Ley de Hooke, Oscilador armónico

Ajustes lineales, ajustes no lineales, sensor de posición, calibración y más…

El oscilador armónico

$$-k(x - l_0) - mg = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

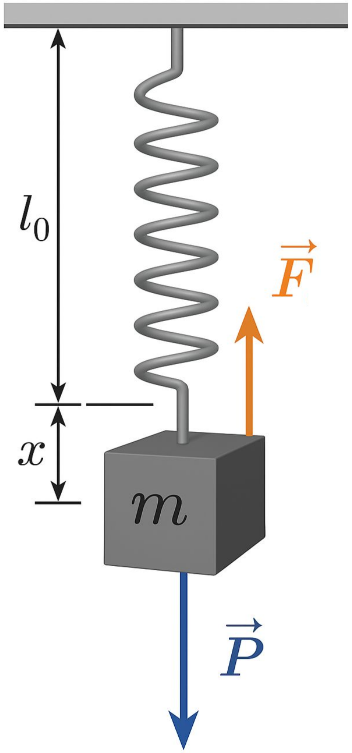
Esta vez es sin aproximaciones!

$$\omega^2 x + \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Dos soluciones, dos análisis:

- Homogenea (independiente de t)
- Particular (dependiente de t)

Un sensor



El oscilador armónico

$$-k(x - l_0) - mg = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

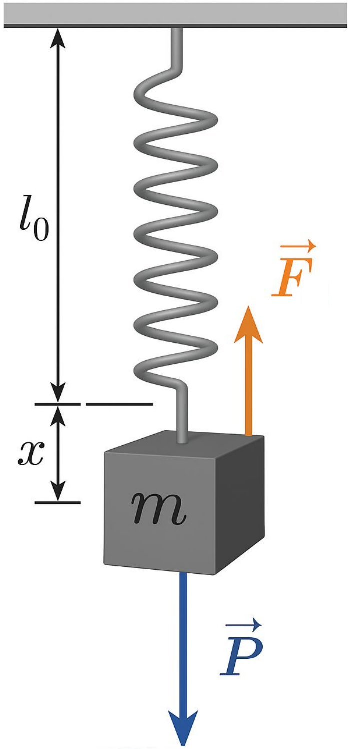
Esta vez es sin aproximaciones!

$$\omega^2 x + \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Dos soluciones, dos análisis:

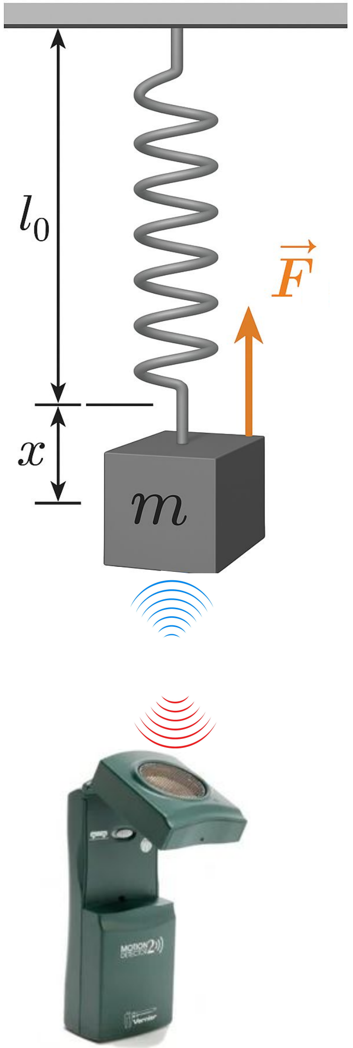
- Homogenea (independiente de t)
- Particular (dependiente de t)

Un sensor



Sensor de Posición MD-BTD

- Lean el manual! y la guía de uso
- Funciona con ultrasonido:
  - Emite una señal
  - Mide el intervalo entre la señal y el rebote
  - Sabiendo que v_s=343 m/s, puedo calcular la distancia
- Cuidado con los rebotes accidentales y la saturación (dist min = 30 cm)
- Se conecta al canal **digital** del sensor DAQ
- Hay que calibrarlo (carrito, masa sola)
- Frecuencia de muestreo < 50 Hz
- Resolución ~1 mm



Calibración del sensor de posición

Para que el sensor arroje una posición en metros lo tenemos que calibrar.

