

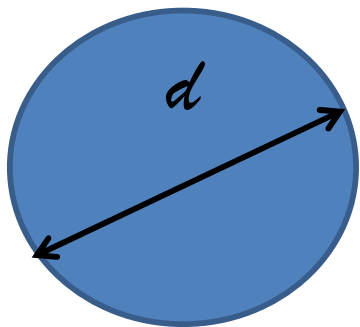
Mediciones indirectas

Propagación de errores

Magnitudes con incertidumbres instrumentales

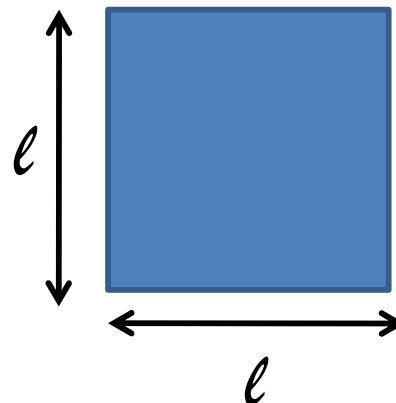
Magnitudes que no pueden ser medidas directamente con un instrumento:

Por ej: AREA de un objeto



$$A = \frac{\pi}{4} d^2$$

$$d = d_0 \pm \Delta d$$



$$A = l^2$$

$$l = l_0 \pm \Delta l$$

$$A = A_0 \pm \Delta A$$

Propagación de incertidumbres

Area del cuadrado:

$$\mathcal{A}_{\max} = (\ell_0 + \Delta\ell)^2$$

$$\mathcal{A}_{\min} = (\ell_0 - \Delta\ell)^2$$

$$\mathcal{A}_0 = \frac{\mathcal{A}_{\max} + \mathcal{A}_{\min}}{2}$$

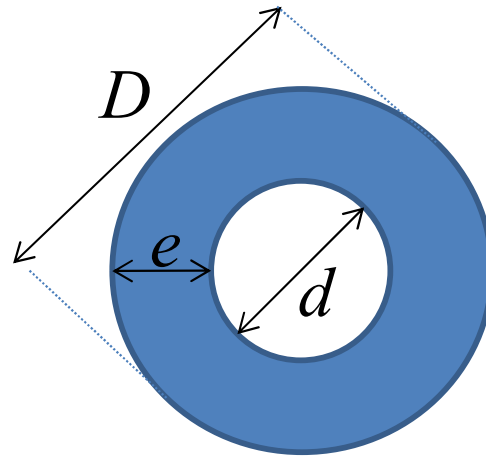
$$\Delta\mathcal{A} = \frac{\mathcal{A}_{\max} - \mathcal{A}_{\min}}{2}$$

$$A_0 = \frac{2l_0^2 + \cancel{2\Delta l^2}}{2} \approx l_0^2$$

$$\Delta A = \frac{4l_0\Delta l}{2} = 2\ell_0\Delta\ell$$

Magnitudes determinadas a partir de la medición directa de varias magnitudes

Ejemplos



$$e = D - d$$

$$e_{max} = (D_0 + \Delta D) - (d_0 - \Delta d) = D_0 - d_0 + (\Delta D + \Delta d)$$

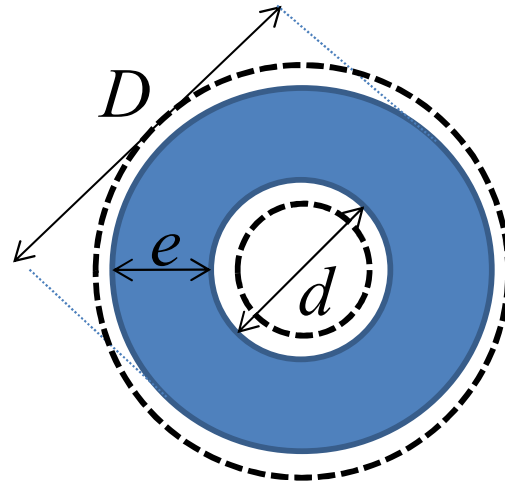
$$e_{min} = (D_0 - \Delta D) - (d_0 + \Delta d) = D_0 - d_0 - (\Delta D + \Delta d)$$

$$e = e_0 \pm \Delta e$$

$$e = D_0 - d_0 \quad \Delta e = \Delta D + \Delta d$$

Magnitudes determinadas a partir de la medición directa de varias magnitudes

Ejemplos



$$e = D - d$$

$$e_{max} = (D_0 + \Delta D) - (d_0 - \Delta d) = D_0 - d_0 + (\Delta D + \Delta d)$$

