

Laboratorio 2

Material para leer previamente a las clases

Primer cuatrimestre 2024

Miércoles 14-20 h

24 de septiembre de 2024

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Objetivo de este cuaderno	7
1.2. Generalidades sobre ondas	7
1.3. Guía de lectura	11
2. Ondas de ultrasonido	13
2.1. Los piezoelectrinos como transductores de ultrasonido	15
2.2. Calibración y regresión lineal	18
2.3. Modelando la respuesta en frecuencias del par emisor-receptor	20
2.4. Características de las ondas emitidas por los piezoelectrinos	22
2.5. Repaso de ondas en gases y condiciones de borde	29
2.6. Interferencia de ondas de ultrasonido	31
2.6.1. Interferómetro de Fabry-Pérot acústico	32
2.6.2. Interferómetro de Young acústico	34
3. La respuesta del detector en las mediciones	39
3.1. Convolución: operación matemática	41
3.2. Convolución: intrínseca en el proceso de medición	45
3.3. El detector ideal y el real	46
4. Ondas estacionarias	49
4.1. Ondas estacionarias en cuerdas	52
4.1.1. Condiciones de contorno	52
4.1.2. Cuerda con dos extremos fijos	53
4.1.3. Cuerda con un extremo libre y uno fijo	54
4.1.4. Cuerda con un extremo fijo y otro forzado	55
4.1.5. Experimento: ondas estacionarias en cuerdas.	57
4.2. Ondas estacionarias en tubos	58

4.2.1.	Condiciones de borde en tubos	59
4.2.2.	Modos normales en tubos	61
4.2.3.	Experimentando con tubos: el tubo de Kundt	62
5. Composición de señales		65
5.1.	Recordando algunas cosas vistas en Física 2	67
5.1.1.	La serie y la transformada de Fourier	67
5.1.2.	Ejemplo del uso de la serie de Fourier en el problema de condiciones iniciales en sistemas acotados	69
5.1.3.	Ejemplo del uso de la transformada de Fourier en óptica	72
5.2.	Sintonizando señales con los piezoeléctricos	72
5.3.	Sintonizando señales periódicas	73
5.4.	Respuesta impulsiva de un sistema	76
5.4.1.	Respuesta al impulso	78
5.4.2.	Respuesta al escalón	80
5.5.	Frecuencia de muestreo y transformada de Fourier	83
6. Ondas electromagnéticas		89
6.1.	Polarización de la luz	91
6.2.	Fenómenos que polarizan la luz	93
6.2.1.	Polarización por reflexión	94
6.2.2.	Polarización por dicroísmo	95
6.2.3.	Polarización por dispersión (scattering)	97
6.2.4.	Polarización por birrefringencia	100
6.3.	Detectores de luz	102
6.4.	Características de los láseres	104
6.4.1.	Polarización	107
6.4.2.	Estabilidad Temporal	108
6.4.3.	Distribución espacial de intensidad	109
6.4.4.	Divergencia	110
7. Difracción		111
7.1.	La integral de Kirchhoff	111
7.1.1.	Aproximación de Fresnel	113
7.1.2.	Aproximación de Fraunhofer	115
7.1.3.	El truco de la lente	116

7.2. Difracción por una rendija rectangular	117
7.3. Máscaras complementarias	120
8. Lentes y sistemas formadores de imágenes	123
8.1. Sistemas de lentes simples	123
8.1.1. La ecuación de la lente, las bases de la óptica geométrica	124
8.1.2. Apertura numérica, profundidad de foco y resolución	125
8.2. Sistemas formados por varias lentes	127
9. Espectrometría	129
9.1. Espectrómetros	131
9.2. La detección en espectrometría	131
9.3. Redes de difracción	132
9.4. La difracción de una fuente no monocromática	135
9.5. Resolución	138
9.5.1. La red de difracción: resolución límite o resolución limitada por difracción o poder resolvente cromático	140
9.5.2. La rendija de entrada	141
9.5.3. Los píxeles en el detector	143
9.6. Estimación de la resolución	143
9.7. Medición de absorbancia	144
9.8. Experimento	145
10. Apéndice	147
10.1. Transformada de Fourier de la señal del Michelson, alimentación sinusoidal	147
10.2. Transformada de Fourier de la señal del Michelson, alimentación triangular	148
10.2.1. Transformada de Fourier del producto de dos exponenciales	150
10.2.2. Todas las frecuencias	151
10.3. Intentemos otra forma más directa	152
10.3.1. Solución de la integral	152

Capítulo 1

Introducción

1.1. Objetivo de este cuaderno

El material presentado en este cuadernillo es de lectura **obligatoria** y **previa a la clase** de laboratorio. Incluye conceptos aprendidos en Física 2 y conceptos sobre mediciones que veremos en este laboratorio. No pretende ser un repaso teórico exhaustivo y debe ser complementado con libros sobre ondas y óptica y técnicas de medición. Además se incorporan propuestas de mediciones o preguntas **para pensar antes de la clase**. Es decir, es una invitación a pensar en qué medir y cómo medir, pero no una guía de cómo hacerlo. Al inicio de cada clase discutiremos lo que ustedes pensaron respecto al material y sobre cómo hacer los experimentos. No se darán clases teóricas por lo que es **obligatorio** venir al laboratorio con el material leído. Conocer el material de este texto: ¿es necesario? ¡Sí! Los conceptos son fundamentales para entender ondas en distintos medios y entender bien los experimentos que estamos haciendo. ¿Es suficiente? ¡No! Siempre podemos aprender más si hacemos nuestras propias búsquedas. Se recomienda fuertemente leer la bibliografía.

Dado que utilizaremos el mismo material durante todo el semestre, deben elegir el par emisor-receptor cuyo número sea igual al número de tu cuarto y usar el mismo sistema durante todo el laboratorio.

1.2. Generalidades sobre ondas

En esta materia realizaremos experimentos empleando ondas de distintos tipos: ondas mecánicas transversales (vibraciones en cuerdas) y longitudinales (ondas acústicas), y ondas electromagnéticas transversales. Todas ellas satisfacen la ecuación de ondas (por

simplicidad aquí tomamos el caso unidimensional). La ecuación de ondas unidimensional para un medio lineal, isótropo y homogéneo, está dada por

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

donde $\Psi(x, t)$ representa a la perturbación en el espacio (desplazamiento longitudinal de partículas en un gas o líquido, presión o densidad para el caso de ondas acústicas en aire, desplazamiento transversal en una cuerda o campo electromagnético para el caso de la luz), x es la coordenada espacial y t el tiempo. La velocidad de propagación de las ondas (v) depende de las características del medio en que estas se propaguen y del tipo de onda. En la tabla 1.1 se observa la dependencia de la velocidad de propagación para las ondas que serán estudiadas en este laboratorio.

	Cuerdas Ondas de desplazamiento (transversales)	$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$	T tensión [N] μ densidad lineal [kg/m]
mecánicas	Acústicas Ondas de presión, densidad (longitudinales)	Gases y líquidos $v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ Gases: $K = \gamma P$	K módulo de compresibilidad [Pa] ρ densidad [kg/m ³] γ , coeficiente de dilatación adiabática P , presión del gas [Pa]
		Sólidos $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	E , módulo de Young [Pa] ρ , densidad [kg/m ³]
electromagnéticas	Campo electromagnético:	$v = \frac{c}{\eta}$	η índice de refracción $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ velocidad de la luz en vacío

Tabla 1.1: Velocidad de propagación para ondas mecánicas que se propagan en distintos medios y ondas electromagnéticas.

Una posible solución de la ecuación de ondas es una onda que se propaga hacia la derecha ($x > 0$) y puede escribirse como

$$\Psi_+(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi_A), \quad (1.2)$$

en donde A es la amplitud, φ_A una fase inicial, ω es la frecuencia y k el número de onda. También se puede usar la notación compleja para escribir a la función de onda

$$\Psi_+(x, t) = A e^{-i(kx - \omega t + \varphi_A)}, \quad (1.3)$$

lo que hace más fácil realizar ciertas operaciones, pero el verdadero significado físico lo tiene la parte real. Además podemos definir a la fase de la onda como

$$\Phi_+(x, t) = kx - \omega t + \varphi_A. \quad (1.4)$$

Análogamente, la onda que se propaga hacia la izquierda ($x < 0$) también es solución de la ecuación de ondas, y puede escribirse como

$$\Psi_-(x, t) = B \cos(kx + \omega t + \varphi_A). \quad (1.5)$$

Supongamos que tomamos una foto instantánea de la onda, de modo que observamos la dependencia con la coordenada espacial como se muestra en la figura 2.6. La amplitud de la onda es la distancia entre la cresta y el valor cero de $\Psi(x, t)$. La fase inicial φ_A corresponde al valor de fase del primer máximo, es decir, a cuánto se desplaza el primer máximo respecto a la función patrón $\cos(kx)$. La longitud de onda, λ , es la distancia en que la onda cubre un ciclo completo, y es además la distancia entre dos puntos idénticos en fase, es decir, puntos en el espacio en que la onda tiene igual amplitud y pendiente. Observar que no es necesario comenzar a medirla desde un máximo. Podría medirse desde cualquier punto en la onda, hasta el siguiente punto de igual fase. El número de onda está relacionado con la longitud de onda como $k = 2\pi/\lambda$.

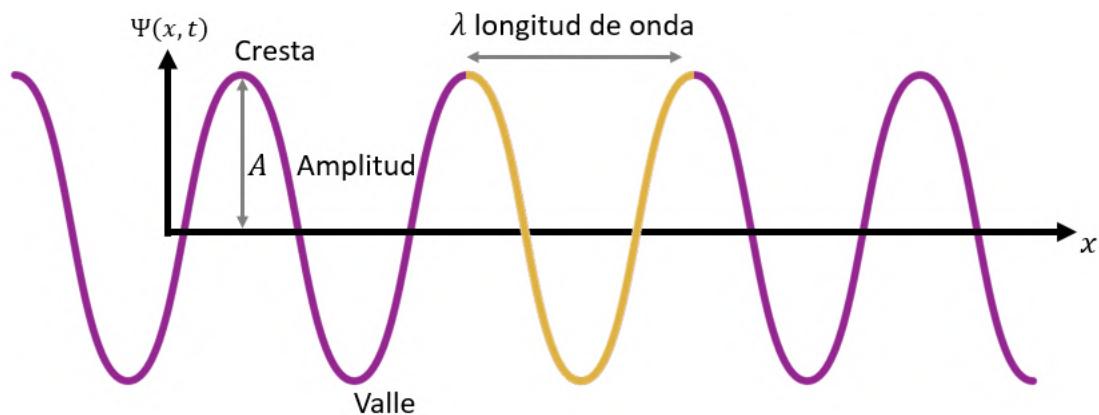


Figura 1.1: Propagación en el espacio de la onda para un tiempo t .

Análogamente, podemos pararnos en un punto del espacio y medir la evolución temporal de la onda, como se muestra en la figura 1.2. De esta forma podemos definir el período τ (cuándo dura un ciclo completo o el tiempo en que la fase tarda en tomar el mismo valor), la frecuencia $\nu = 1/\tau$ (número de oscilaciones por segundo) y la frecuencia angular $\omega = 2\pi\nu$.

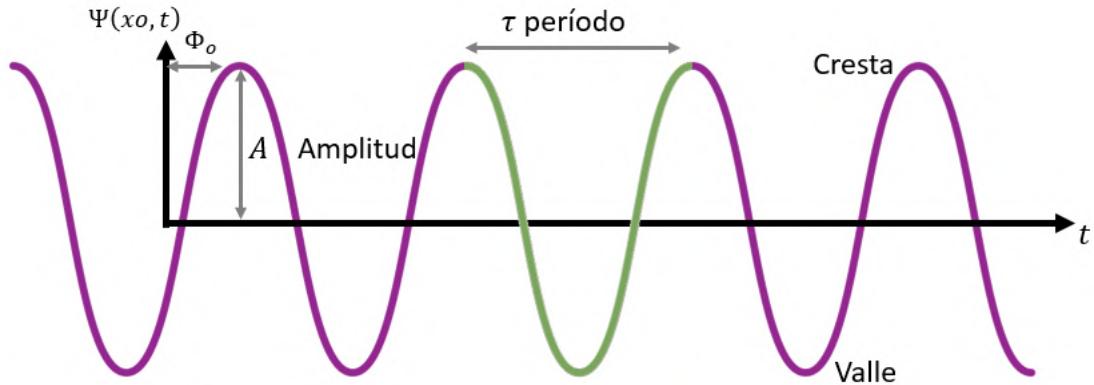


Figura 1.2: Propagación de la onda en un punto del espacio x_o .

Consideremos la relación entre las propiedades espaciales y temporales. Una manera sencilla de explorar esta conexión es sustituir la solución de la ecuación 1.5 en la ecuación de ondas. Esto nos permite obtener la relación de dispersión de las ondas, que en el caso de un medio no dispersivo (v independiente de ω), es lineal:

$$\omega = v k. \quad (1.6)$$

¿Qué implica que la relación entre ω y k sea lineal? En una primera lectura podemos decir que todas las ondas, independientemente de su frecuencia, se propagan con la misma velocidad. Esto es especialmente importante porque significa que si tengo un paquete de ondas (superposición de ondas de distintas frecuencias) en un medio, este se propaga sin deformarse. A los fines prácticos esto es relevante, por ejemplo, porque puedo transmitir información y no perderla.

Supongamos entonces que ahora observamos una onda monocromática (es decir con una única frecuencia) propagándose y tomamos dos fotos en los tiempos $t = 0s$ y $t = 1s$. Considerando el esquema de la figura 1.3, y que la frecuencia es el número de veces que la onda pasa por un mismo punto en el espacio por segundo, diríamos que la onda que estamos observando tiene una frecuencia $f = 1,75\text{Hz}$. Si la onda se propaga con velocidad v , la distancia que recorre la onda en $1s$ es $d = v t = v 1s$. El número de ciclos de la onda que hay en esa distancia es d/λ , que es igual al número de ciclos de la onda que pasan por el punto del espacio indicado con línea entrecortada; es decir,

$$f = \frac{d}{\lambda} = \frac{v t}{\lambda} = \frac{v 1s}{\lambda}. \quad (1.7)$$

Entonces,

$$f = \frac{v}{\lambda} \rightarrow \omega = vk. \quad (1.8)$$

Esto indica que en un período de oscilación τ la onda se propaga una longitud de onda. Hallamos la relación de dispersión solamente suponiendo que la velocidad de propagación es constante.