Respuesta del sensor: lineal ⇒ necesito 2 distancias para la calibración:

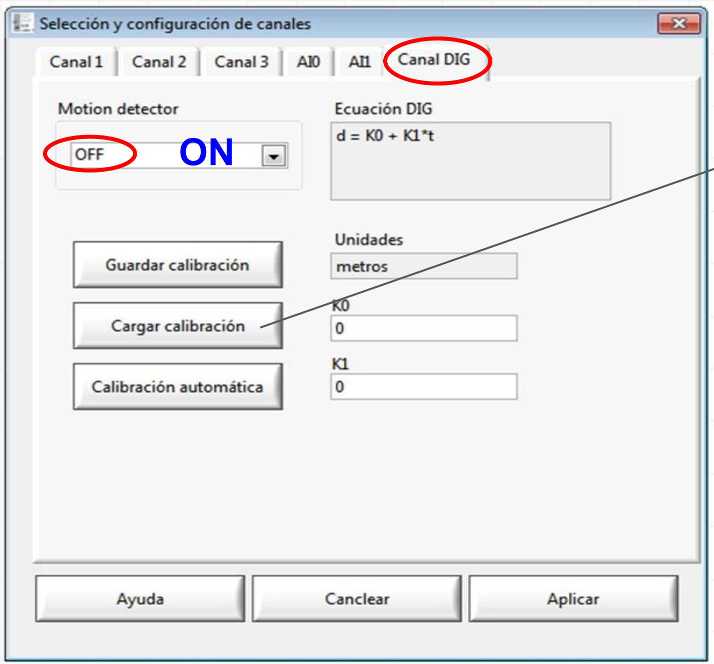
D1 y D2: distancias conocidas
t1 y t2: lecturas de tiempo