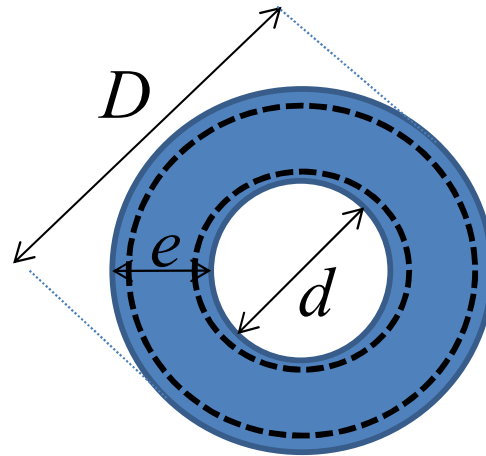
$$e_{min} = (D_0 - \Delta D) - (d_0 + \Delta d) = D_0 - d_0 - (\Delta D + \Delta d)$$

$$e = e_0 \pm \Delta e$$

$$e_0 = D_0 - d_0 \quad \Delta e = \Delta D + \Delta d$$

Magnitudes determinadas a partir de la medición directa de varias magnitudes

Ejemplos



$$e = D - d$$

$$e_{max} = (D_0 + \Delta D) - (d_0 - \Delta d) = D_0 - d_0 + (\Delta D + \Delta d)$$

$$e_{min} = (D_0 - \Delta D) - (d_0 + \Delta d) = D_0 - d_0 - (\Delta D + \Delta d)$$

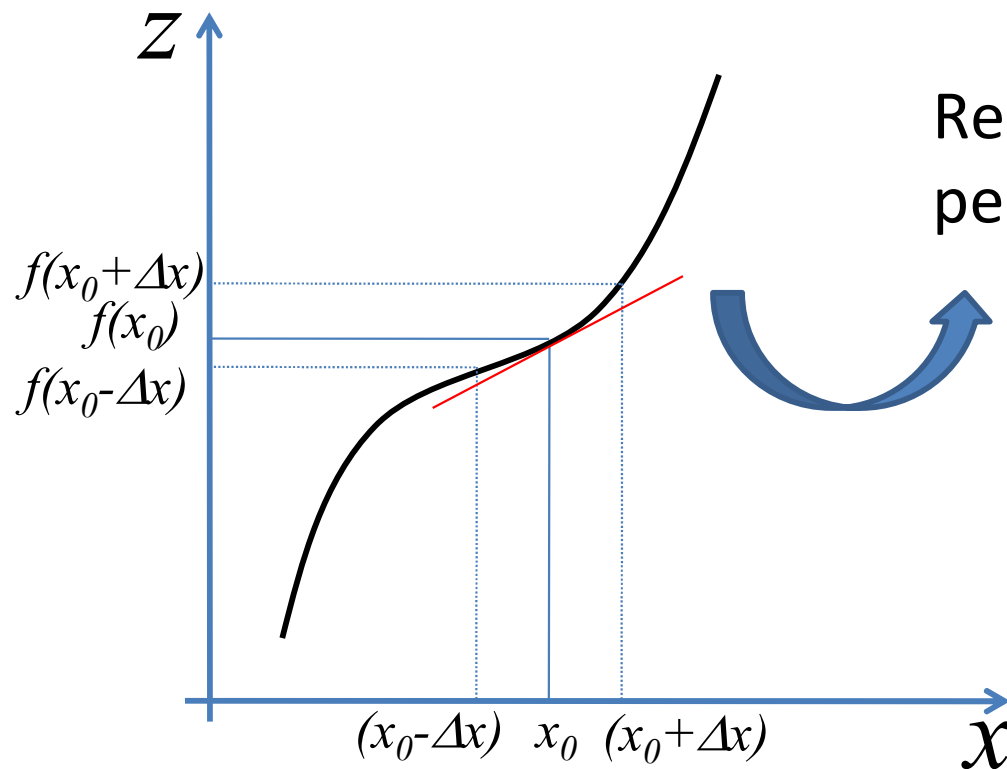
$$e = e_0 \pm \Delta e$$

$$e_0 = D_0 - d_0 \quad \Delta e = \Delta D + \Delta d$$

Queremos determinar el valor de una magnitud z
partir de la medición directa de una magnitud x

$$z = f(x)$$

$$x = (x_0 \pm \Delta x)$$



Recta tangente a $f(x_0)$

pendiente: $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$

$$z = (z_0 \pm \Delta z)$$

$$z_0 = f(x_0)$$

$$\Delta z = \left| \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \right| * \Delta x$$

