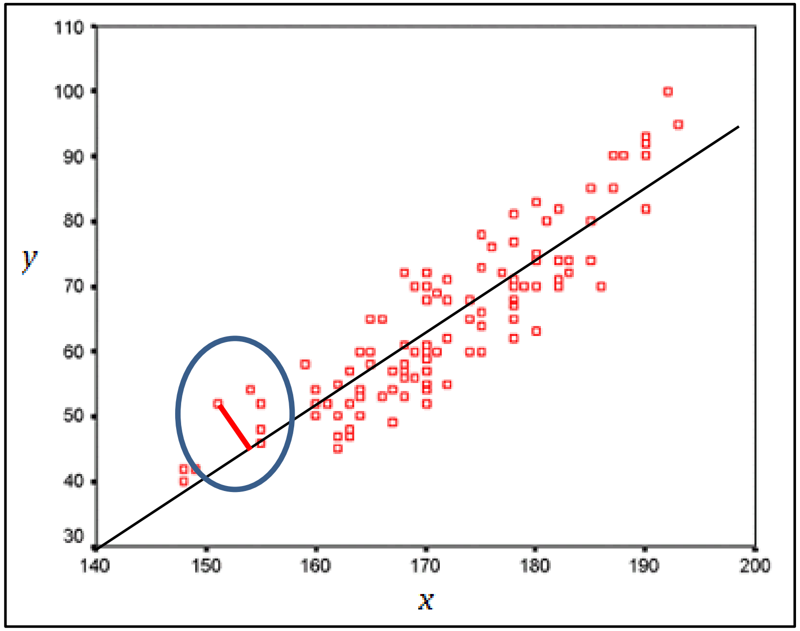
Modelo Lineal



Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

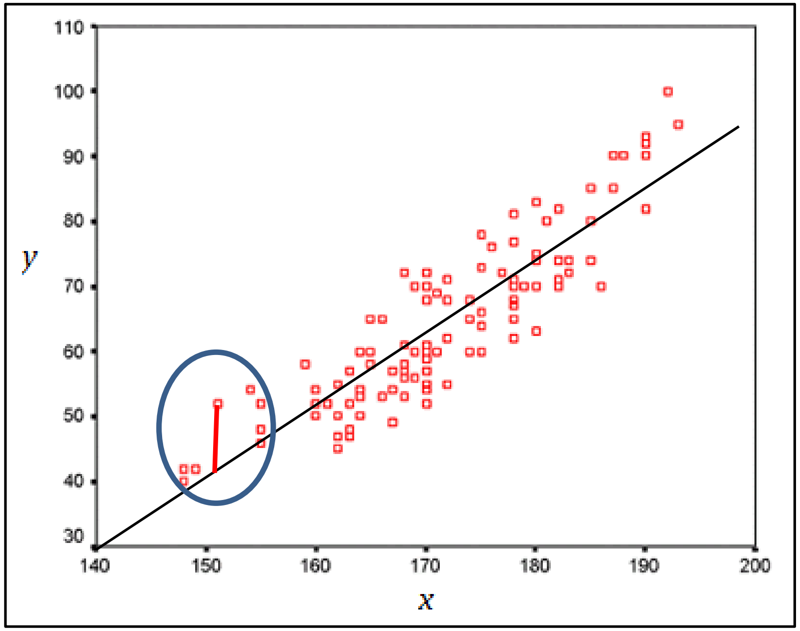
$$y = mx + b$$

Busca encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos (x_i, y_i) al modelo

Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

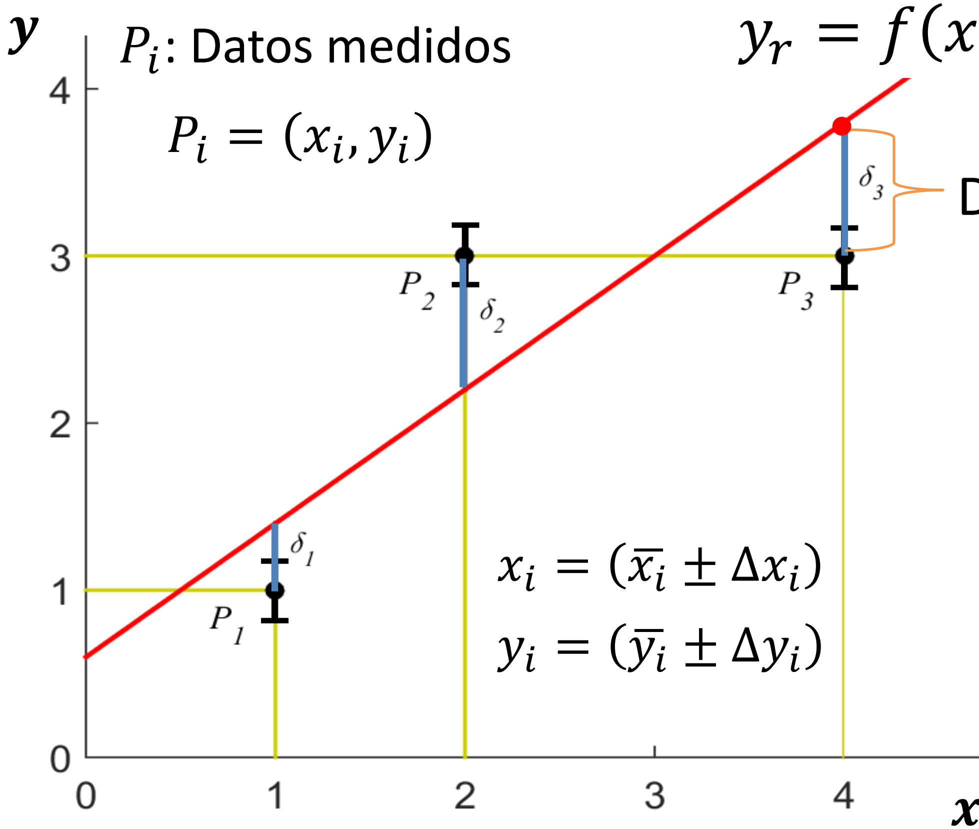
$$y = mx + b$$

Busca encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos (x_i, y_i) al modelo en el eje "y"

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Considerando la Distancia en "y"

$$y_r = f(x) = mx + b$$



Distancia ⇒ **Residuos** (δ_i)

Hipótesis:

