Error estadístico

Hasta ahora vimos dos estimadores para una distribución: el promedio ($\overline{x}$) y la desviación estándar (σ). Ambas son propiedades de la distribución específica de la que estamos hablando.

Si la distribución es gaussiana, podemos usar esos dos estimadores para dar una primera imagen del valor de la magnitud física asociada a la distribución y a su incerteza. En ese caso, sabemos que el 68% de los datos se encuentran en el intervalo $\overline{x} \pm$ σ, por lo que podemos decir: "si yo realizo una medición de la magnitud física *x*, dentro de los parámetros y condiciones que definen a la distribución, tengo una probabilidad del 68% de obtener un valor que no se aleja más que σ respecto del promedio."

Ese es el significado entonces de la expresión $\overline{x} \pm$ σ.

Está claro que si $\overline{x}$ y σ son propiedades de la distribución, no voy a poder decir mucho más sobre las mediciones.

Sin embargo, sí puedo decir algo más sobre el promedio. Para esto vamos a presentar una cantidad alternativa, la varianza de la magnitud x, o V(x), que es simplemente el cuadrado de σ. Si tenemos una muestra de *N* mediciones de nuestra magnitud física, la varianza que obtendremos será

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n_s} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{N} \qquad (1)$$

Algunas propiedades de la varianza son las siguientes:

1) Para la muestra mencionada arriba, el promedio definido como

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n_s} \frac{x_i}{N} \ , \qquad (2)$$

hace que la varianza sea mínima (demostrar).

2) Si la magnitud física (o Variable Aleatoria, VA) es constante, su varianza de una constante es cero. Lo cual resulta trivial según su definición (ecuación 1).

3) Si tenemos varias VA medidas independientemente, la varianza de la suma de las VA es la suma de las varianzas.

4) Si conocemos la varianza de la variable aleatoria x, la varianza del producto de x por una constante k cumple que:

$V(k.x) = k^2\, V(x)$ (3)

(demostrar)

Supongamos entonces que tenemos nuestra variable aleatoria x, y queremos saber qué tan bien está definido el promedio de una muestra de mediciones de ella, del tipo de la mencionada arriba, con N datos.

Para hacer esto, podemos pensar que nuestra nueva magnitud física o VA de interés sea el promedio de una muestra de mediciones de la VA original, x. Eso es lo que se conoce como muestra poblacional.

Así como antes nuestro objetivo fue definir un intervalo de confianza para cualquier dato medido de la VA, ahora queremos definir el intervalo de confianza del promedio de una muestra de N datos de esa VA.

Para esto, podemos buscar cuánto vale la varianza del promedio, definido como se muestra en la ecuación (1). Usando las propiedades de la varianza, podemos llegar a que:

$$V(\bar{x}) = V\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}\right) = V\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right) = \frac{1}{N^2} V\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) = \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} V(x_i)\right) = \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} V(x)\right) = \frac{V(x)}{N} \qquad (4)$$

Dado que x_i es una medición de la VA x, la varianza de x_i, es la varianza de x

Lo cual quiere decir que la ***varianza del promedio*** de una serie o muestra, descripta por la distribución de la VA x, es inversamente proporcional al número de mediciones que forman a la muestra.

Si volvemos a hablar en términos de la desviación estándar, el desarrollo mostrado en (4) se resume como:

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ (5)

La ecuación (5) nos indica que si analizamos al promedio como una variable aleatoria, existe un 68% de probabilidades que el promedio de una muestra de N datos, se encuentre en el intervalo $< \bar{x} > \pm\, \sigma_{\bar{x}}$. Donde $< \bar{x} >$ es el promedio de los promedios de varias muestras con N datos.

En la práctica, podemos usar cualquiera de los promedios obtenidos de una de esas series, justamente su distribución es tal que el intervalo de confianza es el mencionado en la frase anterior. Es por esto que, a la desviación estándar de los promedios, se la conoce como el "error estadístico" σ_e.