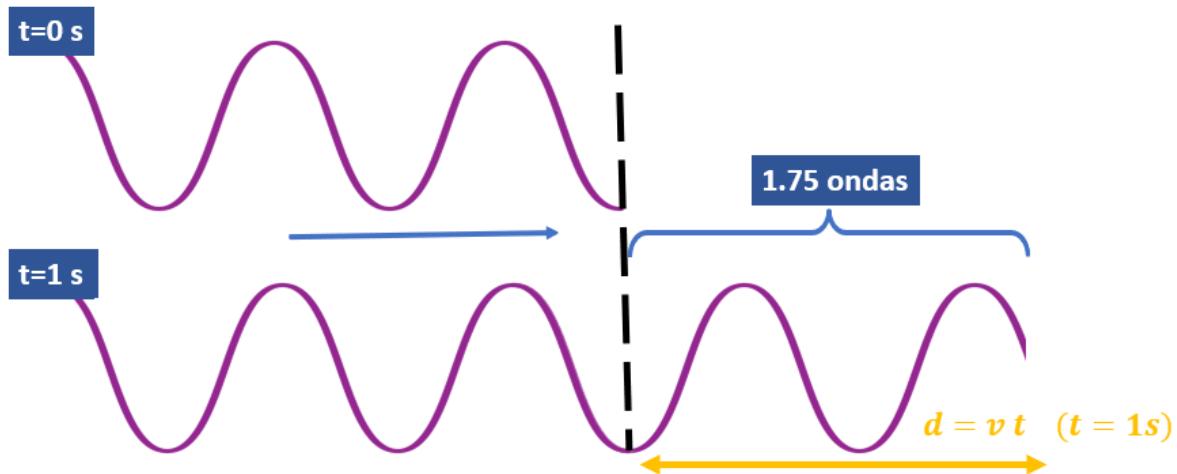


Figura 1.3: Propagación de una onda monocromática vista en los tiempos $t = 0$ s y $t = 1$ s.

Debido a que la ecuación de ondas es lineal, es válido el principio de superposición. Por lo tanto, la solución más general es una suma de ondas como la de la expresión 1.5 con distintas frecuencias, fases y amplitudes.

$$\Psi(x, t) = \sum_k [A_k \cos(kx - \omega t + \varphi_{A,k}) + B_k \cos(kx + \omega t + \varphi_{B,k})] \quad (1.9)$$

Recordar que los valores de A_k , B_k , $\varphi_{A,k}$ y $\varphi_{B,k}$ se determinan a partir de las condiciones iniciales, y que cuando las ondas se propagan en medios confinados los valores de k (y por lo tanto ω) se discretizan (solo algunas ondas pueden propagarse en el medio confinado).

1.3. Guía de lectura

Se completará esta tabla a lo largo del cuatrimestre

Clase	Lectura previa	Lectura posterior
Clase 1: Caracterización de respuesta en frecuencia y linealidad de par emisor receptor piezoelectrónico	Capítulo 1: introducción Capítulo 2 Secciones: hasta 2.2	Capítulo 2 Secciones: 2.2 y 2.3
Clase 2: Decaimiento de la amplitud con la distancia Longitud de onda	Capítulo 2 Secciones: 2.4	
Clase 3: Interferencia de Ondas de ultrasonido	Capítulo 2 Secciones 2.5, 2.6	Capítulo 3
Clase 4 y 5: Ondas estacionarias	Capítulo 4	
Clase 6: Composición de ondas	Capítulo 5 (como mínimo hasta la sección 5.4)	Lo que haya quedado del capítulo
Clase 7: Caracterización de un láser-polarización	Capítulo 6 (como mínimo secciones 6.1 y 6.2)	Lo que haya quedado del capítulo
Clase 8 Difracción	Capítulo 7 (como mínimo secciones 7.1 y 7.2)	Lo que haya quedado del capítulo
Clase 8 Lentes	Capítulo 8	

Capítulo 2

Ondas de ultrasonido

Las ondas de ultrasonido son ondas acústicas cuyas frecuencias son mayores que el umbral del oído humano ($\sim 20\text{KHz}$). En la figura 2.1 se pueden observar las frecuencias típicas junto con algunas fuentes que las generan o aplicaciones. Como toda onda acústica, es longitudinal y se propaga por colisiones entre partículas. Por lo tanto, la velocidad de propagación depende de la densidad de partículas y de la temperatura (no pueden propagarse en vacío).

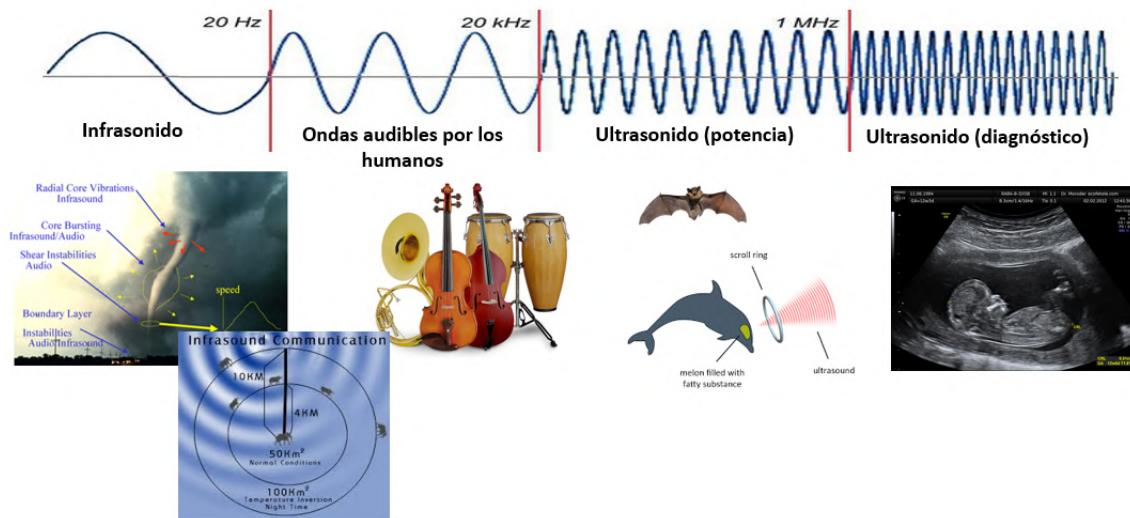


Figura 2.1: Espectro de las ondas acústicas y posibles fuentes y/o usos de estas ondas.

Empecemos estimando órdenes de magnitud de los distintos tipos de ondas acústicas. Esto es importante sobre todo cuando queremos hacer experimentos; conocer el orden de magnitud de las variables que uno espera medir permite definir cuáles son los instrumentos adecuados para realizar la medición, en cuanto a precisión, exactitud, rango, etc. En este sentido, les sugerimos los siguientes ejercicios:

Tarea:

- a) Las ondas de ultrasonido, ¿se propagan en todos los medios? Buscar velocidades típicas en diferentes medios. Viajan más rápido por sustancias calientes que por sustancias frías, ¿por qué? Buscar bibliografía para obtener datos medidos.
- b) Completar la tabla 2.1 y pensar si las cantidades definidas pueden ser medidas con los instrumentos conocidos. Calcular, para algunas frecuencias (ν) en el rango del sonido y del ultrasonido, la frecuencia angular (ω), el período (T), el número de onda (k), la longitud de onda (λ) en las unidades indicadas. Suponer que las ondas se propagan en un medio lineal cuya relación de dispersión es $\omega = c_s k$, con c_s la velocidad de propagación de la onda en el medio. Tomar valores para c_s de bases de datos.

Cantidad\rango	sonido	Ultrasonido de potencia	Ultrasonido diagnóstico
ν [Hz]			
$\omega = 2\pi\nu$ [1/s]			
$T = 2\pi/\nu$ [s]			
k [1/m]			
λ [cm]			

Tabla 2.1: Completar eligiendo distintas frecuencias en los rangos indicados y distintos materiales en donde se propagan las ondas.

En la primera etapa de la materia trabajaremos con piezoelectrinos (PE), que son materiales cristalinos o amorfos capaces de emitir y detectar ondas de ultrasonido ¡Veamos cómo!

2.1. Los piezoeléctricos como transductores de ultrasonido

La piezoelectricidad es un fenómeno que ocurre en determinados cristales que, al ser sometidos a tensiones mecánicas, adquieren una polarización eléctrica, es decir, una distribución de carga eléctrica interna. Esto lleva a que entre sus superficies aparezca una diferencia de potencial. Esto nos dice, por ejemplo, que es posible encender un LED conectándolo a un piezoeléctrico (PE) sobre el que se ejeran distintos tipos de fuerzas mecánicas (presión, extensión, torsión). En la figura 2.2(a)- línea superior- se observa esquemáticamente como al ejercer deformaciones en un cristal PE se genera una diferencia de tensión entre sus dos superficies. Ejemplos de PE cerámicos o cristalinos (cuarzo) se pueden observar en la figura 2.2(b). Los primeros pueden ser encontrados en los parlantes *speakers* y normalmente su respuesta en frecuencia es ancha. Los cristalinos, en cambio, son utilizados en relojes muy precisos o como señales de referencia con frecuencias muy estables (pronto veremos por qué).

Este fenómeno también ocurre a la inversa: los PE se deforman bajo la acción de fuerzas internas al ser sometidos a un campo eléctrico, como se esquematiza en la figura 2.2(a)- línea inferior-. Las deformaciones de los piezoeléctricos son tan pequeñas (decenas de nanómetros a centenas de micrones) que necesitamos de técnicas ultra-precisas para poder medirlas. ¿Se te ocurre cómo? ¡En la última práctica del curso vamos a aprender estos temas! El efecto PE es normalmente reversible: al dejar de someter a los cristales a un voltaje externo o campo eléctrico recuperan su forma.

Los cristales piezoeléctricos también se conocen como transductores piezoeléctricos. Los transductores son dispositivos capaces de convertir algún tipo de energía en energía eléctrica, y por eso se los utiliza para realizar mediciones. Por ejemplo, pueden convertir energía mecánica, lumínica, etc., en una señal eléctrica y viceversa. Existen muchos tipos de transductores que iremos estudiando en el curso. Los transductores PE pueden convertir presión o *stress* mecánico en una señal eléctrica (sensores de fuerza) o pueden convertir una señal eléctrica en un movimiento físico (actuador de movimiento).

Debido a que típicamente el fenómeno de piezoelectricidad es **lineal** (a mayor tensión, mayor desplazamiento), cuando se alimenta al PE con una señal armónica, las deformaciones mecánicas en él también serán armónicas, con una amplitud que dependerá de la frecuencia. Dado que esta oscilación armónica está confinada en el espacio (el PE tiene un tamaño finito), habrá ciertas frecuencias para las cuales la transferencia de energía

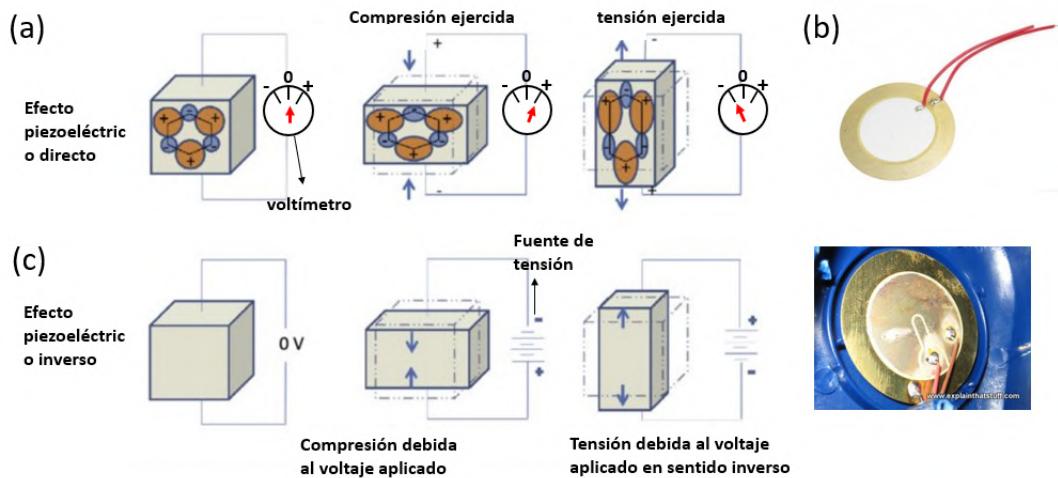


Figura 2.2: (a) Efecto piezoelectrico directo: se mide una tensión en el voltímetro al comprimir, expandir, tensionar al material. (b) Un piezoelectrico típico que se encuentra en los parlantes (arriba), y uno típico que se usa para generar señales precisas en frecuencia (abajo). (c) Efecto piezoelectrico inverso: al aplicar una diferencia de tensión con una fuente el material se deforma. Figura adaptada de ref. [?].

eléctrica-mecánica sea máxima, y otras para las cuales ésta sea nula (¿Cómo podremos estimar estas frecuencias?). Entonces, el PE es un sistema resonante y, como para cualquier otro sistema resonante, se espera que la respuesta en frecuencias sea una “campana”, ¿será cierto?

Cuando el PE oscila, produce movimiento del aire en su entorno. La perturbación del aire se propaga como una onda acústica, con la misma frecuencia que la oscilación mecánica. ¿Cómo es la amplitud de la onda generada en relación a la amplitud de la alimentación? ¿Y en relación a la amplitud de oscilación mecánica? ¿Cómo harías un experimento que te permita responder a estas preguntas?

Debido al efecto PE estos pueden actuar tanto como emisores o como receptores. Siendo que usamos PE tanto para generar como para detectar a las ondas de ultrasonido, nos referimos a los dos PE como par emisor-receptor. La medición que realicemos va a estar influenciada tanto por la respuesta del emisor como por la respuesta del receptor.

En cuanto a las aplicaciones, su capacidad de generar movimientos pequeños y controlables por la tensión de alimentación permite que estos sean utilizados, por ejemplo, en posicionadores de gran precisión que se utilizan en microscopía o para estabilizar vi-

braciones en sistemas ópticos. Su capacidad de generar y detectar ondas de ultrasonido permite utilizarlos para detectar objetos y medir distancias (¡como los murciélagos!).

Para pensar: Buscar en una hoja de datos (pedir en el pañol el modelo del PE disponible en el laboratorio) los tamaños típicos de los PE que producen ondas de ultrasonido y buscar la velocidad de propagación de las ondas de ultrasonido en el cuarzo. Típicamente el PE tendrá forma de disco de diámetro d y altura h . Suponer entonces que el PE oscila en el modo más bajo, cuya frecuencia es igual a la del modo fundamental de una cuerda con dos extremos fijos (¿por qué?). ¿A qué frecuencias se espera que el PE resuene? ¿Su oscilación es en el diámetro o en el alto?