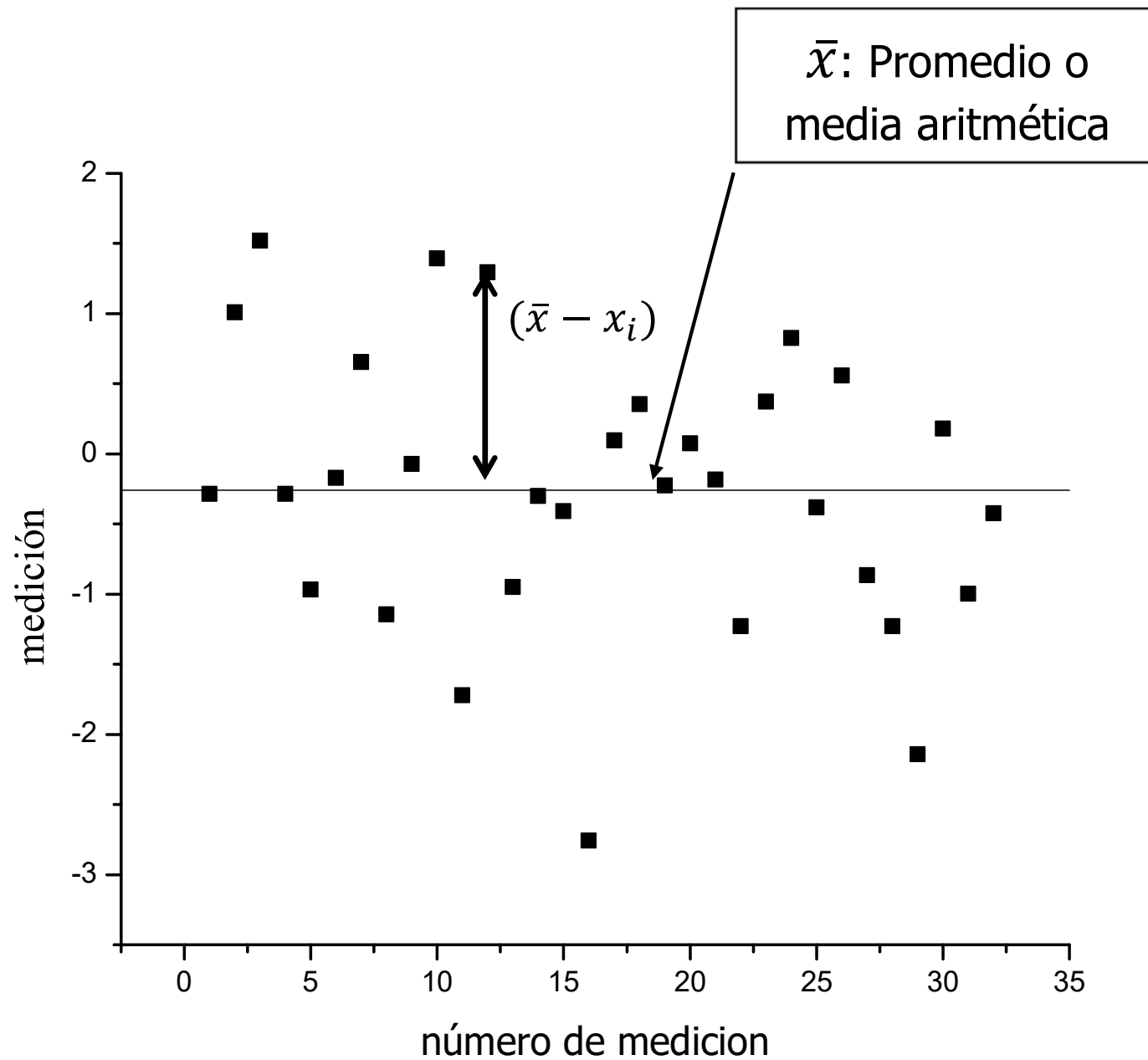
Caso general

Propagación del Error

Caso general

Propagación del Error

- Revisemos el caso en el que queremos obtener $z = f(x, y)$
(después generalizaremos a $z = f(x_1, x_2, x_3, x_4 \dots)$)
- Supondremos que x está sometida a fluctuaciones aleatorias (como el T del péndulo)
(después generalizaremos a casos en que el error de apreciación es preponderante)



Varianza de una VA

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}{N}$$

X : VA; x_i : medición "i" de la VA

Propiedades de la Varianza

Supongamos X e Y VA independientes, entonces:

1. $V(\text{cte}) = 0$
2. $V(k.X) = k^2.V(X)$
3. $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Dispersión de los datos x_i respecto de la media

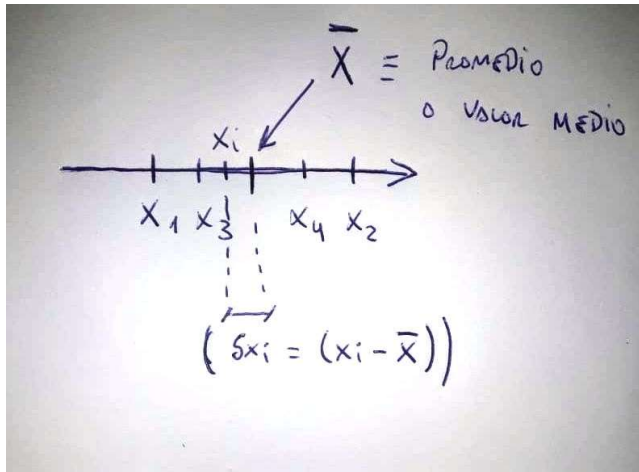
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