Necesitamos determinar las constantes de calibración K_0 y K_1

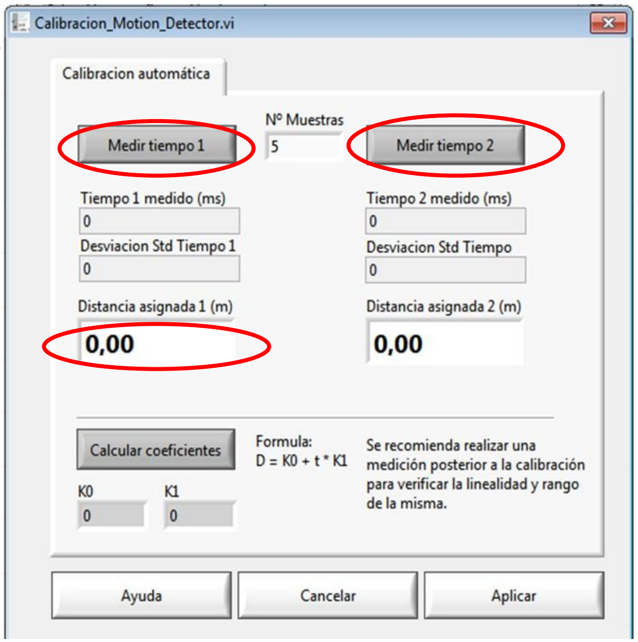
$$Distancia = K0 + K1.tiempo$$

Distancia	Tiempo
D1	t1
D2	t2

Calibración del sensor de posición

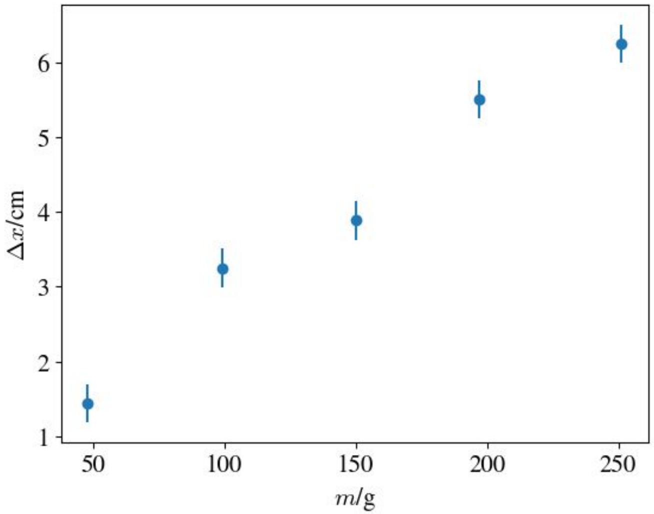


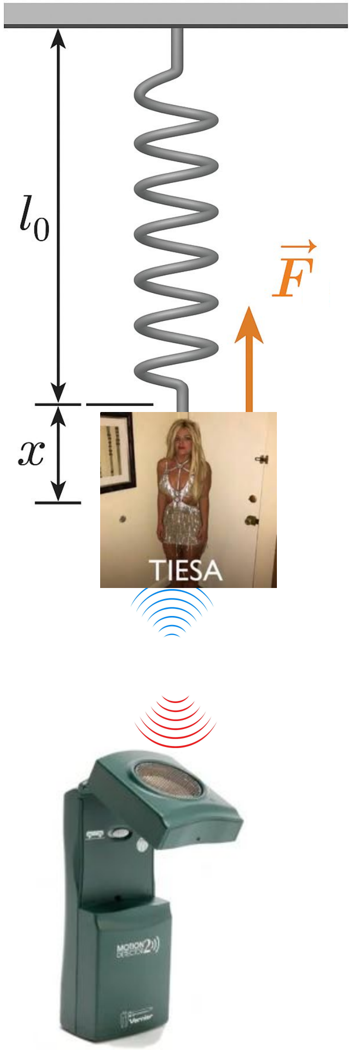
Calibración automática



Caso estático

- Distintas masas, distintos estiramientos
- Cómo están relacionados? -> Ley de Hooke
- Con qué herramienta podemos analizar?





Cuadrados mínimos lineales

Minimizamos los residuos pesados por su error

Medidos, son fijos!

Mis variables

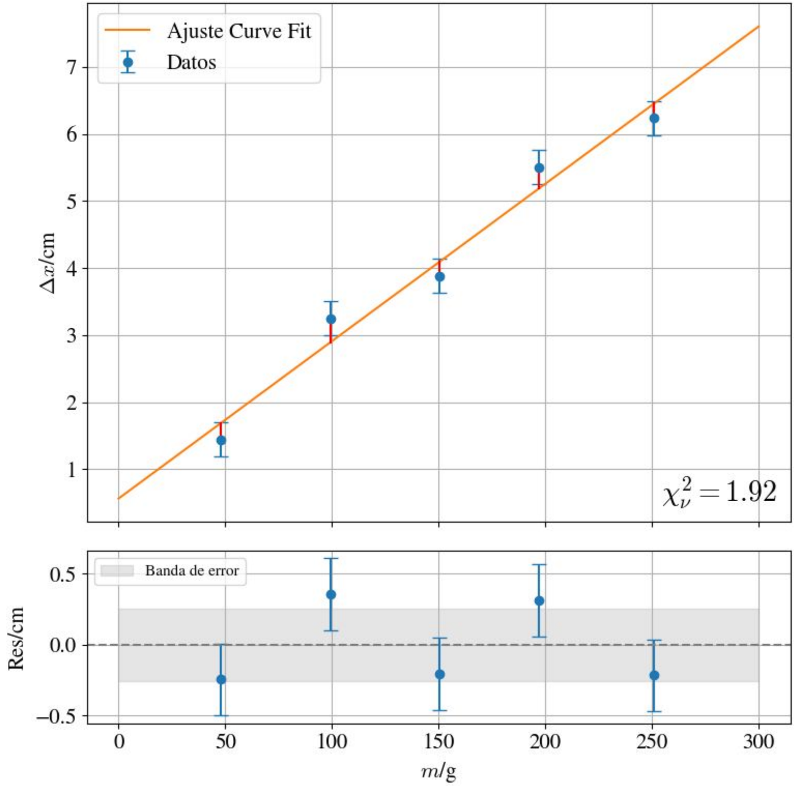
$$\chi^2 = \sum_i \frac{[y_i - f(x_i|a,b)]^2}{(\sigma_i^y)^2}$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a, b} = -2 \sum_i \frac{[y_i - f(x_i|a,b)]}{(\sigma_i^y)^2} \cdot \frac{\partial f(x_i|a,b)}{\partial a, b} = 0$$