Experimental 1: De lo explicado se desprenden dos posibles caracterizaciones a realizar sobre el par emisor-receptor:

- a. Caracterización de la amplitud de la onda de ultrasonido (medida en el receptor) en función del voltaje de alimentación (provisto por el generador de funciones). A partir de ella se puede determinar el rango en donde la respuesta es lineal. ¿Por qué es importante conocer el rango lineal?
- b. La respuesta en frecuencias, conocida como *campana de resonancia* (amplitud de la señal medida en el receptor en función de la frecuencia de la señal de alimentación).

El montaje experimental sugerido (para la mayoría de los experimentos de ultrasonido) es el que se observa en la figura 2.3, en donde se encuentra al emisor y al receptor enfrentados, montados sobre un riel y a una distancia D entre sí. El emisor se conecta a un generador de funciones mediante un cable BNC. La señal en el receptor se mide empleando un osciloscopio. De ser necesario utilizar una señal de referencia para el *trigger*, se puede emplear la señal de alimentación.

Pensar cuál es la mejor forma de implementar esta experiencia, en particular para el ítem a.: ¿Cuál es la distancia óptima entre el emisor y el receptor? ¿En qué frecuencia es conveniente realizar este estudio? ¿Debo usar *trigger* en el osciloscopio? ¿Por qué? ¿Qué pruebas experimentales podría hacer para responder estas preguntas?

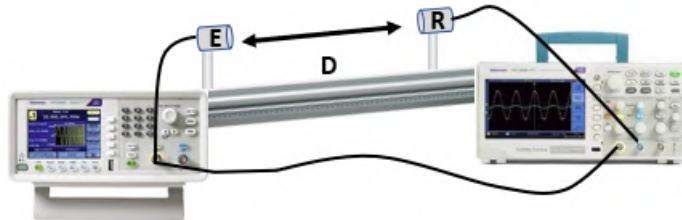


Figura 2.3: Esquema del dispositivo experimental propuesto. El par emisor-receptor se encuentran situados en un riel. El emisor se alimenta con un generador de funciones, a su vez esta señal se usa como trigger del osciloscopio. La señal en el receptor se mide empleando el osciloscopio.

2.2. Calibración y regresión lineal

Las caracterización de la amplitud en el PE receptor en función del voltaje de alimentación del emisor, nos permite obtener una curva a partir de la cual conociendo la alimentación podemos predecir cual es la amplitud en el receptor. A esta curva la llamaremos **calibración**. En particular, observamos que el comportamiento de las mediciones es lineal al menos en un rango de voltajes de alimentación, que es la calibración más simple y conveniente que podemos obtener. Una calibración lineal tiene una **sensibilidad** dada por la pendiente. A mayor pendiente, mayor sensibilidad; es decir, pequeñas variaciones en voltaje ofrecen grandes variaciones en amplitud de la señal medida. Podría existir un valor de saturación que haría que solo un rango de voltajes de alimentación sea útil (porque donde satura no hay variación de respuesta y por lo tanto a los efectos de calibrar no sirve).

Una vez determinado el rango donde el comportamiento es lineal, uno se puede proponer obtener un ajuste lineal para usarlo como función de calibración. Ajustar es encontrar los valores de los parámetros de la función que minimizan la distancia entre los datos y lo esperado por el modelo propuesto. Además, estas distancias se pesan por el error asignado a cada una, para darle más importancia a los datos que están mejor definidos. Es decir, se busca minimizar el siguiente valor:

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{y_{\text{medido}} - y_{\text{modelo}}}{y_{\text{error}}} \right)^2.$$

A estas funciones que dependen de los datos y dan información de los parámetros del modelo se los conoce como “estadísticos”. Por ejemplo, en el caso del χ^2 : si el modelo propuesto se corresponde a los datos medidos, al calcularlo se obtienen resultados que andan cerca de ν , que es la cantidad de grados de libertad del ajuste ($\# \text{datos} - \# \text{parámetros_ajuste} - 1$). Si $\chi^2 > \nu$, suele ser indicativo de un ajuste que no responde a los datos

o de que los errores fueron subestimados. Si, en cambio, $\chi^2 < \nu$, es factible que el modelo esté sobreajustado y que se esté ajustando el ruido, o que los errores hayan sido sobreestimados. A veces se utiliza el estadístico $\frac{\chi^2}{\nu}$, llamado “ χ^2 reducido” y se analiza su valor respecto de 1.

Ahora supongamos que se miden de nuevo los datos: es esperable que vayan a ser levemente distintos, aunque seguramente dentro de las incertezas experimentales. Entonces también es esperable que al calcular χ^2 vaya a dar levemente distinto. Bueno, resulta que si el modelo elegido es el correcto, los χ^2 que se van obteniendo en mediciones sucesivas no valen cualquier cosa, sino que siguen una distribución de probabilidades llamada χ_ν^2 (link):

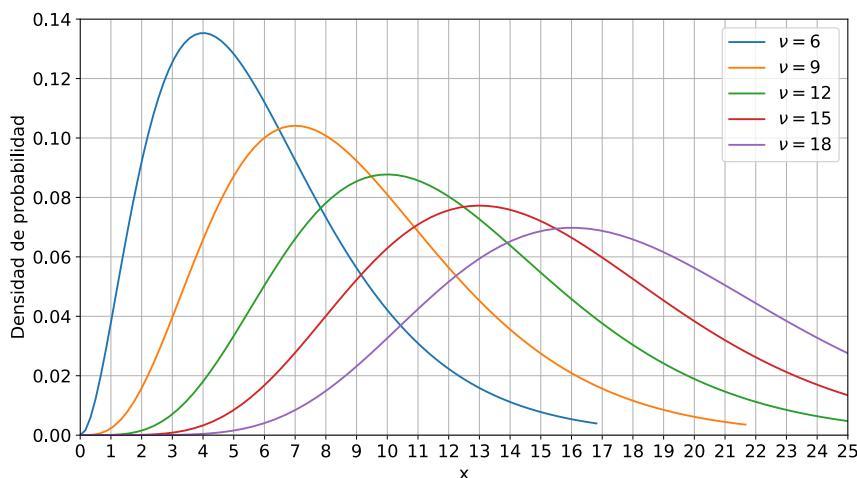


Figura 2.4: Distribuciones de probabilidad χ_ν^2 .

Entonces, por ejemplo, si se realiza un ajuste cuadrático (3 parámetros) sobre 19 datos, la curva a mirar es la de $\nu = 15$: la curva roja. Esta nos dice que, si es cierta la hipótesis de que el modelo elegido es el correcto, lo más habitual es obtener $\chi^2 = 13\dots$ ¡pero también es muy probable obtener valores entre 8 y 20!

Sin embargo, sí podemos decir que a medida que uno se aleja del máximo de la campana, se empieza a volver menos probable haber obtenido un determinado χ^2 . Entonces, el valor de χ^2 obtenido no habla necesariamente de que el ajuste sea bueno o malo, sino de qué tan probable es haber obtenido ese valor de χ^2 en el caso de que el modelo elegido para ajustar los datos es el que describe correctamente el fenómeno observado. Entonces, podemos decir que:

- Un χ^2 muy bajo o muy alto indica que sería muy extraño obtener esos datos si el modelo es el correcto. Es decir: o el modelo no es el correcto, o el modelo sí es el correcto pero se tuvo mucha mala suerte y justo lo medido no parece responder al modelo. En estadística se dice que se rechaza la hipótesis de que el modelo sea el correcto, a riesgo de que quizás se está en el caso de haber tenido mala suerte y que en realidad la hipótesis no pueda ser completamente descartada.

- Un χ^2 cercano a ν indica que los datos obtenidos son esperables si el modelo es el correcto. Es decir: o el modelo es el correcto, o las mediciones se parecen al modelo propuesto por una cuestión de azar. Por lo tanto, un χ^2 “bueno” no garantiza que el modelo sea el correcto, sino simplemente que el modelo propuesto ajusta lo suficientemente bien a los datos. En estadística se dice que no se puede rechazar la hipótesis de que el modelo sea el correcto.

Lo habitual es tomar algún criterio para determinar qué tan poco probable tiene que ser el χ^2 obtenido para rechazar la hipótesis de que el modelo ajusta a los datos. Cada disciplina suele usar criterios distintos, pero es habitual tomar un umbral de tolerancia del 5 % de probabilidad de equivocación. Y algo clave: ¡ni un “buen” χ^2 ni ningún estadístico **asegura** que el modelo sea el correcto!

En particular, el χ^2 no distingue si el ajuste pasa por arriba o por abajo de los datos, o cuántas veces los cruza, o si falta algún parámetro en el ajuste, o si algún parámetro está de más, o una infinidad de otros posibles criterios para determinar si el ajuste es bueno o malo. Entonces lo podemos complementar con algo que ya sabemos de Laboratorio 1: los residuos ($y_{\text{medido}} - y_{\text{modelo}}$) deben ser aleatorios y no estar correlacionados con ninguna otra variable, ni correlacionados entre sí. Si presentan una distribución no aleatoria, es indicativo de que el modelo no está ajustando bien a los datos.

2.3. Modelando la respuesta en frecuencias del par emisor-receptor

Al ajustar mediciones es crucial que los modelos seleccionados estén respaldados por fundamentos físicos sólidos. Esto garantiza que nuestras interpretaciones y predicciones estén en línea con las leyes de la física y que los resultados sean confiables y significativos para la comprensión de los fenómenos estudiados.

Propusimos que, debido al comportamiento lineal del PE con el voltaje de alimentación, si se alimenta a este con una señal armónica, sus oscilaciones mecánicas también serán armónicas. El modelo más sencillo que podemos pensar para el PE es entonces el del oscilador armónico amortiguado sometido a una fuerza externa armónica (el campo eléctrico generado por la alimentación), cuya ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_1 \frac{dx}{dt} + \omega_{o1}^2 x = \frac{F_o}{m} \cos(\omega t), \quad (2.1)$$

en donde γ_1 es la constante de amortiguamiento para el emisor, que en este caso representa pérdidas mecánicas por fricción, la fuerza externa representa la fuente de alimentación y el término lineal una fuerza restitutiva caracterizada por $\omega_{o1} = \sqrt{k/m}$.

Nos preocupamos ahora por la solución particular porque, como sabemos, la homogénea decae con un tiempo característico $1/\gamma_1$. En notación compleja, dicha solución está dada por

$$x_E(\omega, t) = \frac{F_o}{m} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega_{o1}^2 - \omega^2) + i\omega\gamma_1}. \quad (2.2)$$

Recordemos que para que la solución tenga sentido físico, debemos tomar la parte real, de modo que la solución toma la forma $x_E^R(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, con $\tan(\phi) = \frac{-\gamma_1\omega}{(\omega_{o1}^2 - \omega^2)}$ y $A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_{o1}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1\omega)^2}}$.

Ahora bien, la ecuación 2.2 predice el desplazamiento del PE emisor cuando es alimentado por una fuente de tensión alterna, bajo un modelo muy simple que considera una única resonancia en ω_{o1} . Si el PE tuviera más resonancias, podríamos plantear una combinación lineal de soluciones similares a la de la ecuación 2.2 pero con distintas frecuencias ω_{oi} . Por otro lado, hasta ahora consideramos únicamente al PE emisor. Como mencionamos anteriormente las oscilaciones mecánicas del PE producen ondas de ultrasonido que se propagan con una amplitud proporcional a x_E hasta llegar al receptor. El receptor transforma a la onda de ultrasonido en vibraciones mecánicas y luego en una tensión. Idealmente el PE receptor tiene la misma frecuencia de resonancia que el emisor; sin embargo, esto no siempre es cierto.

Entonces, podemos plantear ahora una ecuación similar a la ecuación 2.1, considerando que la onda de ultrasonido que produce las oscilaciones mecánicas del PE receptor tiene una amplitud proporcional al desplazamiento del PE emisor x_E , es decir

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_2 \frac{dx}{dt} + \omega_{o2}^2 x = \alpha x_E(\omega, t), \quad (2.3)$$

en donde ahora consideramos que la constante de amortiguamiento γ_2 y la frecuencia característica ω_{o2} son distintas a las del PE emisor.

La solución particular de la ecuación 2.3 es

$$x_{ER}(\omega, t) = \frac{Be^{i\omega t}}{((\omega_{o1}^2 - \omega^2) + i\omega\gamma_1)((\omega_{o2}^2 - \omega^2) + i\omega\gamma_2)}, \quad (2.4)$$

donde B es una constante.

Como dijimos anteriormente, la solución que tiene sentido físico es la parte real de la ecuación 2.4, de modo que la solución toma la forma $x_{ER}^R(t) = C_{ER} \cos(\omega t + \phi_{ER})$, en donde

$$C_{ER} = B \sqrt{\frac{[(\omega_{o1}^2 - \omega^2)(\omega_{o2}^2 - \omega^2) - \omega^2\gamma_1\gamma_2]^2 + [(\omega_{o2}^2 - \omega^2)\omega\gamma_1 + (\omega_{o1}^2 - \omega^2)\omega\gamma_2]^2}{[(\omega_{o1}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1\omega)^2]^2[(\omega_{o2}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_2\omega)^2]^2}}. \quad (2.5)$$

Si ahora suponemos que $\omega_{o1} = \omega_{o2} = \omega_o$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$,

$$C_{ER} = \frac{B}{[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]}. \quad (2.6)$$

Para pensar: Las ecuaciones 2.5 y 2.6 consideran que los PE pueden ser modelados por osciladores armónicos simples con una única frecuencia característica, y pueden ser utilizadas para intentar ajustar a las mediciones. ¿Cómo se extiende este modelo si los PE están caracterizados por más de una frecuencia característica?

2.4. Características de las ondas emitidas por los piezoeléctricos

Como se mencionó con anterioridad, al alimentar al emisor con una onda armónica se producen ondas de ultrasonido que se propagan en el aire. Las ondas emitidas son tridimensionales, y para caracterizarlas mediremos la forma del frente de ondas (es decir, si es plano, esférico o cilíndrico), la longitud de onda, el período, la frecuencia, el ángulo de divergencia, la distribución de amplitud, etc.