DESVIACIÓN ESTÁNDAR (S)

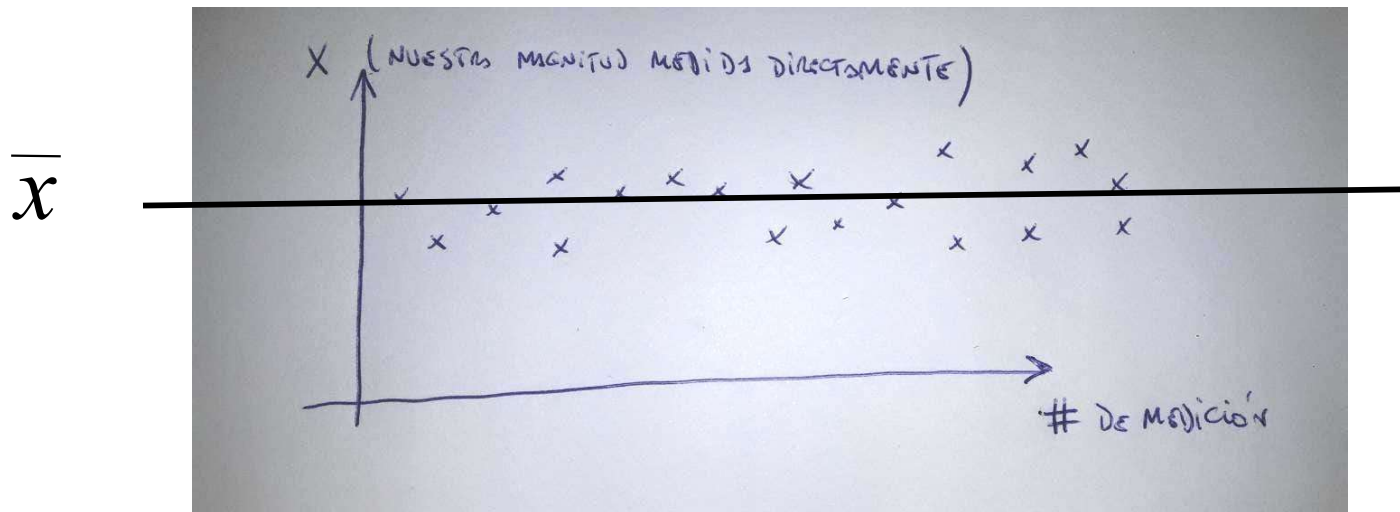
$$S^2 = V$$

Caso general

Propagación del Error – Visión Estadística



$$i = 1, \dots, N$$



El promedio es
~ centro de
masa de la
nube de puntos

Caso general

Propagación del Error – Visión Estadística

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

$$\frac{dV}{d\bar{x}} = 0 \rightarrow -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 2(x_i - \bar{x}) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} - \frac{\left(\sum_{i=1}^N \bar{x} \right)}{N} = 0$$

$\nearrow N\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Buscamos que la varianza sea mínima

El promedio ES el valor que hace mínima a la varianza

Caso general

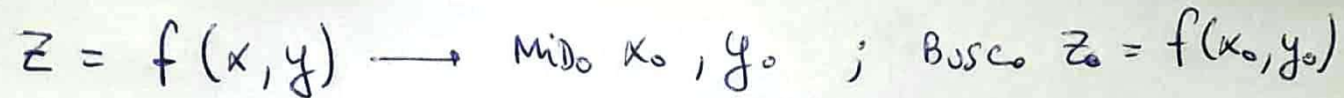
Propagación del Error – Visión Estadística

- x e y son VA independientes, entonces

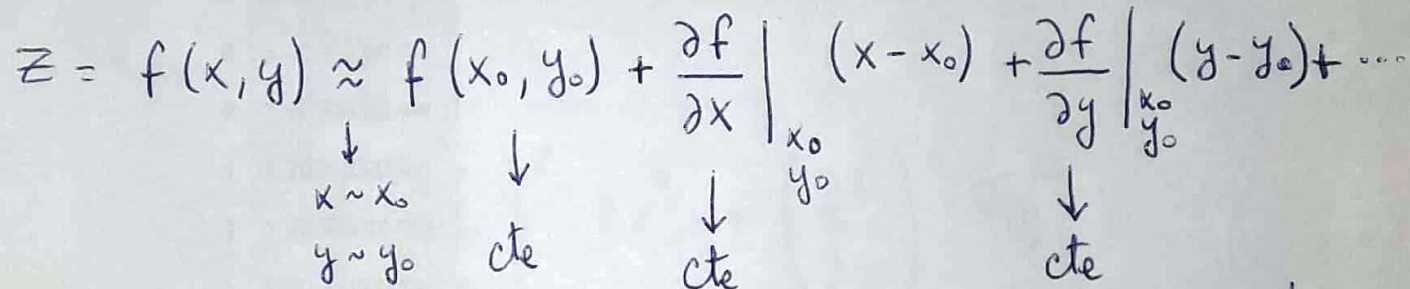
$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