$$\varepsilon_{ry} \gg \varepsilon_{rx}$$

$$\varepsilon_{ry} = \left|\frac{\Delta y}{y_o}\right|$$

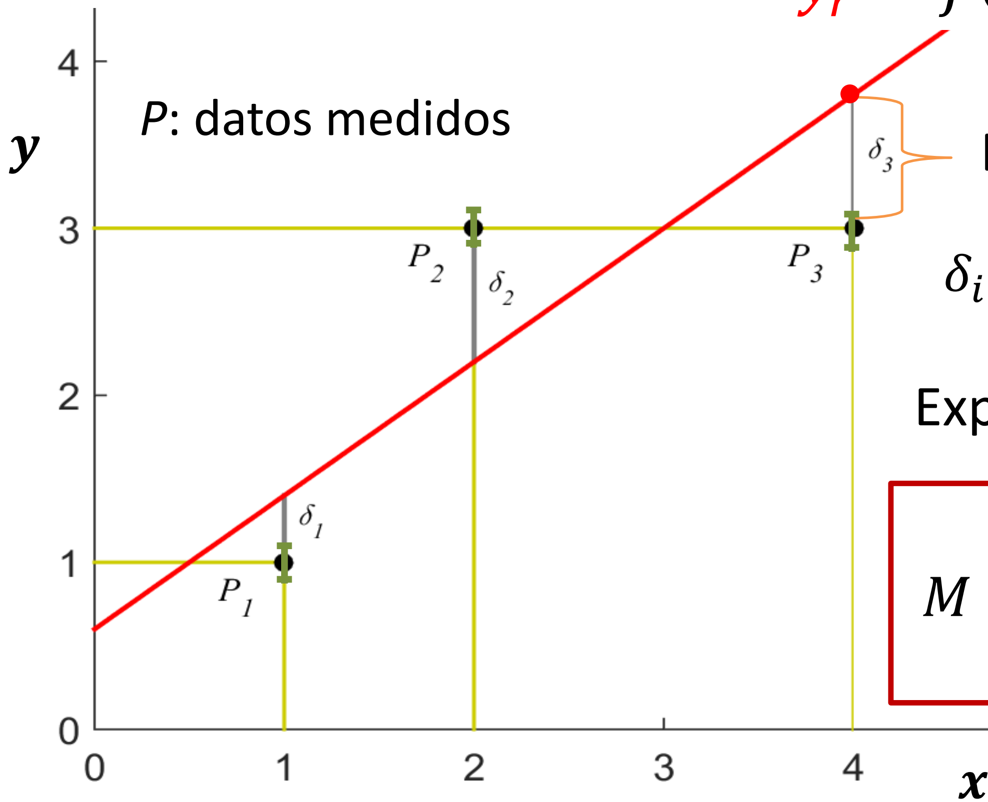
D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2

Caso A

Cuadrados mínimos **NO Ponderados**

Cuando todos los datos en "y" tienen igual precisión

$$y_r = f(x) = mx + b$$



Distancia ➡ **Residuos** (δ_i)

$$\delta_i{}^2 = [y_i - y_r]^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Experimental

Recta

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{N} \delta_i{}^2 = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2}$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

¿Cómo calcula *m* y *b*?

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$M(a,b) = \sum_i {y_i}^2 + a^2 \sum_i {x_i}^2 + Nb^2 + 2ab \sum_i x_i - 2a \sum_i x_i y_i - 2b \sum_i y_i$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a \sum_i {x_i}^2 + 2b \sum_i x_i - 2 \sum_i x_i y_i = 0 \\ 2Nb + 2a \sum_i x_i - 2 \sum_i y_i = 0 \end{cases}$$

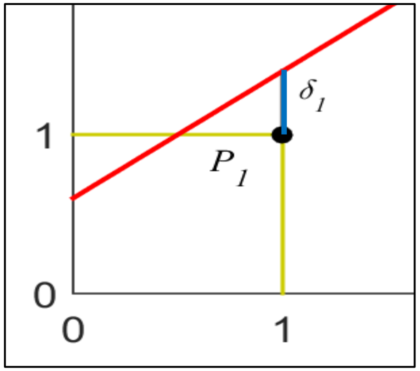
$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

¿Cómo encontramos S_m y S_b?

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

Propagación de errores!! → *D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2*



Estamos evaluando la incerteza en el eje y

→ *Hipótesis:* Consideremos a la incerteza como δ_i

$$\boxed{S_m = S_y\sqrt{\frac{N}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}} \qquad \boxed{S_b = S_y\sqrt{\frac{\sum x_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}} \quad \dashrightarrow \quad S_y = \sqrt{\frac{\sum {\delta_i}^2}{N-2}}$$