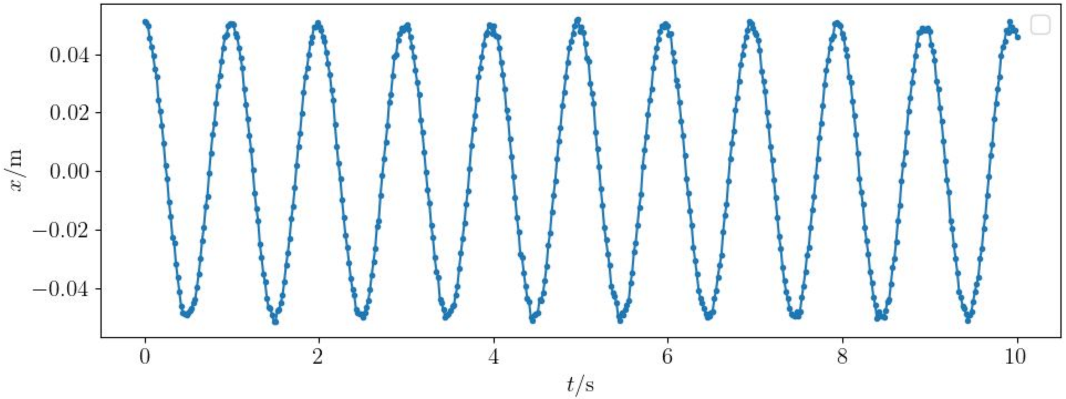
$$a = \frac{\left(\sum_i \frac{1}{(\sigma_i^y)^2}\right)\left(\sum_i \frac{x_i y_i}{(\sigma_i^y)^2}\right) - \left(\sum_i \frac{x_i}{(\sigma_i^y)^2}\right)\left(\sum_i \frac{y_i}{(\sigma_i^y)^2}\right)}{\Delta}$$

$$b = \frac{\left(\sum_i \frac{x_i^2}{(\sigma_i^y)^2}\right)\left(\sum_i \frac{y_i}{(\sigma_i^y)^2}\right) - \left(\sum_i \frac{x_i}{(\sigma_i^y)^2}\right)\left(\sum_i \frac{x_i y_i}{(\sigma_i^y)^2}\right)}{\Delta}$$

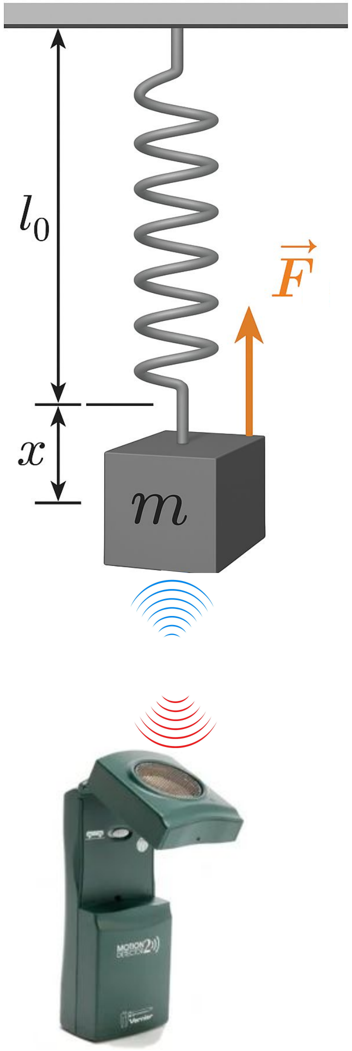
$$\Delta = \left(\sum_i \frac{1}{(\sigma_i^y)^2}\right)\left(\sum_i \frac{x_i^2}{(\sigma_i^y)^2}\right) - \left(\sum_i \frac{x_i}{(\sigma_i^y)^2}\right)^2$$



Caso dinámico



$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + C$$



Cuadrados mínimos no lineales

Minimizamos los residuos pesados por su error

Medidos, son fijos!