- Si conocemos $V(x)$, se cumple que:

$$V(k.x) = k^2 V(x) \quad (k = \text{cte})$$


$$Z = f(x, y) \longrightarrow \text{Mido } x_0, y_0 ; \text{ Busco } Z_0 = f(x_0, y_0)$$

Puedo desarrollar f en serie de Taylor en un entorno de (x_0, y_0) :


$$Z = f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0) + \dots$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $x \sim x_0 \quad y \sim y_0 \quad \text{cte} \quad \text{cte}$

Caso general

Propagación del Error – Visión Estadística

- x e y son VA independientes, entonces

$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

- Si conocemos $V(x)$, se cumple que:

$$V(k.x) = k^2 V(x) \quad (k = \text{cte})$$

Handwritten derivation of error propagation for a function $z = f(x, y)$ of two independent variables x and y .

The first equation shows the Taylor expansion of z around the mean values x_0 and y_0 :

$$z = f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0) + \dots$$

Below the terms, arrows indicate the statistical properties of the variables:

- $x \sim x_0$ and $y \sim y_0$ (variance of x and y around their means)
- x_0 and y_0 are constants (cte)
- The partial derivatives $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0}$ and $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0}$ are also constants (cte)

The second equation shows the variance of z as the sum of the variances of the terms in the expansion:

$$V(z) \approx V(f(x_0, y_0)) + V\left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0) \right) + V\left(\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0) \right)$$

Arrows indicate that $V(f(x_0, y_0)) = 0$ (since $f(x_0, y_0)$ is a constant) and that the variance of a sum is the sum of the variances.

Caso general

Propagación del Error – Visión Estadística

- x e y son VA independientes, entonces

$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

- Si conocemos $V(x)$, se cumple que:

$$V(k.x) = k^2 V(x) \quad (k = \text{cte})$$

$$V(z) \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2_{\substack{x_0 \\ y_0}} V(x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2_{\substack{x_0 \\ y_0}} V(y-y_0)$$

Prod
x cte

$$V(x-x_0) = V(x) - V(x_0) = V(x)$$

idem $V(y-y_0)$

Caso general

Propagación del Error – Visión Estadística

- x e y son VA independientes, entonces

$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

- Si conocemos $V(x)$, se cumple que:

$$V(k.x) = k^2 V(x) \quad (k = \text{cte})$$

$$V(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}^2 V(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}^2 V(y)$$



$$S_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0}^2 S_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}^2 S_y^2$$