La ecuación de ondas tridimensional para un medio lineal, isótropo y homogéneo, está dada por

$$\frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t), \quad (2.7)$$

donde $\Psi(\vec{r}, t)$ representa a la perturbación en el espacio (desplazamiento o presión para el caso de ondas acústicas en aire), \vec{r} es el vector de coordenadas espaciales, t el tiempo y v la velocidad de propagación, que depende de las características del medio y de la frecuencia. Esta última cumple la relación de dispersión lineal de las ondas

$$\omega = vk, \quad (2.8)$$

donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de onda y λ la longitud de onda. La solución de esta ecuación puede escribirse como

$$\Psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \Phi_0), \quad (2.9)$$

en donde $A(\vec{r})$ es una amplitud dependiente de la posición, Φ_0 una fase inicial y \vec{k} el vector de ondas cuyo módulo es k . Podemos definir también a la fase de la onda como

$$\Phi(\vec{r}, t) = \vec{k}\vec{r} - \omega t + \Phi_0. \quad (2.10)$$

Nota: Se puede usar la notación compleja para escribir a la función de onda

$$\Psi(\vec{r}, t) = A_r e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \Phi_0)}, \quad (2.11)$$

lo que hace más fácil realizar ciertas operaciones, pero el verdadero significado físico lo tiene la parte real.

Además, por el principio de suposición, la solución más general es combinación lineal de todas las posibles soluciones de la ecuación (una suma de ondas con distintas frecuencias, amplitudes, vector de ondas).

Examinemos las soluciones de la ecuación de ondas. Éstas dependerán de la geometría del problema y de las características del medio, que por ahora supondremos lineal, isótropo y homogéneo. En esas condiciones las soluciones típicas son las ondas planas, las ondas esféricas y las ondas cilíndricas, pero existen otros tipos, por ejemplo los vórtices.

Para el problema en coordenadas cartesianas la solución más sencilla es una **onda plana**. Supongamos que la onda se propaga en la dirección \hat{z} , por lo que $\vec{k} = k\hat{z}$ y está

polarizada en \hat{x} . Por simplicidad también supondremos que la amplitud es constante, $A(\vec{r}) = A_0$ y que la fase inicial es cero, $\Phi_0 = 0$, aunque estas dos consideraciones no son necesarias. De este modo, la solución de la ecuación de ondas es

$$\Psi(\vec{r}, t) = A_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}, \quad (2.12)$$

siendo la fase $\Phi(z, t) = kz - \omega t$.

Ahora busquemos cuál es el conjunto de puntos en el espacio que oscilan con la misma fase. Para eso suponemos una fase constante ($\Phi(z, t) = cte$) y despejamos la variable z , obteniendo

$$z = \frac{\omega}{k}t + cte = vt + cte.$$

Es decir, la fase es constante en planos perpendiculares a la dirección de propagación \hat{z} . Decimos entonces que el **frente de ondas** es plano. Estos planos se propagan con la velocidad de propagación v (o velocidad de fase) hacia los z positivos. Además, por cómo definimos inicialmente a la onda, la amplitud también es constante en esos planos. En la figura 2.5 se puede observar un esquema de estos planos de fase y amplitud constante.

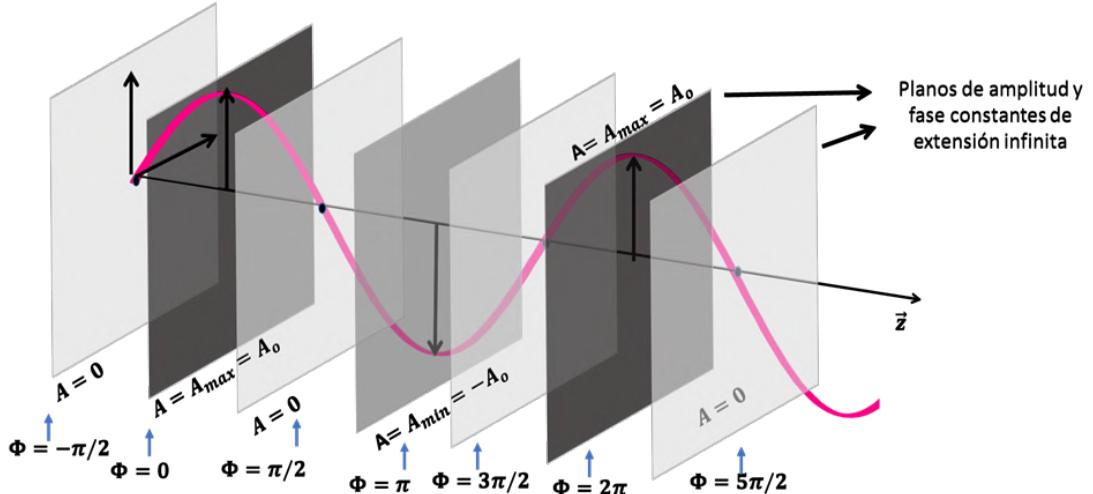


Figura 2.5: Esquema de planos de fase y amplitud constante de una onda ideal.

Nota: Análogamente podemos definir una onda que se propaga hacia z negativos con un solo cambio de signo en el vector de ondas \vec{k} : $\Psi(\vec{r}, t) = A_0 \cos(-kz - \omega t)\hat{x}$.

En la figura se puede observar que para $\Phi = 0$ y para $\Phi = 2\pi$ la onda tiene igual amplitud y la misma pendiente. Lo mismo pasa para $\Phi = -\pi/2$ y $\Phi = 3\pi/2$ o para

$\Phi = \pi/2$ y $\Phi = 5\pi/2$. La diferencia de fase entre estos planos es 2π . Es decir, existen dos planos separados en una distancia Δz , cuya distancia en fase es 2π . Veamos cual es esa distancia, resolviendo la siguiente ecuación:

$$\Phi(z + \Delta z, t) - \Phi(z, t) = 2\pi, \quad (2.13)$$

o lo que es lo mismo

$$k_z(z + \Delta z) - k_z z = 2\pi. \quad (2.14)$$

Despejando se obtiene que $\Delta z = \lambda$. Es decir que la distancia mínima entre planos de igual fase (solo difieren en 2π), o la distancia entre planos consecutivos de igual fase, es la longitud de onda λ . Esta situación se encuentra esquematizada en la figura 2.6, en donde se muestran dos planos de igual fase (frente de ondas) consecutivos separados por una distancia λ . Entonces, medir la longitud de onda, es medir la distancia entre planos de igual fase.

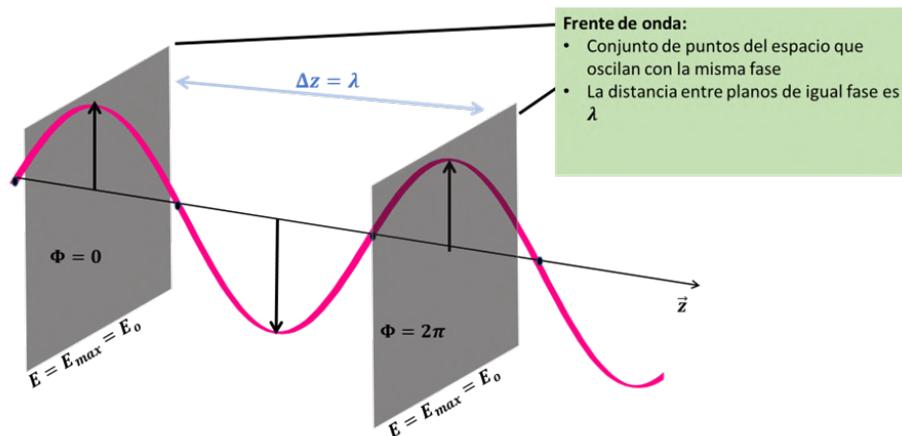


Figura 2.6: Se muestran dos planos de igual fase consecutivos separados por una distancia λ .

En general podemos obtener cómo se mueve el frente de ondas derivando la expresión de la fase y suponiendo que la fase es constante. Es decir:

$$\Phi(x, t) = k_z z - wt = \Phi_0,$$

y luego derivando

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} = k_z \frac{dz}{dt} - w = 0,$$

a partir de la cual podemos definir la velocidad de fase v_f como

$$\frac{dz}{dt} = \frac{w}{k_z} = v_f = v. \quad (2.15)$$

Vimos que, en el caso de tener una onda plana, la fase es constante en planos de extensión infinita. Análogamente se puede ver que para problemas con simetría esférica (fuentes puntuales) o simetría cilíndrica (ranuras o lentes cilíndricas), la fase se mantiene constante en esferas o cilindros, respectivamente. De este modo encontramos frentes de ondas esféricos o cilíndricos. El primer caso se encuentra esquematizado en la figura 2.7.

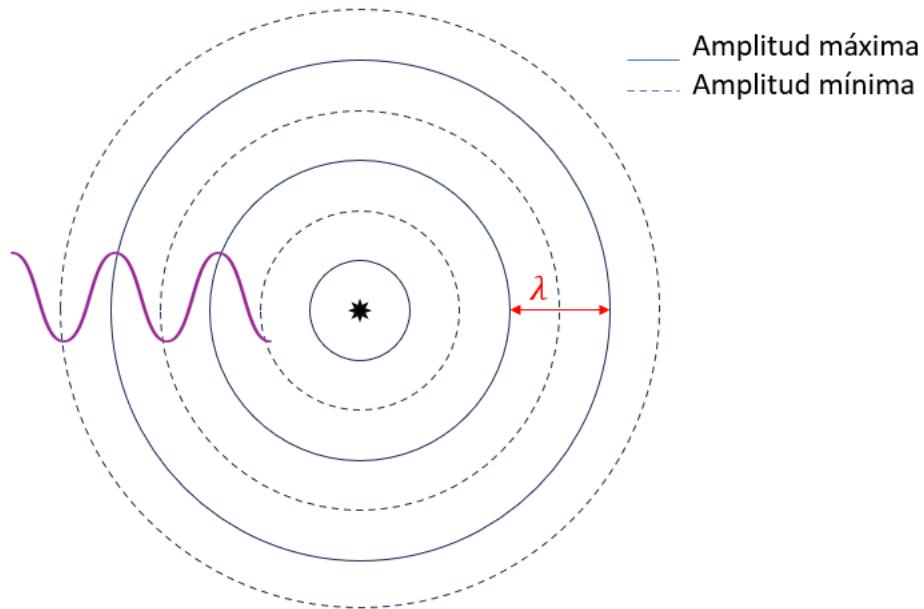


Figura 2.7: Esquema de un frente de ondas esférico. Las líneas continuas corresponden a la amplitud máxima de la onda (A/r), las líneas cortadas corresponden a la amplitud mínima de la onda ($-A/r$). La longitud de onda es la distancia entre esferas de igual fase.

Si resolvemos la ecuación de ondas para problemas con distintas simetrías, podemos obtener la dependencia de la fase y de la amplitud con la posición para las ondas cilíndricas y esféricas. En la figura 2.8 se muestran las características para distintos frentes de onda, en donde se usa que la intensidad de la onda es $I \propto |\Psi(\vec{r}, t)|^2$. Para cada tipo de fuente se muestra un diagrama del frente de ondas, y la dependencia de la amplitud y de la intensidad con la distancia. Por ejemplo, se puede observar que la amplitud no depende de la distancia en el caso de la onda plana, es inversamente proporcional a la raíz de la distancia en el caso de la onda cilíndrica, y es inversamente proporcional a la distancia en el caso de la onda esférica.

La dependencia de la intensidad con la distancia también se puede obtener empleando argumentos sobre la geometría del problema. Por ejemplo, calculemos la intensidad para una fuente puntual de potencia W que emite un frente de onda esférico como se esque-

matiza en la figura 2.9. En primer lugar tomemos una superficie esférica de radio r en el entorno de la fuente. La intensidad sobre la superficie es la potencia por unidad de área $S = 4\pi r^2$, es decir que

$$I = \frac{W}{S} = \frac{W}{4\pi r^2} \rightarrow A \sim \frac{\sqrt{W}}{r}.$$

Entonces, vemos que la amplitud es inversamente proporcional al radio. Además, se observa como a medida que aumenta el radio, la intensidad (potencia por unidad de área) disminuye.

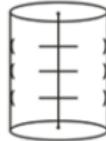
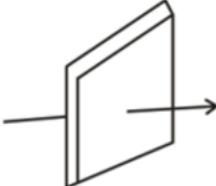
Frente de ondas	Fuente	Diagrama del Frente de ondas	Variación de la amplitud con la distancia	Variación de la Intensidad con la distancia
Esféricas	puntual		$A \propto \frac{1}{r}$	$I \propto \frac{1}{r^2}$
Cilíndricas	Lineal, rendija		$A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$	$I \propto \frac{1}{r}$
planas	Extensa y grande situada en distancias grandes		$A = cte$	$I = cte$

Figura 2.8: Tabla con la descripción esquemática de fuentes con un frente de ondas esférico, cilíndrico y plano. Se muestra además la dependencia de la amplitud y de la intensidad con la distancia.

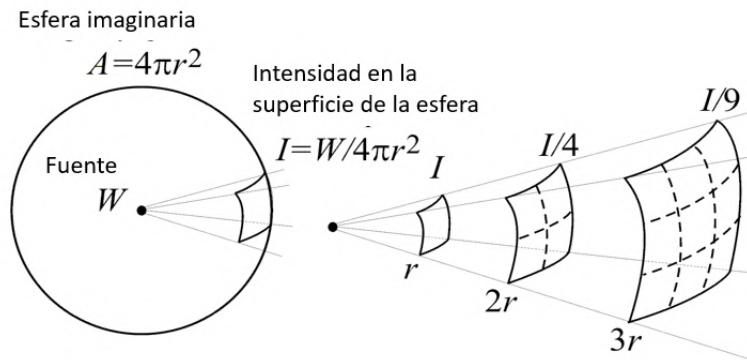


Figura 2.9: Esquema de la dependencia de la intensidad en función de la distancia radial para una fuente con frente de ondas esférico.

Ahora bien, hasta ahora hablamos de situaciones idealizadas en donde no tenemos restricción en la distribución de amplitud (la onda plana tiene amplitud constante en planos de extensión infinita, la onda esférica tiene amplitud constante en esferas). Sin embargo, dijimos que la hipótesis sobre la amplitud constante no era estrictamente necesaria. De hecho, en los montajes puede haber aperturas que recorten al frente de ondas o que produzcan difracción. En particular, los propios montajes de las fuentes hacen que estas no puedan ser consideradas ideales (ver en la figura 2.10 un ejemplo de montaje para PE). Además, si el haz se difracta en la apertura (comparar el tamaño del PE con la longitud de onda de la onda de ultrasonido) es probable que este sea divergente; es decir, que la región en donde la amplitud es distinta de cero crece con la distancia de propagación.

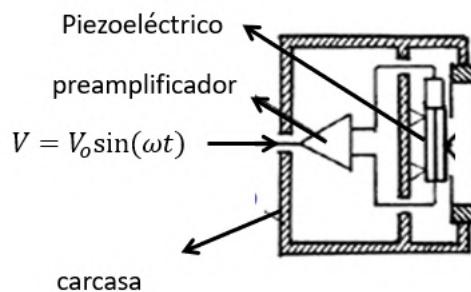


Figura 2.10: Un montaje posible para un PE. Se observa al PE montado dentro de una carcasa metálica. La línea punteada es una malla para proteger al PE. Se alimenta al PE con una señal armónica que se amplifica con un pre-amplificador.