Mis variables

$$\chi^2 = \sum_i \frac{[y_i - f(x_i|a,b)]^2}{(\sigma_i^y)^2}$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a, b} = -2 \sum_i \frac{[y_i - f(x_i|a,b)]}{(\sigma_i^y)^2} \cdot \frac{\partial f(x_i|a,b)}{\partial a, b} = 0$$

$$a = \frac{\left(\sum_i \frac{1}{(\sigma_i^y)^2}\right)\left(\sum_i \frac{x_i y_i}{(\sigma_i^y)^2}\right) - \left(\sum_i \frac{x_i}{(\sigma_i^y)^2}\right)\left(\sum_i \frac{y_i}{(\sigma_i^y)^2}\right)}{\Delta}$$

No aplica

$$b = \frac{\left(\sum_i \frac{x_i^2}{(\sigma_i^y)^2}\right)\left(\sum_i \frac{y_i}{(\sigma_i^y)^2}\right) - \left(\sum_i \frac{x_i}{(\sigma_i^y)^2}\right)\left(\sum_i \frac{x_i y_i}{(\sigma_i^y)^2}\right)}{\Delta}$$

$$\Delta = \left(\sum_i \frac{1}{(\sigma_i^y)^2}\right)\left(\sum_i \frac{x_i^2}{(\sigma_i^y)^2}\right) - \left(\sum_i \frac{x_i}{(\sigma_i^y)^2}\right)^2$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a, b} = -2 \sum_i \frac{[y_i - f(x_i|a,b)]}{(\sigma_i^y)^2} \cdot \frac{\partial f(x_i|a,b)}{\partial a, b} = 0$$

¡Es válido! E incluso para más variables

Ahora tenemos que encontrar los valores de los parámetros que minimicen el χ^2

¿Cómo?

Cuadrados mínimos no lineales

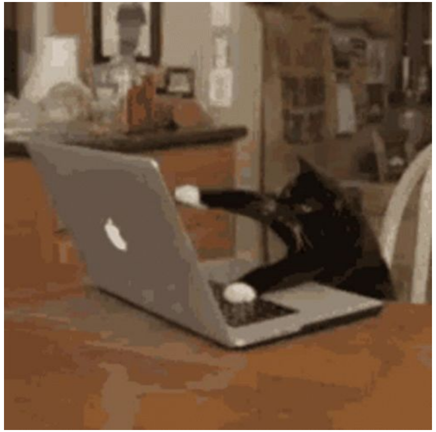
Minimizamos los residuos pesados por su error

Medidos, son fijos!

Mis variables

$$\chi^2 = \sum_i \frac{[y_i - f(x_i|a,b)]^2}{(\sigma_i^y)^2}$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a, b} = -2 \sum_i \frac{[y_i - f(x_i|a,b)]}{(\sigma_i^y)^2} \cdot \frac{\partial f(x_i|a,b)}{\partial a, b} = 0$$



$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a, b} = -2 \sum_i \frac{[y_i - f(x_i|a,b)]}{(\sigma_i^y)^2} \cdot \frac{\partial f(x_i|a,b)}{\partial a, b} = 0$$

¡Es válido! E incluso para más variables

Ahora tenemos que encontrar los valores de los parámetros que minimicen el χ^2

¿Cómo?

Cuadrados mínimos no lineales

Queremos ajustar el gráfico de posición en función del tiempo

Tenemos nuestros pares de datos x_i y t_i.

Usando mi modelo:

$$f(t_i) = A\cos(\omega t_i + \varphi) + C$$

Tengo que encontrar *A*, ω, φ y *C* que minimicen

$$Res = \sum_i \frac{(f(t_i) - x_i)^2}{\sigma_i}$$

Primero hagámoslo jugando acá

Cuadrados mínimos no lineales

Queremos ajustar el gráfico de posición en función del tiempo

Tenemos nuestros pares de datos x_i y t_i.