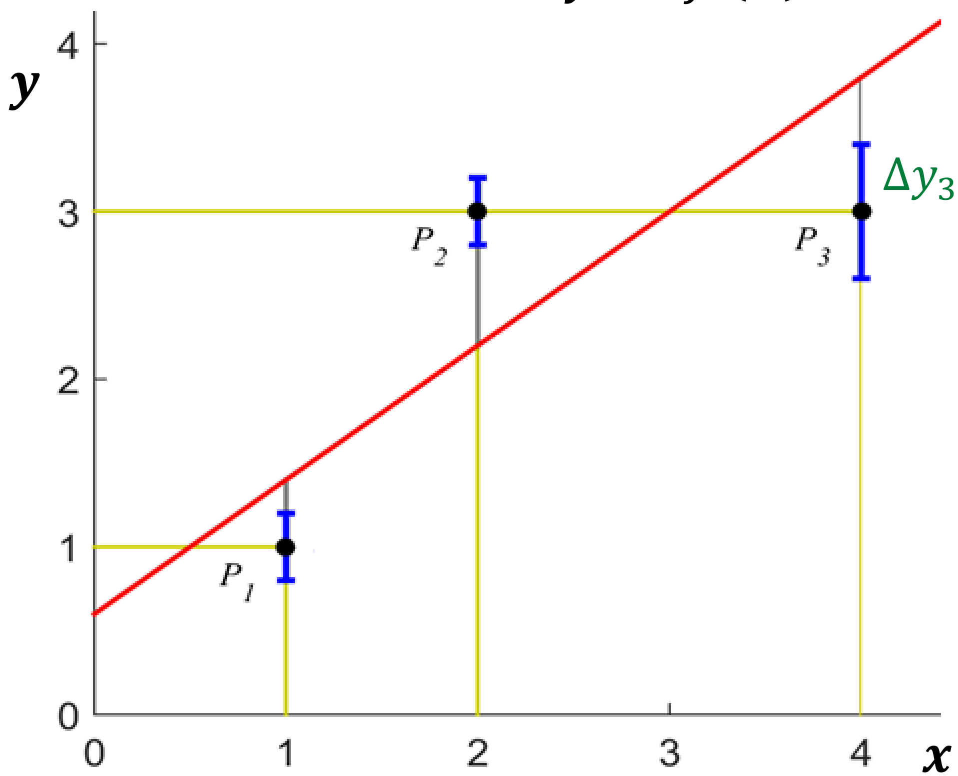
Válido cuando todas las medidas de y tienen igual precisión