Según lo discutido, para caracterizar a la onda deberíamos medir la longitud de onda, la dependencia de la amplitud con la distancia, determinar cuál es el frente de ondas, la divergencia, la distribución de amplitud en el plano transversal a la dirección de propagación. Vamos a dividir los experimentos según hagamos mediciones a lo largo de la dirección de propagación o en la dirección transversal.

Experimental 2: Mediciones a lo largo de la dirección de propagación:

- Medir amplitud en función de la distancia $A(\vec{r})$.
- Medir la longitud de onda (distancia entre planos de igual fase)

Experimental 3: Mediciones en la dirección perpendicular a dirección de propagación:

- Determinar cuál es el frente de ondas. Es decir, encontrar los planos, esferas o cilindros (o cualquier otra superficie) en donde la fase constante.
- Determinar cuál es la distribución de amplitud en el plano perpendicular a la dirección de propagación.
- Medir la divergencia del haz.

2.5. Repaso de ondas en gases y condiciones de borde

Recordemos que, dado que estamos tratando ondas acústicas que se propagan en un gas (aire), normalmente nos interesan las ondas de desplazamiento $\Psi(x, t)$ (cómo se desplazan las partículas en el gas), las ondas de presión $P(x, t)$ (cuáles son las fluctuaciones de presión ejercidas por las partículas en movimiento), y las ondas de densidad $\rho(x, t)$ (cuáles son las fluctuaciones de densidad inducidas por el movimiento de las partículas del gas). Recordemos que tanto la presión como la densidad se pueden obtener a partir de la onda de desplazamiento. En el caso de la presión, esta se puede estimar como el módulo de compresibilidad κ (en unidades de presión, por ejemplo Pa) por la variación de volumen ΔV respecto al volumen medio V_o , a partir de lo que se puede deducir que

$$P(x, t) = -\kappa \frac{d\Psi(x, t)}{dx}. \quad (2.16)$$

La presión está relacionada con la compresión o expansión del gas: cuando se comprime en un volumen más chico, aumenta la presión; cuando se expande a un volumen mayor, disminuye la presión.

En el caso de la densidad, se puede calcular como

$$\rho(x) = \rho_o \frac{d\Psi(x, t)}{dx}, \quad (2.17)$$

donde ρ_o es la densidad media.

Dado que el PE receptor puede medir variaciones de presión, escribamos las condiciones de borde para el desplazamiento y la presión, para una condición de borde cerrada como se esquematiza en la figura 2.11. Si las partículas están en el entorno de una pared, estas van a estar quietas respecto a dicha pared. Recordar que la función de onda de desplazamiento nos dice si las partículas se mueven a la derecha o a la izquierda, y cuánto lo hacen. Como en este experimento la pared es donde se refleja la onda, y las partículas están quietas, entonces la condición de borde es que la función de onda total (todas las ondas que viajan hacia la pared $\Psi^+(x, t)$ más todas las ondas que se reflejan en la pared $\Psi^-(x, t)$) es nula. Es decir

$$\Psi^+(0, t) + \Psi^-(0, t) = 0. \quad (2.18)$$

Esto implica que al reflejarse la onda de desplazamiento en dicha pared, hay un cambio de fase de π radianes dado que $\Psi^+(0, t) = -\Psi^-(0, t)$. En cuanto a las ondas de presión, en la pared es en donde se ejerce la presión máxima. Pensar que si todas las partículas se mueven hacia la pared, la presión es máxima. Esto es, que la derivada de la presión total sea cero en la pared; es decir,

$$\left. \frac{d[P^+(x, t) + P^-(x, t)]}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (2.19)$$

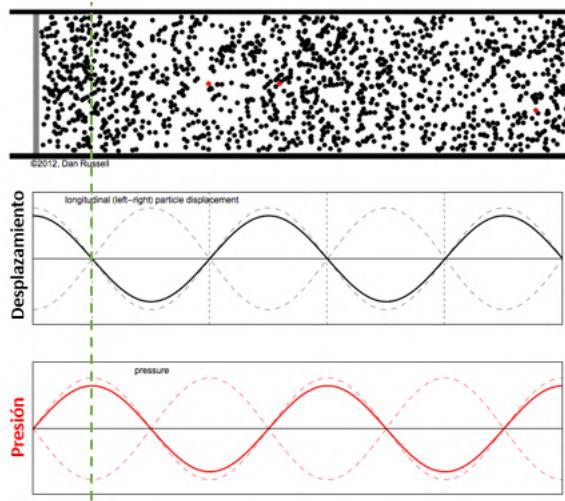


Figura 2.11: Condición de borde extremo cerrado. El desplazamiento total en la pared es nulo, la presión es máxima

Más adelante veremos otras condiciones de borde.

2.6. Interferencia de ondas de ultrasonido

Habránotado que, al medir la amplitud en función de la distancia, se observa una serie de ondulaciones periódicas montada sobre “la señal esperada”. Discutimos en clase sobre posibles explicaciones en base a la interferencia de ondas que se reflejan sucesivamente entre el emisor y el receptor.

Supongamos que tenemos dos fuentes de ondas esféricas como las que se muestran en la figura 2.7, situadas a una distancia d , tal como se esquematiza en la figura 2.12. Recorremos que las líneas continuas representan a la amplitud es máxima y las punteadas a la mínima. Podemos analizar cómo es la superposición de las ondas sobre los frentes de ondas y estimar cuál es la onda resultante. Supongamos por el momento que las amplitudes no dependen de la distancia radial, y veamos qué sucede al superponer dos líneas continuas o dos líneas punteadas. Las líneas continuas significan que la amplitud es máxima (A), de modo que la amplitud total en la superposición de dos líneas es $2A$. En las líneas punteadas la amplitud es $-A$, por lo que la suma en donde se superponen dos líneas punteadas es $-2A$. Dado que en la práctica detectamos la amplitud pico a pico, en ambos casos la medición será $2 \times 2A$ (recordar que la amplitud pico a pico es el doble del módulo de la amplitud en una señal periódica). Marcamos con puntos rojos a estos puntos en el esquema de la figura 2.12. En cambio, si se superpone una línea punteada y una continua, la

amplitud total es $A + (-A) = 0$; es decir, un mínimo de amplitud. Observar que, dado que la amplitud decrece con la distancia, es probable que los mínimos no sean nodos (¿por qué?).

La figura que resulta de unir mínimos y máximos forma hiperboloides. Si observamos entonces la línea que une a las dos fuentes, vemos que para la situación particular que graficamos, observamos máximos de intensidad separados por $\lambda/2$. Veamos en detalle qué sucede con la superposición de las ondas cuando medimos sobre una línea paralela a la línea que une a las fuentes, o sobre la línea que une a las fuentes.

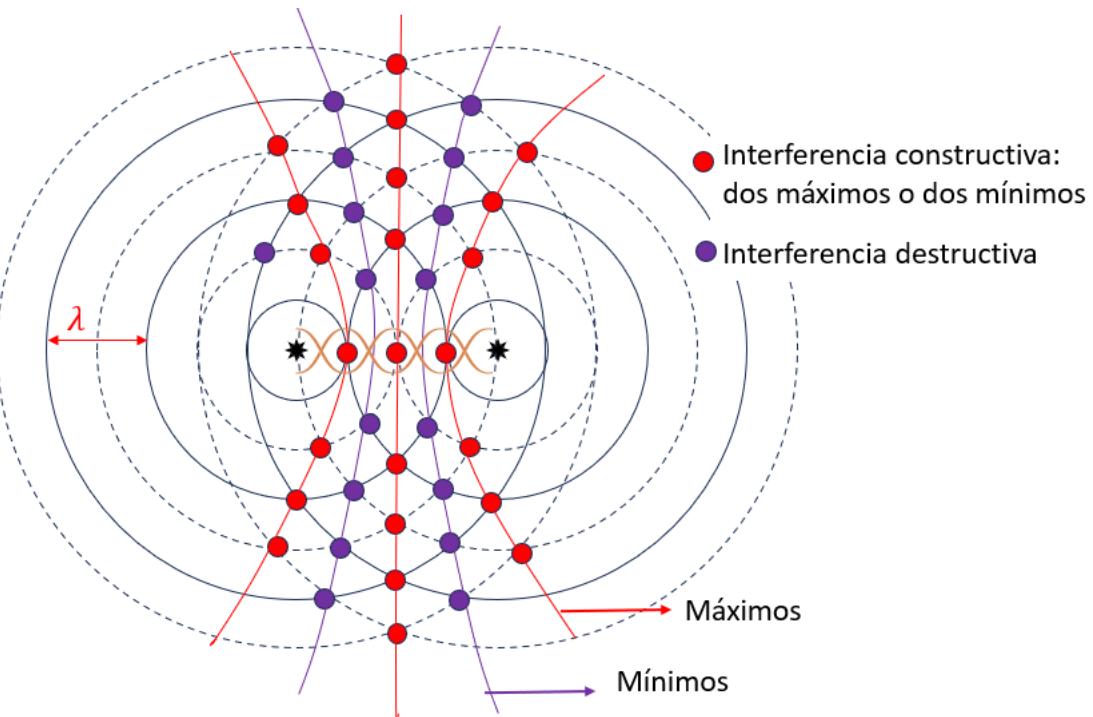


Figura 2.12: Superposición de dos ondas esféricas. En línea continua se esquematizan las crestas de cada onda de cada fuente, y en línea punteada los valles. Los puntos de encuentro de dos máximos o dos mínimos (en rojo) forman interferencia constructiva. Los puntos de encuentro de un máximo y un mínimo (cada uno de distinta fuente) forman interferencia destructiva. Esto genera una onda estacionaria que cada $\frac{\lambda}{2}$ tiene un nodo (o antinodo).

2.6.1. Interferómetro de Fabry-Pérot acústico

En óptica, el interferómetro de Fabry-Pérot, también conocido como resonador (o cavidad) óptico, consiste en dos espejos de alta reflectividad. Cuando la onda de entrada tiene una frecuencia cercana a una de las frecuencias de resonancia de la cavidad se producirá una realimentación positiva dentro de la misma. La contribución de la onda de entrada

se suma constructivamente a la onda circulante.

En el caso de las ondas de ultrasonido, la onda emitida se puede reflejar sucesivas veces en el emisor y el receptor, de manera de formar una onda estacionaria. Para encontrar la función de onda en este sistema se debe calcular la superposición de ondas que se refleja múltiples veces entre las dos superficies reflectantes e imponer condiciones de contorno. Podemos hacerlo tanto con las ondas de presión o con las de desplazamiento.

Podemos pensar al par emisor-receptor de ultrasonido como una cavidad resonante, análoga a un interferómetro de Fabry-Pérot, donde se produce una onda estacionaria, producto de la reflexión de la misma en el par. Describimos la onda emitida como:

$$P_+(x, t) = \frac{1}{x - x_e} \cos(\omega t - k(x - x_e)) \quad (2.20)$$

siendo x_e la posición del emisor. La onda reflejada por el receptor se describe a partir del coeficiente de reflexión R y la posición x_r del receptor:

$$P_-(x, t) = \frac{-1}{x - (2x_r - x_e)} R \cos(\omega t + k(x - (2x_r - x_e))) . \quad (2.21)$$

Con el mismo razonamiento podemos definir la presión de las ondas reflejadas dos ($\Psi_{++}(x, t)$) y tres ($\Psi_{--}(x, t)$) veces:

$$P_{++}(x, t) = \frac{1}{x - (-2x_r + 3x_e)} R^2 \cos(\omega t + k(x - (-2x_r + 3x_e))) , \quad (2.22)$$

$$P_{--}(x, t) = \frac{-1}{x - (4x_r - 3x_e)} R^3 \cos(\omega t + k(x - (4x_r - 3x_e))) . \quad (2.23)$$

Podríamos estudiar las contribuciones de orden mayor, pero se vuelven despreciables frente a la onda emitida inicialmente. Como resultado de estas reflexiones, el receptor medirá la suma de estas ondas, observando un efecto de interferencia entre las mismas. Para entender mejor lo que sucede, pueden ver la simulación en Colab “Cavidad_L2F.ipynb” (ver Campus).

Responder usando las simulaciones:

- a. ¿Están de acuerdo con que las ondas tengan esa pinta? Corroboren que estén bien calculadas.
- b. ¿Qué observan si ahora miden en distintos x_r (que valores de x_r es razonable tomar)?
- c. ¿Y para distintos R ?

- d. ¿Puede el comportamiento de la amplitud en la cercanía del emisor ser explicado por interferencia de ondas reflejadas en el par emisor-receptor?

Comparando con el experimento

- ¿Qué valor creen que podría tener R ?
- ¿Bajo qué argumento se pueden despreciar las reflexiones de orden superior P_{+++} , P_{---} , etc?
- ¿El receptor mide solo las ondas que inciden, o también las reflejadas?

2.6.2. Interferómetro de Young acústico

Supongamos que se tienen dos emisores separados por una distancia h y un detector que puede desplazarse en línea recta (eje y) sobre un plano situado a una distancia L perpendicular a la recta de separación de los emisores, como se ilustra en la Fig. 2.13. Llamando d_A y d_B a las distancias de las respectivas fuentes al detector, es decir:

$$d_A = |\vec{d}_A| = \sqrt{L^2 + (y + h/2)^2}, \quad (2.24)$$

$$d_B = |\vec{d}_B| = \sqrt{L^2 + (y - h/2)^2}. \quad (2.25)$$

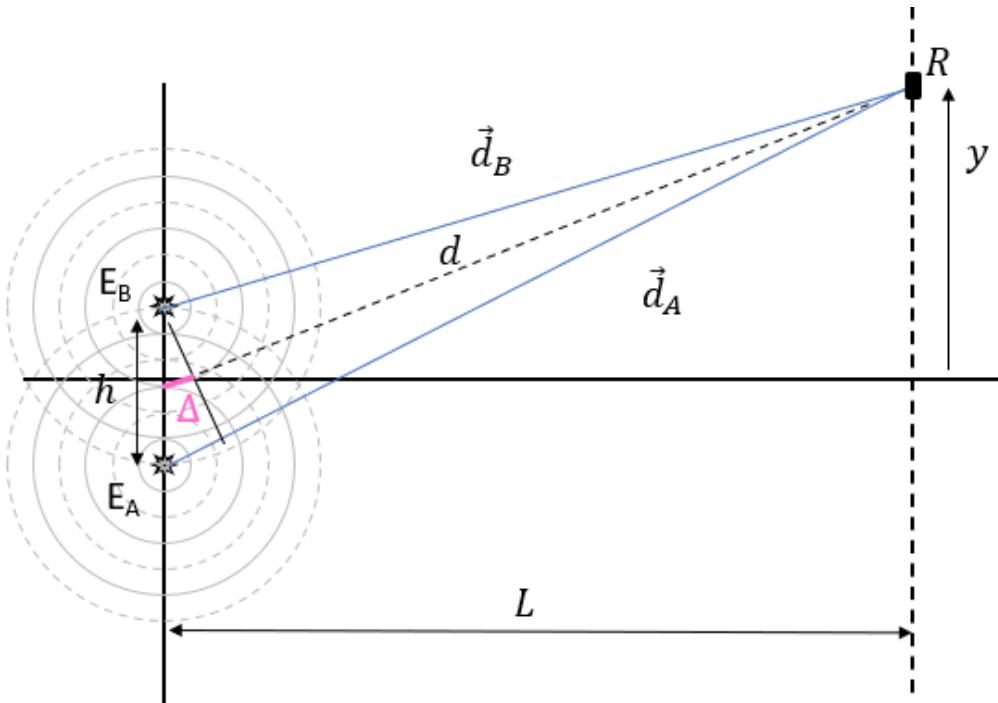


Figura 2.13: Esquema del experimento de Young acústico.