Usando mi modelo:

$$f(t_i) = A\cos(\omega t_i + \varphi) + C$$

Tengo que encontrar *A*, ω, φ y *C* que minimicen

$$Res = \sum_i \frac{(f(t_i) - x_i)^2}{\sigma_i}$$

Pero es poco práctico. Mejor hacerlo numéricamente

Cuadrados mínimos no lineales

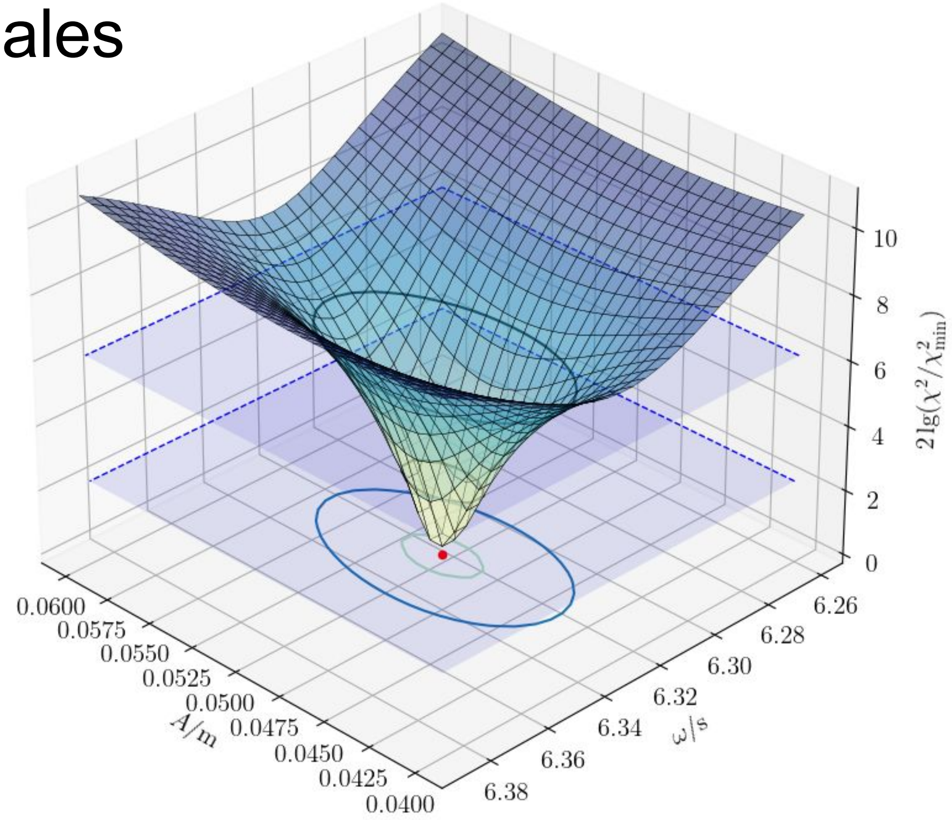
Consejo: Estimar cuánto valen mis parámetros y darle esta info al ajuste

Me quedo con dos variables (A,ω) para poder graficar

La sup tiene un mínimo en el set de valores que es mi estimador.

En vez de tener intervalos de confianza tengo estas elipses de confianza

A partir de las elipses puedo estimar mis errores



Cuadrados mínimos no lineales

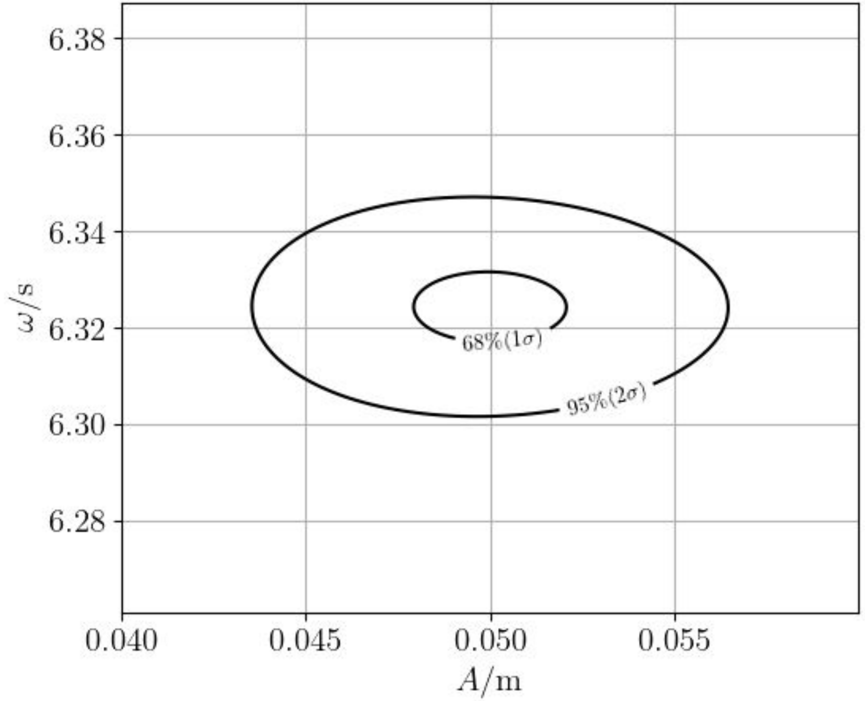
Consejo: Estimar cuánto valen mis parámetros y darle esta info al ajuste