Caso general

Propagación del Error – Visión Estadística

Asociaremos $\sigma_e \sim S$

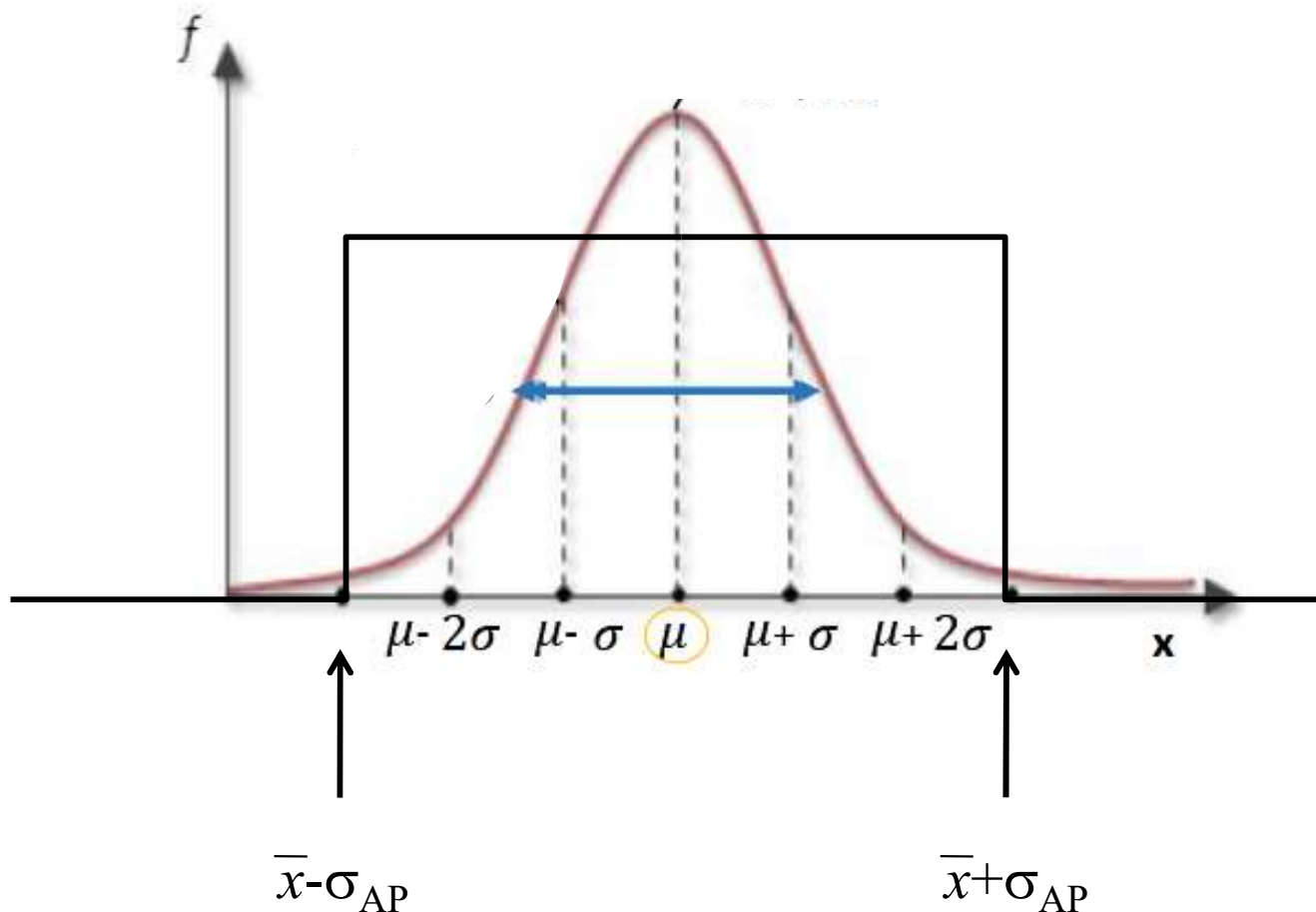
Error estadístico

$$\sigma_{ze}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}^2 \sigma_{xe}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}^2 \sigma_{ye}^2$$

Propagación del Error Generalización

******IMPORTANTE******

¿Qué hacemos si el error más relevante es el de apreciación?



Comentario

*“El error de apreciación proviene de
la estadística que alguien hizo
previamente”*

Joaquín Sacanell

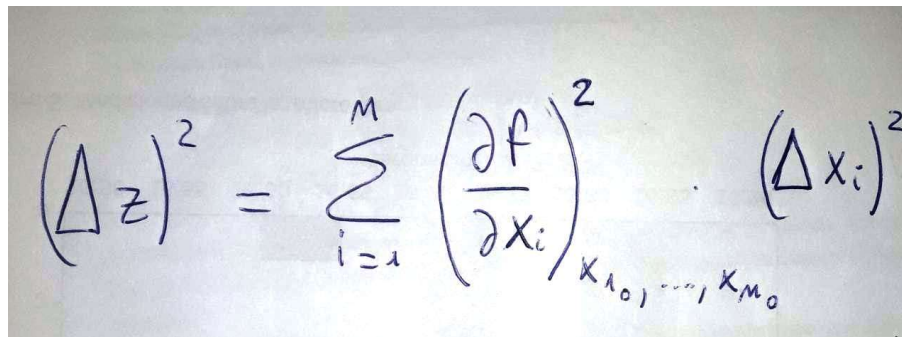
Propagación del Error

Generalización

Recordemos $\Delta x = \sqrt{\sigma_{AP}^2 + \sigma_e^2}$

Además, el desarrollo de Taylor mostrado para 2 variables (x e y) puede generalizarse para n variables ($x_1, \dots, x_n$)

Entonces, generalizando al caso de la determinación de una magnitud $z = f(x_1, \dots, x_n)$ a partir de las mediciones directas de $x_1, \dots, x_n$, llegamos a:


$$(\Delta z)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2_{x_{10}, \dots, x_{n0}} (\Delta x_i)^2$$

Donde $(x_{10}, \dots, x_{n0})$ son los valores medidos de $(x_1, \dots, x_n)$, Δx_i es el error de la variable y Δz es el error de propagación de z .