En el problema planteado en la Fig. 2.13, la expresión para la perturbación de la

presión detectada por el receptor R resulta

$$p = A \cos \left(-\omega_A t + \omega_A \frac{d_A}{c_s} + \Phi_{A_0} \right) + B \cos \left(-\omega_B t + \omega_B \frac{d_B}{c_s} + \Phi_{B_0} \right). \quad (2.26)$$

Consideremos el caso que las amplitudes, las frecuencias y la fases iniciales de las dos ondas sean iguales (y sin pérdida de generalidad se puede poner $\Phi_{A_0} = \Phi_{B_0} = 0$, ya que puedo elegir $t = 0$ cuando esto se cumpla), entonces

$$p = A \left\{ \cos \left(-\omega t + \omega \frac{d_A}{c_s} \right) + \cos \left(-\omega t + \omega \frac{d_B}{c_s} \right) \right\}. \quad (2.27)$$

Tarea: Escribiendo $d_A = d + \Delta$ y $d_B = d - \Delta$ obtenga la expresión de p en función de los parámetros d y Δ que se muestra en las ecuaciones 2.28 y 2.29.

La perturbación total se puede escribir como:

$$p = p_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{d}{c_s} \right) \right) \quad (2.28)$$

siendo la amplitud

$$p_0 = 2A \cos \left(\omega \frac{\Delta}{c_s} \right) \quad (2.29)$$

Notar que las variaciones de d producen una variación de fase en la señal, mientras que las de Δ modifican la amplitud de la señal.

Franjas de interferencia. Teniendo en cuenta que la longitud de onda vale $\lambda = 2\pi c_s / \omega$, la Ec. (2.29) puede reescribirse como

$$p_0 = 2A \cos \left(2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \right) \quad (2.30)$$

lo que indica que la amplitud tendrá máximos y mínimos a medida que se varía Δ (ya sea variando y , o h , o L) y que, además, depende de la longitud de onda. Habrá máximos de amplitud para algunos valores de Δ , que llamamos Δ_m , cuando

$$\Delta_m = \frac{\lambda}{2} m \quad (2.31)$$

con m entero.

Si llamamos y_m la posición del detector en el máximo de orden m , se tiene que

$$\Delta_m = \frac{d_A - d_B}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{L^2 + (y_m + h/2)^2} - \sqrt{L^2 + (y_m - h/2)^2} \right). \quad (2.32)$$

Como, en general, la distancia L es bastante mayor que la separación entre los emisores, un desarrollo en serie de Δ_m en función de h queda

$$\Delta_m = \frac{h}{2} \frac{y_m}{\sqrt{L^2 + y_m^2}} + \mathcal{O}(h^3). \quad (2.33)$$

Notar que estas aproximaciones van a ser razonables incluso cuando no se cumpla $h \ll L$ porque el término cuadrático se ha cancelado. Esto dice, por ejemplo, que si $h \sim 0.1L$ se tendrá un error del 1%.

Si, además, $y_m \ll L$ (o sea, si se observan sólo los primeros órdenes de interferencia) se puede escribir

$$\Delta_m = \frac{hy_m}{2L} \quad (2.34)$$

con lo cual la Ec. (2.31) resulta

$$y_m = \frac{\lambda L}{h} m. \quad (2.35)$$

Es decir que los máximos de interferencia están equiespaciados. La distancia entre dos máximos consecutivos, llamada interfranja i , vale

$$i = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda L}{h}. \quad (2.36)$$

En esta aproximación, para h y L fijos, la interfranja es constante y a partir de su medición se puede calcular la longitud de onda.

Medición de la longitud de onda. Se propone una práctica de laboratorio para medir la longitud de onda en ultrasonido utilizando dos emisores y un receptor, que es conceptualmente similar a la experiencia de Young en luz visible. En base al esquema de la Fig. 2.13 se muestra el dispositivo experimental en la Fig. 2.14.

Para pensar: Juntando lo explicado en la Sección 2.6.2, se te ocurre cómo medir la longitud de onda en este experimento?

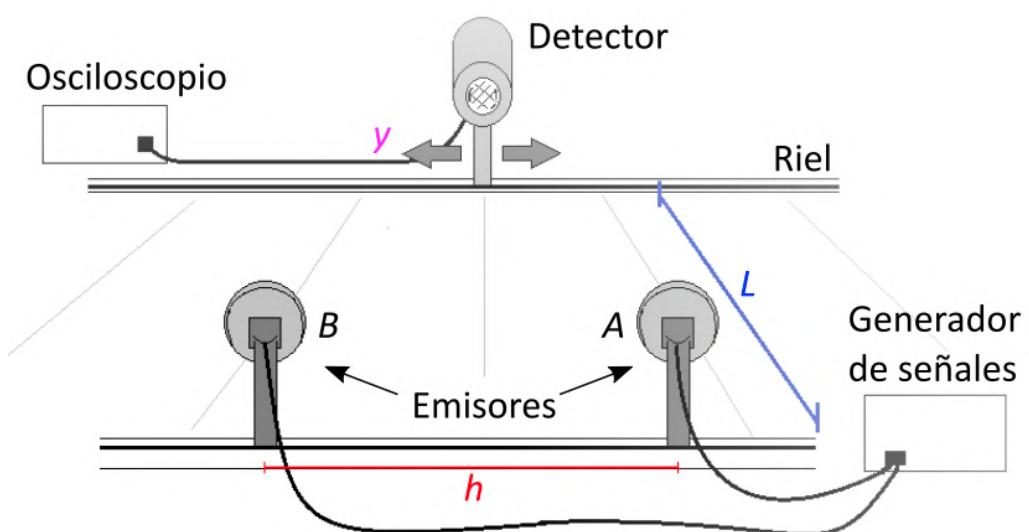


Figura 2.14: Esquema del dispositivo experimental para el experimento de Young acústico.

Capítulo 3

La respuesta del detector en las mediciones

Pensemos acerca de algunas ideas sobre situaciones en que realizamos mediciones (ver Fig. 7.1):

1. Interferometría. En el experimento de interferencia con dos emisores se produce una señal periódica dependiente de la posición. Si queremos medir la dependencia funcional debemos desplazar al detector a lo largo de la coordenada x mientras medimos la señal en el PE receptor. Sin embargo, el detector no es puntual (su respuesta está extendida en el espacio y no es una delta ideal); por lo tanto, no se mide la señal en la posición x sino el promedio de la señal en un rango $[x, x + \Delta x]$.

2. Espectrometría. Un espectrómetro permite separar la luz en distintos colores (frecuencias o longitudes de onda) empleando redes de difracción. De esta manera cada color va a ocupar un lugar en una posición diferente. Para medir la luz en cada color se utiliza un detector que se lo desplaza a través de la figura de difracción (espectro) mientras se mide la intensidad. Sin embargo, no es infinitamente angosto (no es una delta), y lo que en realidad mide es la intensidad de la luz para un rango de longitudes de onda cercanas a las que se quiere medir ($[\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$).

3. Imágenes. Una fuente de luz produce sombras cuando ilumina un objeto. Si la fuente de luz es puntual, la sombra que produce es la sombra “verdadera”. Sin embargo las fuentes de luz reales no son puntuales. ¿Cómo difiere la sombra producida por una fuente real de la sombra producida por una fuente puntual? ¿Qué pasa si el tamaño de la fuente es más grande?

4. Microscopía. En un microscopio de fluorescencia se utiliza un haz láser enfocado en una muestra y se mide la luz emitida por la muestra en el punto focal (típicamente un área de $1\mu m$ de diámetro). La imagen de fluorescencia se construye barriendo el haz sobre todos los puntos de la muestra mientras se adquiere la intensidad. Nuevamente, dado que el punto focal no es un punto singular en el espacio (no es una delta), la fluorescencia que se mide proviene de la pequeña área en la que está enfocado el haz.

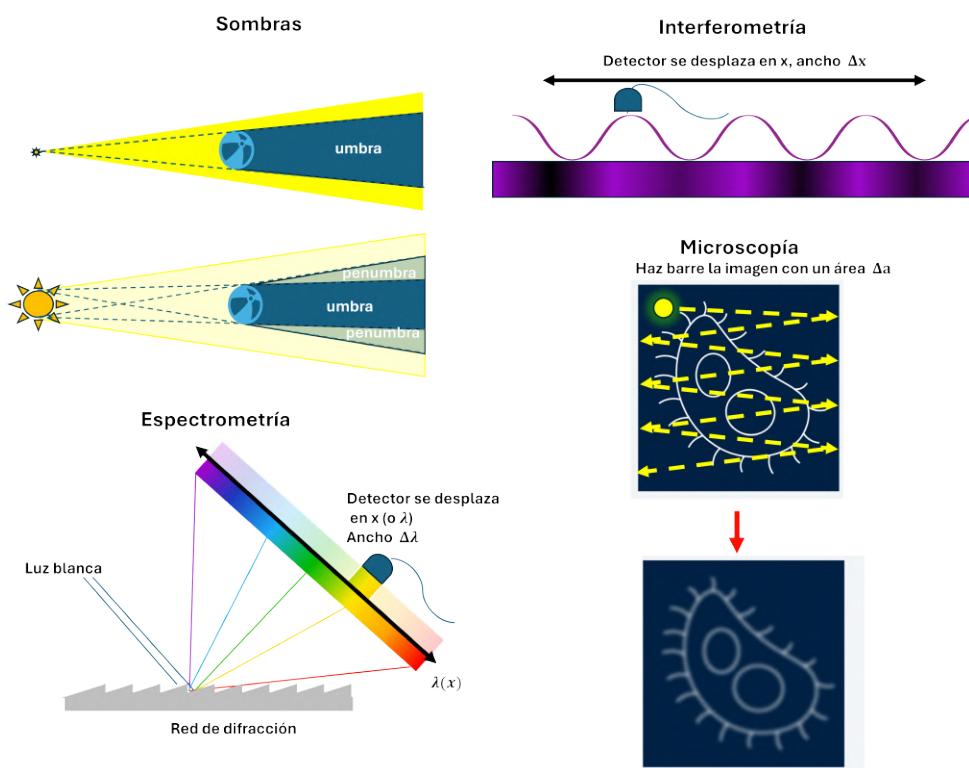


Figura 3.1: Ejemplos de sistemas en los cuales se observa la influencia de tener un detector o una fuente que no son puntuales. En el caso de las sombras, una fuente no puntual produce la zona de penumbra, produciendo un efecto de borroneado respecto a lo que se obtendría con una fuente puntual. En espectrometría, en lugar de medir una “única” longitud de onda, se mide un rango $\lambda, \lambda + \Delta\lambda$. En interferometría, en lugar de medir en x integramos la señal en un rango $x, x + \Delta x$. En microscopía, en lugar de medir en (x, y) integramos en un área dada por el área del haz. Es decir: en la práctica no es posible medir “un punto” del espacio, sino un intervalo alrededor de ese punto.

En todos estos ejemplos, ¿Cómo se relaciona lo que se está midiendo con el fenómeno físico que se quiere caracterizar, si en cada punto que se mide se está mezclando la señal que se quiere medir con la señal en los puntos vecinos? ¿Cómo depende la medición del

tamaño del detector?

Siempre que se mida una variable física, la respuesta del instrumento impacta en la medición. La respuesta del instrumento (usualmente descripta como filtros en la teoría de sistemas lineales), en general reduce la resolución de la medición. En este caso se modela al proceso de medición como una convolución matemática. La ventaja de conocer la respuesta del instrumento es que se pueden construir algoritmos computacionales para reducir el impacto del instrumento y obtener resultados con mayor fidelidad. A estos algoritmos y procesos se los conoce como deconvolución.

Vamos a ver cómo se calcula una convolución (nombre raro pero no te preocupes, es sencillo). Luego vamos a hacer la analogía entre el experimento de interferencia y la convolución de la respuesta del detector y la señal que queremos medir. A continuación podremos cambiar algunos parámetros para estudiar como afecta el tamaño del detector.

3.1. Convolución: operación matemática

Nota: Los ejemplos que se muestran en esta sección están acompañados de un Jupyter notebook (convolucion.ipynb) que pueden bajar del campus, para apoyar esta explicación.

La convolución se puede definir para funciones discretas (como sería una medición muestreada) o para funciones continuas. En primer lugar, consideraremos la función muestreada que se observa en la Fig. 3.2(a). Para este tipo de funciones, la convolución se define como

$$(f * g)_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \cdot g_{n-m}^*, \quad (3.1)$$

en donde $*$ en g significa complejo conjugado. Siendo que todas las señales medidas son reales, vamos a omitir $*$ de ahora en más. Observar que en esta cuenta no importa cuál es el eje de las ordenadas, sino la posición de cada punto de la función. Luego veremos cómo se calcula el eje de las ordenadas. Por tal motivo nos concentraremos en las sucesiones de números que se encuentran a la derecha de la figura 3.2(a) .

Pensemos qué hace esta operación, fijando valores para n . Si $n = 0$, la expresión 3.1 nos indica que tenemos que multiplicar f_m con g_{-m} , y luego sumar los productos para todos los m . Observar que g_{-m} es la sucesión que resulta de espejar a g respecto de $m = 0$, como se muestra en la Fig. 3.2(b). Multiplicamos entonces aquellos números cuyos productos dan distinto de cero (gris) y sumamos, obteniendo que la convolución vale $(f * g)_o = 9$.