Me quedo con dos variables (A,ω) para poder graficar

La sup tiene un mínimo en el set de valores que es mi estimador.

En vez de tener intervalos de confianza tengo estas elipses de confianza

A partir de las elipses puedo estimar mis errores

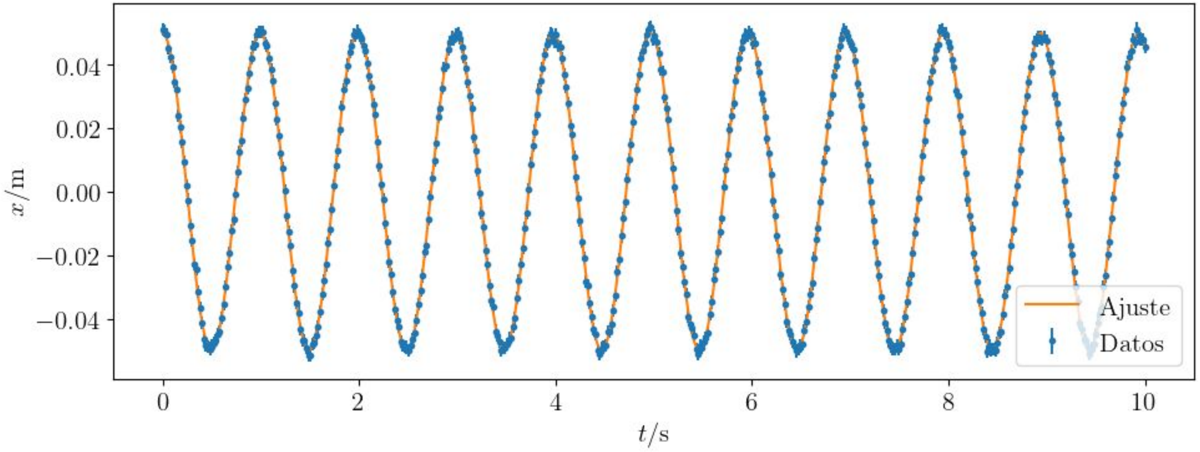


Cuadrados mínimos no lineales

Ahora tengo mis parámetros que minimizan los residuos, puedo ver qué tan bueno es mi ajuste.

χ^2 mínimo: 125.37

χ^2 reducido: 0.25



$$A = (0.0500 \pm 0.0001)\,\mathrm{m}$$
$$\omega = (6.3242 \pm 0.0002)\,\mathrm{s}^{-1}$$
$$\phi = (0.0036 \pm 0.0009)\,\mathrm{rad}$$
$$C = (0.0001 \pm 0.0020)\,\mathrm{m}$$

Qué vamos a hacer

Leer la guía

Mediciones:

- Resorte en el caso estático.
- Resorte en caso dinámico

Análisis:

- Incertezas estadísticas
- Propagación de incertezas
- Cuadrados mínimos lineales y no lineales

Qué vamos a hacer

Leer la guía

Mediciones:

- Resorte en el caso estático.
- Resorte en caso dinámico

Análisis:

- Incertezas estadísticas
- Propagación de incertezas
- Cuadrados mínimos lineales y no lineales

Qué vamos a hacer

Es importante que comparen de alguna manera los métodos

¿qué observables pueden obtener para compararlos?

Extra y por si las cosas no dan muy bien, los papers de Arrieta y Cushing