Propagación del Error

Casos más comunes

$$- f(x, y, z) = ax + by - cz \quad ; \quad \Delta x, \Delta y, \Delta z$$

$$\Delta f^2 = a^2 \Delta x^2 + b^2 \Delta y^2 + c^2 \Delta z^2$$

$$- g(x, y, z) = G x^a y^b z^c$$

$$\Delta g^2 = \left[(G a x^{a-1} y^b z^c)^2 \Delta x^2 + (G x^a b y^{b-1} z^c)^2 \Delta y^2 + (G x^a y^b c z^{c-1})^2 \Delta z^2 \right]$$

$$\frac{\Delta g^2}{g^2} = \frac{[\quad]}{(G x^a y^b z^c)^2}$$

$$\frac{\Delta g^2}{g^2} = a^2 \frac{\Delta x^2}{x^2} + b^2 \frac{\Delta y^2}{y^2} + c^2 \frac{\Delta z^2}{z^2}$$

Propagación del Error

Casos más comunes

$$h(x, y) = y \ln x$$

$$\Delta h^2 = \left(y \cdot \frac{1}{x} \right)^2 \Delta x^2 + (\ln x)^2 \Delta y^2$$

DIVERGE $P/x \rightarrow 0$

Medir el volumen de cuerpos

$$V = (\bar{V} \pm \Delta V)$$

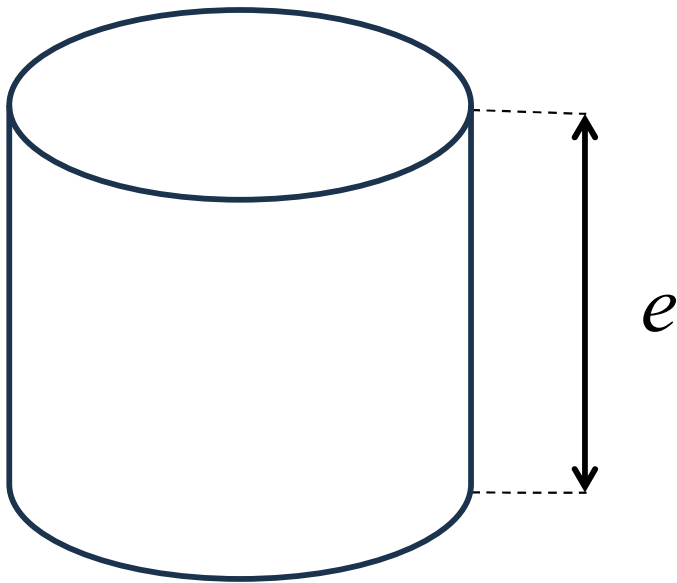
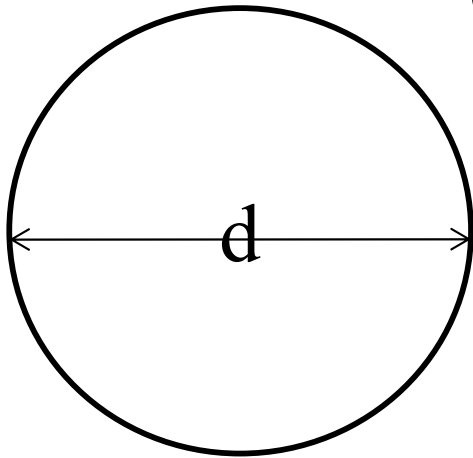
- 2 objetos
- 3 métodos
- Análisis de la influencia de los errores de las magnitudes de medición directa en la magnitud indirecta (V).

Medir el volumen de cuerpos

$$V = (\bar{V} \pm \Delta V)$$

1. Medir las dimensiones y determinar el volumen a partir de su geometría
2. Medir el volumen sumergiendo el cuerpo en agua
3. Medir la masa y determinar el volumen tomando el valor de densidad del material

1. Medir el volumen a partir de las dimensiones



$$V = \pi r^2 e$$

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 (\Delta r)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial e} \right)^2 (\Delta e)^2$$

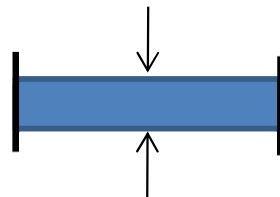
¿y cómo obtengo Δr y Δe ?