Caso B

Cuadrados mínimos **Ponderados**

Cuando todos los datos en "*y*" tienen diferente precisión

$$y = f(x) = mx + b$$

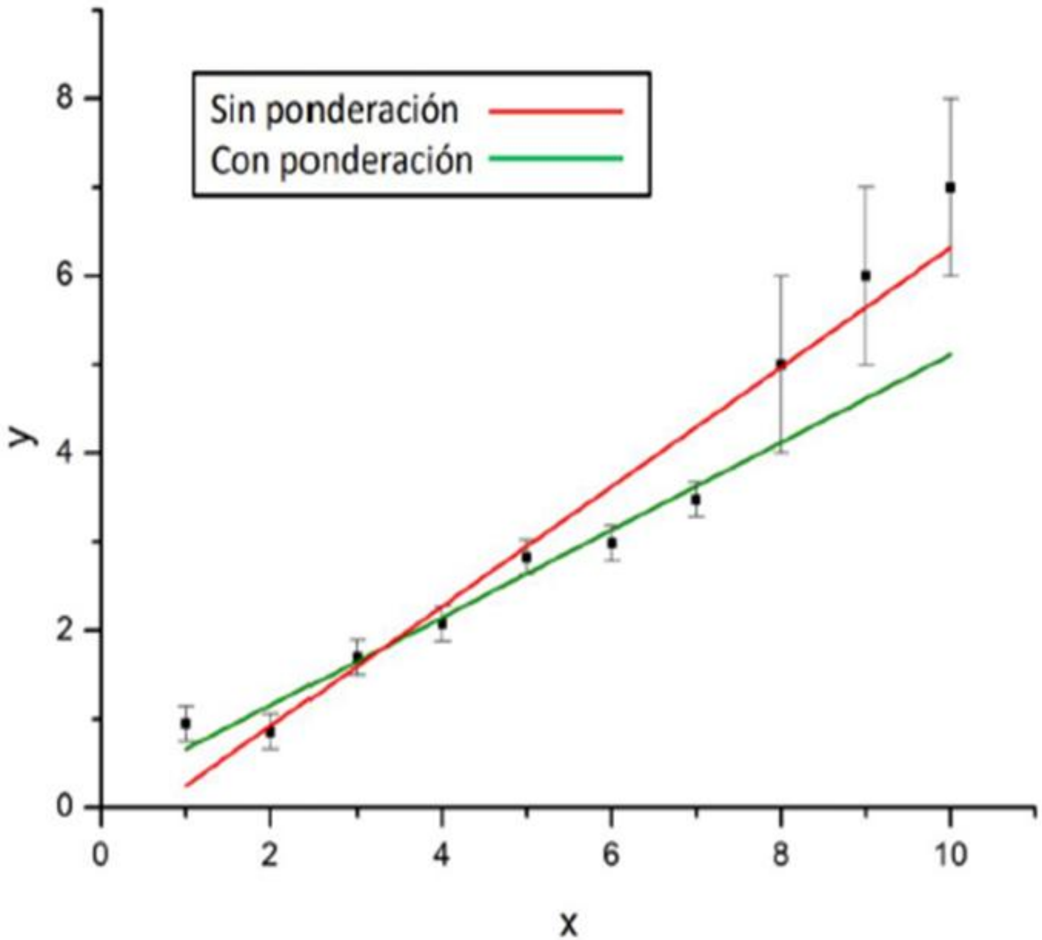


Hipótesis: Considera a las medidas más precisas las más relevantes

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos **Normalizados al error de cada medida**

SIN Ponderación vs CON Ponderación



SIN

$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

Obtener el valor de π mediante diferentes métodos

Método 2: Obtener π **a partir de calcular** d **y** P **de 10 DIFERENTES superficies circulares y usando un MODELO LINEAL DEL MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS**

$$P_1 = P_0 \pm \Delta P \qquad d_1 = d_0 \pm \Delta d$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$P_{10} = P_0 \pm \Delta P \qquad d_{10} = d_0 \pm \Delta d$$

Método 2: Tips!

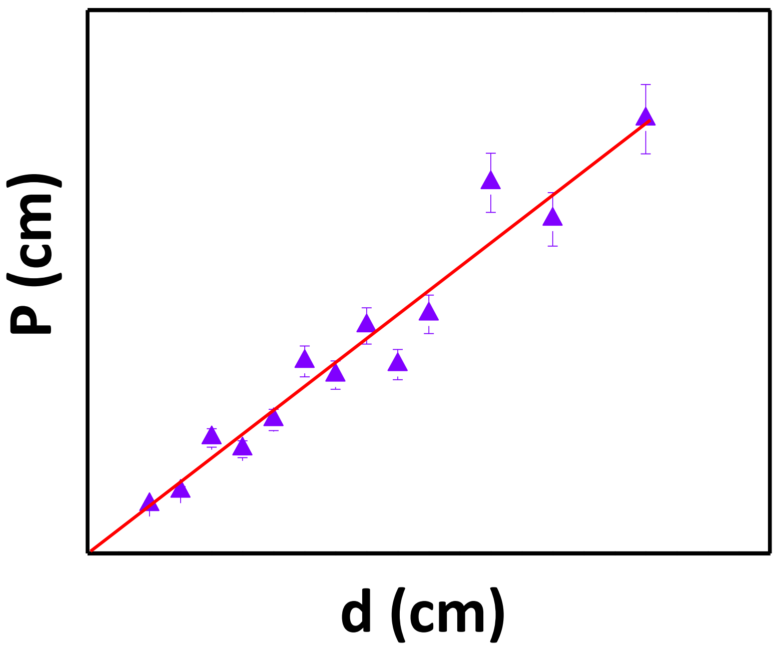
- **Figura 1: SOLO PARA OBSERVAR, NO PARA MODELAR** de $\boldsymbol{P}$ **en función de** $\boldsymbol{d}$ (**gráfico de puntos con incertezas**). *¿Qué forma parece tener la relación entre P y d? ¿Parece una relación lineal?*
- Determinar los **errores relativos** $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ **de las variables a graficar** ($\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{d}$) y **definir qué variable graficarán en el eje "y"** para aplicar un modelo lineal del método de cuadrados mínimos
- **Figura 2:** de **la variable con mayor** $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ **en el eje "y" y menor** $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ **en el eje "x"**, y aplicar un **modelo lineal del método de cuadrados mínimos**: $\mathbf{y} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$. Expresar los **resultados de** $\boldsymbol{a}$ **y de** $\boldsymbol{b}$. *¿Resultó b nula? ¿Era lo esperable?*
- **Obtener el valor de** $\boldsymbol{\pi}$ **a partir de los resultados del modelo** y **compararlo** con el calculado en el **Método 1** y con el de la **calculadora: diferencias significativas, precisión y exactitud**.