La consecuencia de cambiar el valor de n es producir traslaciones de g_{-m} . Entonces los distintos valores de la convolución se obtienen desplazando a g_{-m} en el valor de n , y para cada desplazamiento multiplicar y sumar los elementos de ambas sucesiones. Veamos ejemplos concretos en las figuras 3.2(c-h). Por ejemplo, $n = -4$ significa que g_{-m} se desplaza 4 veces hacia la izquierda, como se muestra en 3.2(c).

Ahora vamos a hacer las cuentas para aquellos valores de n para los cuales la convolución no da cero. Vemos que $n = -4$ es el desplazamiento menor que me ofrece un valor distinto de cero (ver que si $n = -5$ o menor, siempre algún término del producto es cero). Entonces solo tiene sentido aumentar n . Luego, vemos que podemos seguir este procedimiento hasta que la convolución vuelva a dar cero, si variamos n desde -4 hasta 2. En el medio obtenemos valores distintos de cero, como se ve en 3.2(c-h). El resultado de la convolución se puede observar en la figura 3.3.

¿Cómo cambia el resultado si las funciones son continuas? La expresión para la convolución está dada por la ecuación

$$f(x) * g(x)_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g^*(t - \xi) dt, \quad (3.2)$$

en donde $*$ significa complejo conjugado. Siendo que todas las señales medidas son reales, vamos a omitir $*$ de ahora en más. En este caso la operación es similar pero, en lugar de hacer una sumatoria, calculamos el área bajo la curva que resulta de multiplicar a la primera función por la segunda invertida y desplazada.

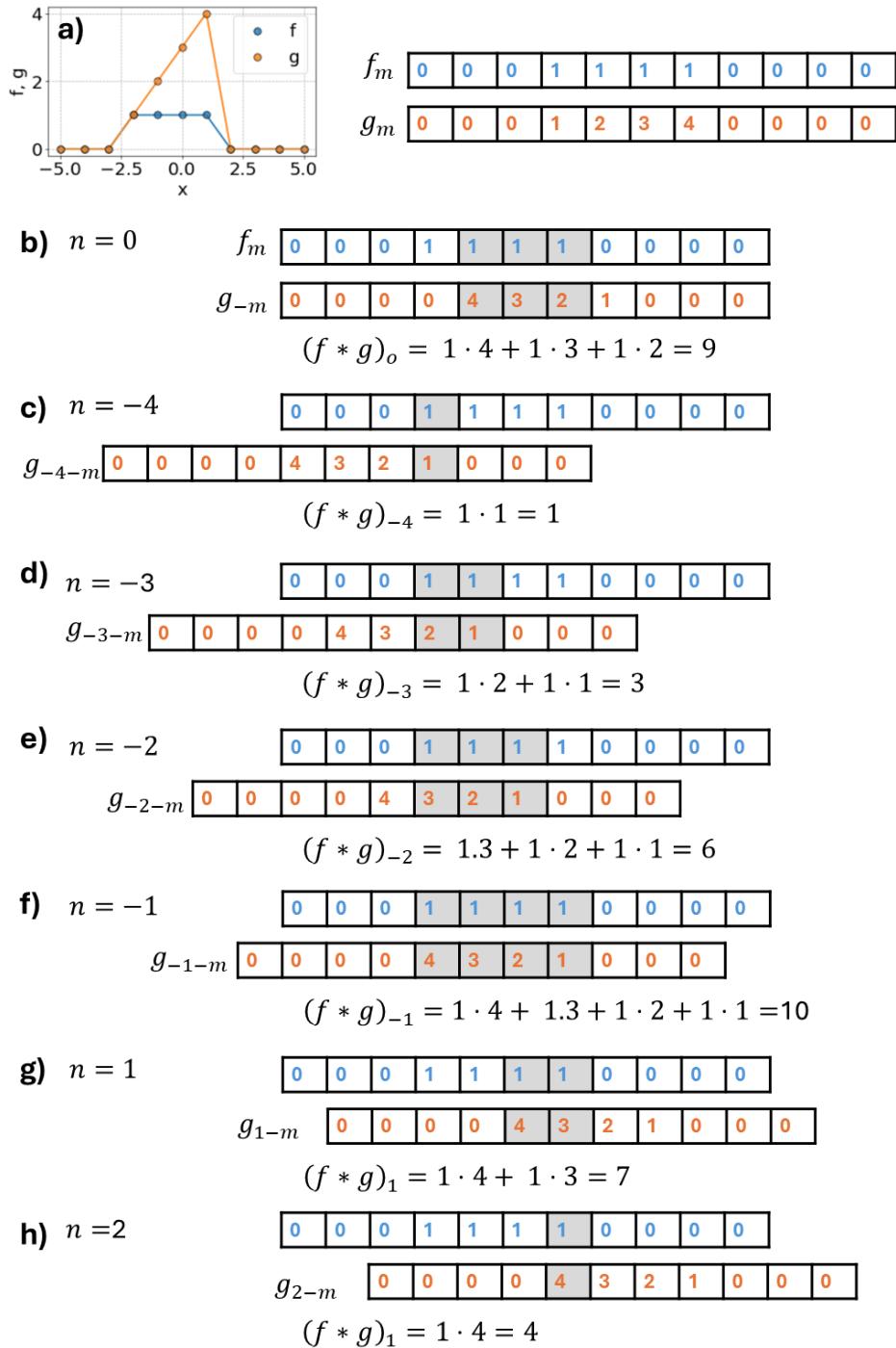


Figura 3.2: Convolución de las funciones f_m y g_m . En (a) se muestra un gráfico del muestreo realizado para estas funciones. En (b-h) se presenta una visualización del cálculo de la convolución de estas funciones para distintos valores de n .

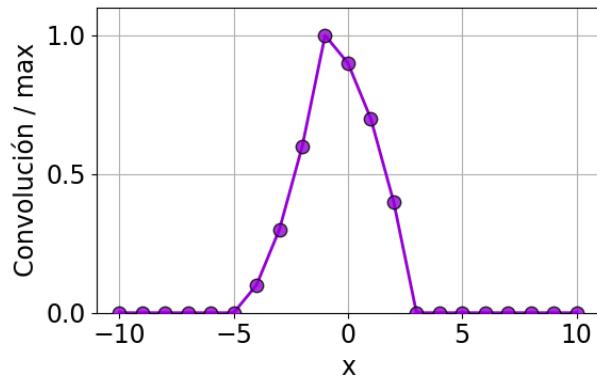


Figura 3.3: Resultado normalizado de la convolución entre las funciones f_m y g_m , variando n entre -10 y 10. Se observa que toma valores no nulos cuando n se encuentra entre -4 y 2.

En la figura 3.4 se muestra un ejemplo para funciones ‘continuas’. Ver que el procedimiento es el mismo: se invierte la función $g(x)$ respecto de $x = 0$, se desplaza a $g(-x)$ a través de $f(x)$ para distintos valores de ξ . Para cada desplazamiento ambas funciones se multiplican y se calcula el área bajo la función producto (color gris en la figura que corresponde al punto rojo en la convolución).

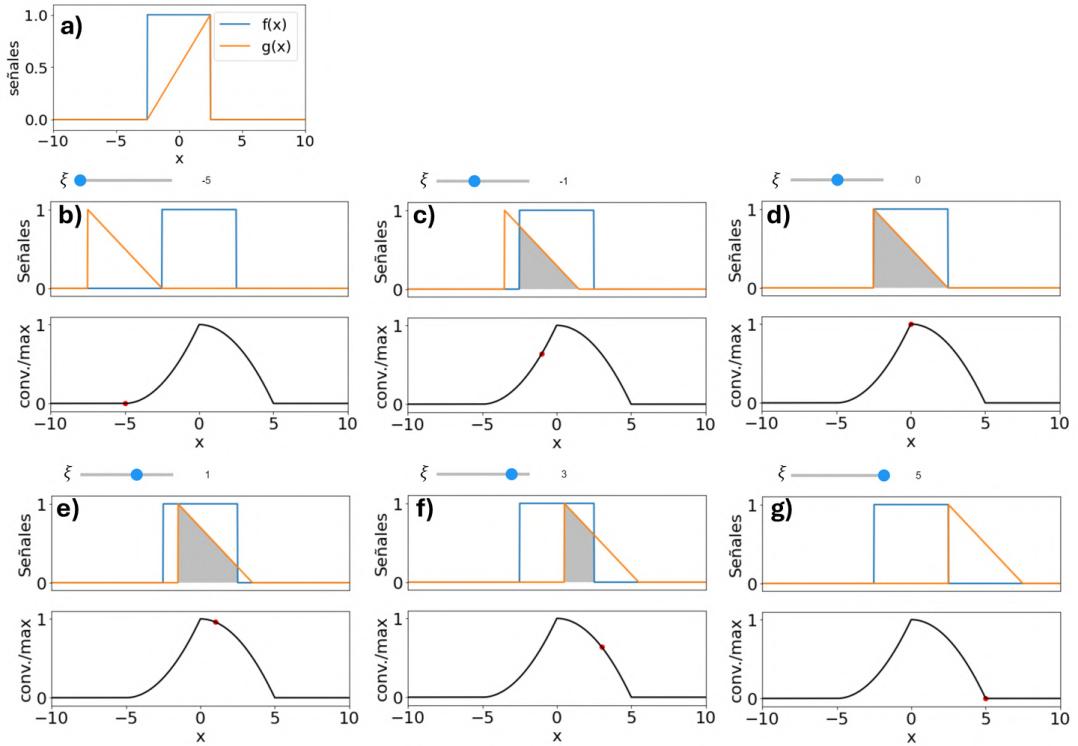


Figura 3.4: Ejemplo de convolución para dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$. Las mismas se encuentran graficadas en (a). Se observa el proceso de convolución para diferentes desplazamientos: (b) $\xi = -5$, (c) $\xi = -1$, (d) $t = 0$, (e) $\xi = 1$, (f) $\xi = 3$, y (g) $\xi = 5$. En cada caso se detalla el área integrada (arriba en gris) y el valor resultante de la convolución (abajo como un punto rojo).

Nota: todo esto que pensamos en una coordenada espacial unidimensional, también vale para la coordenada temporal y para múltiples dimensiones.

3.2. Convolución: intrínseca en el proceso de medición

Si observamos ahora los ejemplos de mediciones que mencionamos en la Fig. 7.1 vemos que, en casi todos los casos, hay ‘algo’ que se traslada a través de aquello que se desea medir (detector o el haz de iluminación). En cada posición del detector o haz de barrido, la medición resulta de integrar o sumar todo aquello que se encuentre en el área de interacción del detector o haz con lo que uno quiere medir $S(x)$. Es decir, el resultado del proceso de medición ($M(x)$) es la convolución de lo que se desea medir $S(x)$ con la

respuesta del detector $R(x)$. Re-escribiendo a la expresión 3.4 obtenemos

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \cdot R(x - \tau) d\tau. \quad (3.3)$$

Supongamos que estamos en el caso ideal que la respuesta del detector sea una delta (por ejemplo, el haz puede enfocarse en un área infinitamente pequeña o el detector (ya sea piezoeléctrico, detector de luz, etc) tienen un área infinitamente pequeña (sabemos que eso no es posible). Entonces escribiendo $R(x - \tau) = \delta(x - \tau)$ y reemplazando en la expresión 3.4, obtenemos

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) \cdot \delta(x - \tau) d\tau = S(x). \quad (3.4)$$

Es decir, matemáticamente en el caso de tener un detector ‘ideal’ la medición resulta idéntica a lo que uno quiere medir. Pero, físicamente, ¿qué es ideal?

3.3. El detector ideal y el real

Veamos un ejemplo de medición, en donde queremos medir el doblete del sodio. Es decir, queremos medir el espectro de una lámpara de sodio, que emite dos líneas espectrales muy angostas (ancho $\sim 0,1$ nm) centradas en las longitudes de onda 589.0 nm y 589.6 nm (doblete). Vamos a suponer que la forma o perfil de estas es lorentziano. En la figura 3.5 se pueden observar a estas líneas graficadas en color naranja. Supongamos entonces que utilizando una red de difracción separamos estas líneas y con un detector vamos a barrer el espectro midiendo la intensidad, tal como se muestra en la Fig. 7.1. Para que la resolución en la detección sea buena, solidario al detector pondremos una rendija cuyo tamaño podemos cambiar con mucha precisión, de manera que todo lo que este dentro de la rendija puede ser capturado por el detector, y todo lo que esté afuera no. La función de respuesta $R(x)$ que caracteriza a la rendija junto con el detector es la función cuadrada que está graficada en la Fig. 3.5(a). En las Figs. 3.5(b-c) se grafica en verde el resultado de la medición (simulado como la convolución entre la respuesta del detector y las líneas espectrales que se desean caracterizar). Vemos que cuanto más chica es la rendija (más parecida a una delta), más se parece la medición a las líneas espectrales; mientras que, al aumentar el ancho de la rendija, dejamos de resolver al doblete para medir solo una línea espectral.

Desarrollando la intuición: Usando la simulación (Jupyter notebook (convolucion.ipynb)), les sugerimos responder las siguientes preguntas (y diseñar otras!) para trabajar sobre nuestra intuición acerca de la convolución en el proceso de medición.

1. Cambiar la resolución del espectrómetro. Que pasa cuando la función resolución se aproxima a una delta?
2. Cambiar la distancia entre líneas espectrales manteniendo la misma resolución del espectrómetro.
3. Simular ruido de alta frecuencias sumando a las líneas espectrales algo como $0.1 \sin(1000 x)$. Ver que la convolución funciona filtro pasa bajos.
4. Como debe ser el ancho de la rendija para tener una medición fiel?