- Instrumento
- Método

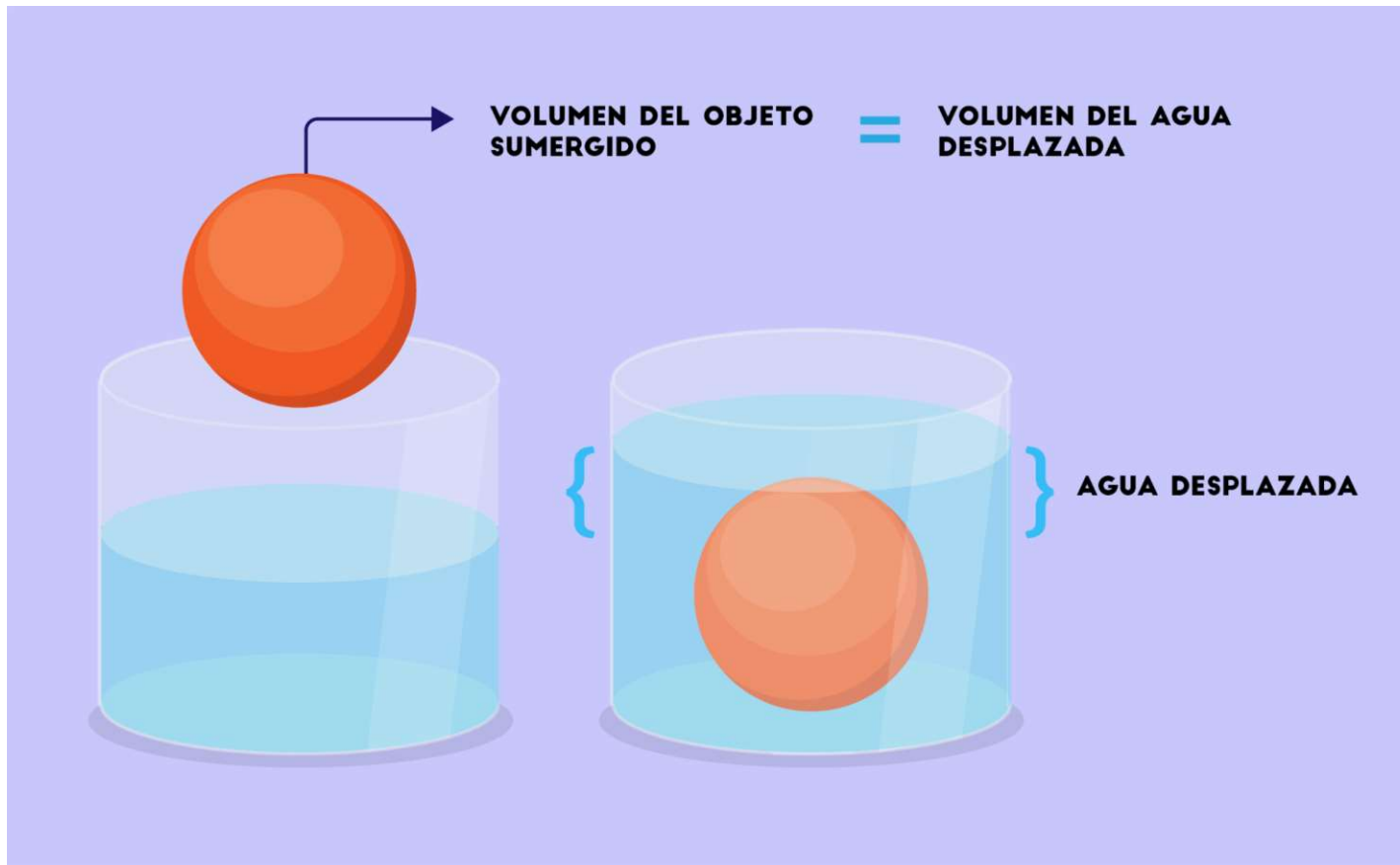
1. Medir el volumen a partir de las dimensiones

- Si uso $r = d/2 \rightarrow$ propagar el error de d
- Si uso $p = 2\pi r^2 \rightarrow$ propagar el error de p

(calibre, regla)



2. Medir el volumen a partir de sumergir el objeto en un líquido



$$V = V_f - V_i$$

Precisión
(cantidad,
ojo 2 pasos).

Irregularidades.

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial V_f} \right)_{V_{f0}, V_{i0}}^2 (\Delta V_f)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial V_i} \right)_{V_{f0}, V_{i0}}^2 (\Delta V_i)^2$$

3. Medir el volumen a partir de su masa y su densidad

$$V = M/\rho ; \rho: \text{densidad de "masa"}$$

Balanza $\rightarrow$ Peso ; Para obtener V necesito $\rightarrow$ masa

$P = M.g$; Pero además $\rightarrow$ la balanza usa g "fuerza"

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)^2 (\Delta \rho)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial M} \right)^2 (\Delta M)^2$$

3. Medir el volumen a partir de su masa y su densidad

Ojo con ρ : Objeto uniforme Material puro $\rightarrow$ OK
 $\rho_{Al} = 2,7 \text{ g/cm}^3$

Aleación?

Objeto no uniforme

Consideraciones

- Identificar claramente las magnitudes de medición directa, las intermedias y las finales (no es necesario que sea explícito, pero define el número de pasos)
- Analizar cómo influye el error de cada magnitud en el error del volumen. Error absoluto/error relativo. Magnitudes con distintas unidades
- Precisión de los instrumentos utilizados
- Ventajas y desventajas de cada método, precauciones
- Confiabilidad de las magnitudes utilizadas (la medí yo?, la obtuve?, qué tan confiable es?)