EXPERIMENTO 4

AYUDA: Si $\varepsilon_{rP} \gg \varepsilon_{rd}$

Debo graficar $\boldsymbol{P}$ **en función de** $\boldsymbol{d}$

$$\underbrace{\boldsymbol{P}}_{y} = \boldsymbol{\pi}\underbrace{\boldsymbol{d}}_{x}$$



Pendiente $\boldsymbol{m = \bar{m} + \Delta m}$

$\boldsymbol{\pi = m} \longrightarrow \boldsymbol{\bar{\pi} = \bar{m}}$

¿ $\Delta\boldsymbol{\pi}$?

EXPERIMENTO 4

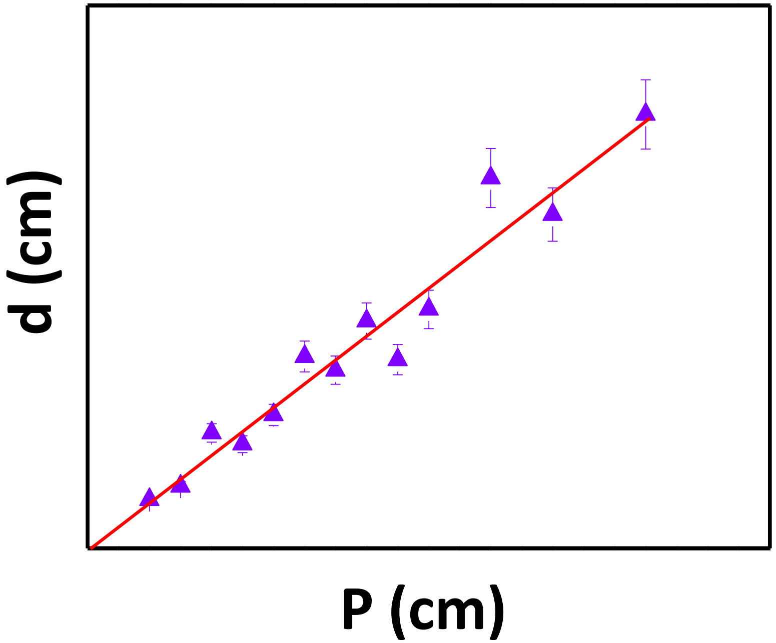
AYUDA: Si $\varepsilon_{rP} \gg \varepsilon_{rd}$

Debo graficar P en función de d

$$d = \frac{P}{\pi} \Rightarrow d = \frac{1}{\pi} P$$

y $\quad$ x

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$



$$m = \frac{1}{\pi} \qquad \boxed{\pi = \frac{1}{m}} \longrightarrow \bar{\pi} = \frac{1}{\bar{m}}$$

¿ $\Delta\pi$? **Propago!!** $\Delta\pi = \sqrt{\left|\frac{\partial\pi}{m}\right|^2_{m_o} \Delta m^2} = ???$