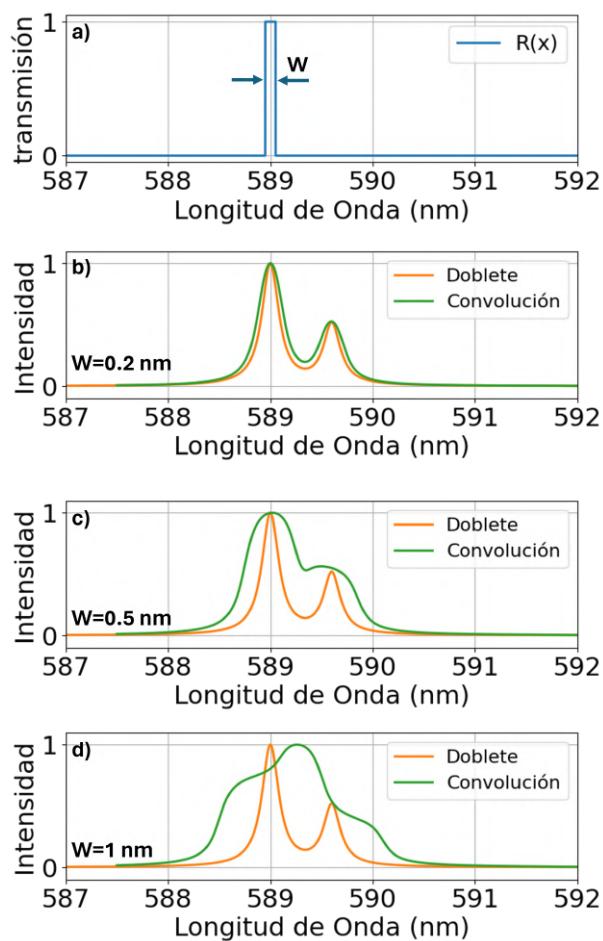


Figura 3.5: (a) Se observa la función que representa a la respuesta de la rendija y por lo tanto al la región donde puede medir el detector, donde 1 corresponde a detección total y 0 a detección nula. (b) Se detalla la comparación entre el espectro del doblete de sodio (línea sólida naranja) y el espectro obtenido al medir (línea sólida verde) utilizando una rendija de ancho $W = 0,2$ nm, (c) $W = 0,5$ nm y (d) $W = 1,0$ nm.

Capítulo 4

Ondas estacionarias

Una onda estacionaria se forma cuando se superponen dos ondas de igual frecuencia que se propagan en sentido opuesto a través de un medio. Por ejemplo, en la figura 4.1, se observa la superposición de dos ondas contrapropagantes en distintos tiempos ($t = 0$, $t = T/4$, $t = 3T/4$, $t = T$, donde T es el período de la onda). La onda que se propaga a la izquierda se puede expresar como

$$\Psi_A(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \phi_A) \quad (4.1)$$

y una onda que se propaga a la derecha como

$$\Psi_B(x, t) = B \cos(\omega t - kx + \phi_B) \quad (4.2)$$

En la figura 4.1c se observa la superposición de ambas ondas, formando la onda estacionaria. Ver que la onda estacionaria cambia su amplitud en el tiempo, pero los puntos indicados con la letra Q (conocidos como nodos) tienen amplitud nula en cualquier tiempo y los indicados con la letra P alcanzan la amplitud máxima (antinodos). La forma funcional de estas ondas es

$$\Psi(x, t) = \Psi_A(x, t) + \Psi_B(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (4.3)$$

en donde, para simplificar los cálculos, se consideró, que las fases iniciales son nulas y las amplitudes son iguales. Por el contrario a las ondas propagantes, las ondas estacionarias no transportan energía (en ninguno de los casos hay transporte de masa). Se puede ver gráficamente a partir de la figura 4.1c, que la distancia que separa dos nodos consecutivos es $\frac{\lambda}{2}$.

Podríamos preguntarnos, ¿cómo es que generamos dos ondas que se propaguen en direcciones opuestas a partir de una única fuente de ondas? Los cambios en las carac-

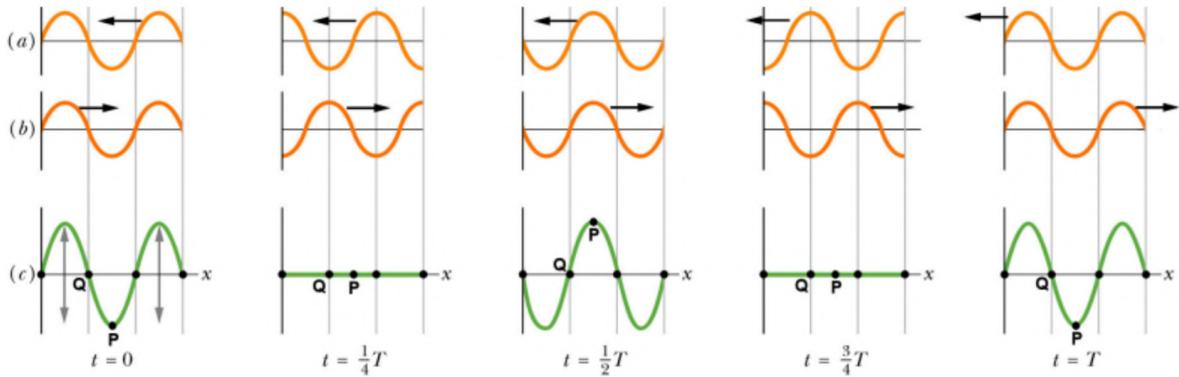


Figura 4.1: Dos ondas, una que se propagan hacia la izquierda (a) y otra hacia la derecha(b), se superponen para formar una onda estacionaria (c)

terísticas de los medios en donde se propagan las ondas (cambios de sección en tubos, fijaciones en las cuerdas, cambio de índice de refracción para la luz, etc), producen reflexiones. Por ejemplo, en la figura 4.2, se muestra la reflexión de una onda en una superficie perfectamente reflectante. La onda $\Psi(x, t)$ ahora está compuesta por la superposición de una onda que incide en la pared $\Psi_I(x, t)$ y una onda que se refleja $\Psi_R(x, t)$. Dado que la onda no puede producir movimiento de los átomos o moléculas de la superficie, se tienen que anular en la misma, es decir, la condición de borde en una superficie perfectamente reflectante o pared rígida es

$$\Psi(x_o, t) = \Psi_I(x_o, t) + \Psi_R(x_o, t) = 0. \quad (4.4)$$

Esto significa que la onda reflejada tiene igual amplitud que la onda incidente, pero se desfase en π , puesto que $\Psi_I(x_o, t) = -\Psi_R(x_o, t)$. Nota: para dibujar la onda reflejada, tuvimos que espejar respecto a la dirección horizontal y vertical, por qué?)

Las ondas estacionarias son más comunes de lo tal vez nos imaginamos. Por ejemplo, son esenciales para el funcionamiento de los instrumentos musicales. En la figura 4.3, se muestran dos ejemplos típicos de un instrumento de viento (ondas longitudinales en gases) y uno de cuerdas (ondas transversales en cuerdas). Los modos de oscilación en ambos casos determinan la nota o tono y las características del sonido (dos notas iguales no suenan perfectamente igual en instrumentos distintos, aun estos sean del mismo tipo). La frecuencia del modo más bajo, conocida como nota fundamental, los armónicos y sobretonos son aquellos que le dan la riqueza la nota (su timbre, su color,etc). Tanto en los instrumentos de viento como cuerdas, las vibraciones de las ondas estacionarias en ellos producen vibraciones del aire en su entorno generando una onda longitudinal en el aire,

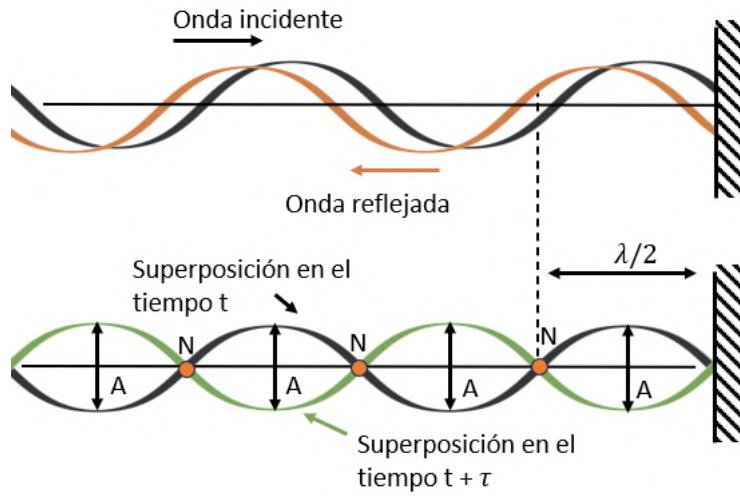


Figura 4.2: Arriba: una onda incidente (en negro) incide sobre una superficie reflectante. Esto produce una onda reflejada (marrón) que viaja en sentido contrario de igual amplitud. Esto genera una onda resultante que es la superposición de las ondas incidentes y reflejadas (abajo) formando nodos y antinodos.

que se propaga hasta nuestros oídos, lo que permite que escuchemos a los instrumentos musicales.

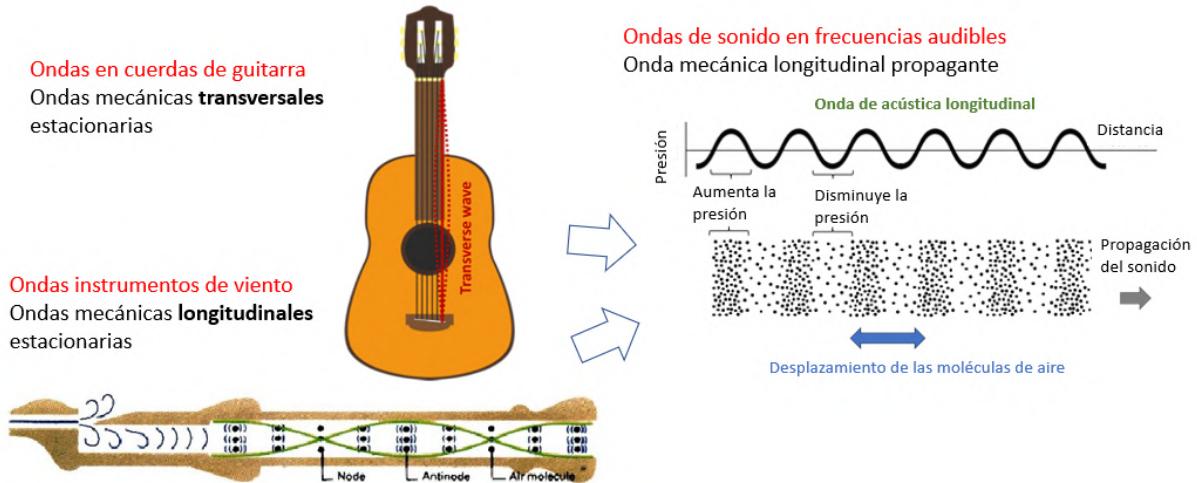


Figura 4.3: Las ondas de sonido provocan perturbaciones en el aire al desplazar las moléculas, dando lugar a una onda longitudinal que permite la propagación del sonido. En el caso de instrumentos de cuerda, encontramos mayoritariamente ondas mecánicas transversales estacionarias mientras que en instrumentos de viento ondas mecánicas longitudinales.

Para accionar a las notas, ambos sistemas deben ser forzados. En el caso de los instrumentos de cuerda, los dos extremos de las cuerdas se encuentran fijos (condición de

borde extremos fijos) y el sistema se puede forzar por frotamiento (violín, viola, cello) o por percusión (los tres anteriores, la guitarra, el piano). En el caso de los instrumentos de viento, se fuerza soplando aire por un extremo y el otro extremo es abierto (condición de borde forzado-abierto).

En base a lo explicado previamente, nos interesa saber como se forman las ondas estacionarias, como influyen distintas condiciones de borde y como son los sistemas forzados. Intentemos responder a estas preguntas empleando dos sistemas típicos: cuerdas y tubos.

4.1. Ondas estacionarias en cuerdas

4.1.1. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno en el caso de cuerdas, pueden ser que el extremo sea fijo, o que el extremo sea libre o que el extremo esté forzado, como se esquematiza en la figura 4.4. Si el extremo de la cuerda está fijo, el desplazamiento de la cuerda es nulo. Esto lo expresamos matemáticamente como

$$\Psi(x_o, t) = 0, \quad (4.5)$$

en donde x_o es la posición del extremo fijo de la cuerda. Como explicamos anteriormente esto significa que la incidente y reflejadas son iguales en magnitud pero están desfasadas en π . En el caso de que el extremo se encuentre libre, la onda incidente y reflejada tienen que ser iguales en amplitud y pendiente. Esto es

$$\left. \frac{d\Psi(x, t)}{dx} \right|_{x=x_o} = 0. \quad (4.6)$$

Ver que en el caso del extremo fijo, tal como mencionamos anteriormente hay una inversión de la onda, mientras que en el extremo libre la onda no se invierte.

Tarea: Escribir una superposición de ondas armónicas propagantes que satisfagan 4.5 y 4.6.

A partir de las condiciones de borde planeadas podemos proponer varias situaciones esquematizadas en la figura 4.5: que la cuerda tenga dos extremos fijos, que la cuerda tenga dos extremos libres, que la cuerda tenga un extremo fijo y uno libre. Para analizar que sucede podemos plantear la forma de la onda estacionaria genérica

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx + \phi) \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.7)$$

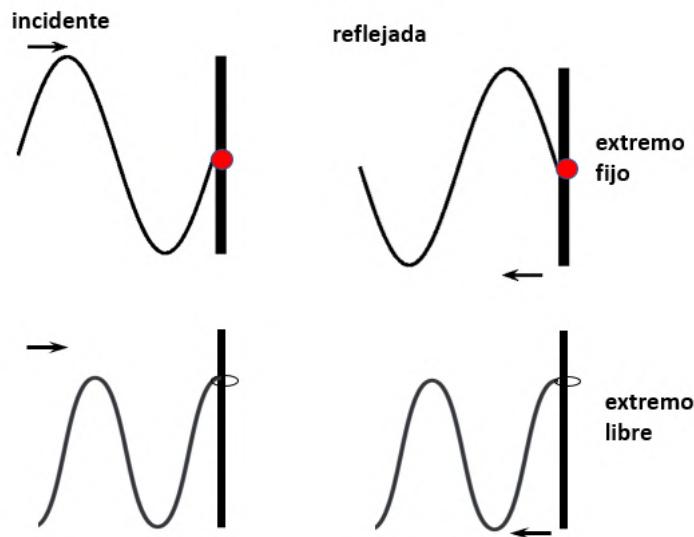


Figura 4.4: Arriba: una onda incide sobre un extremo fijo (izquierda). Esto genera una onda reflejada **invertida** (derecha), es decir, desfasada en π . Abajo: una onda incide en un extremo libre (izquierda) y produce una reflexión de igual amplitud y pendiente, sin invertirse.

donde φ es la fase inicial temporal y ϕ la fase inicial espacial. Luego proponemos las condiciones de borde adecuadas según el problema particular.

4.1.2. Cuerda con dos extremos fijos

Tarea: Probar que imponiendo las condición de borde de la ecuación 4.5 en ambos extremos para todo tiempo, se obtienen los resultados de esta sección.

Si la cuerda tiene dos extremos fijos en las posiciones $x = 0$ y $x = L$, y se proponen las condiciones de borde

$$\Psi(0, t) = 0; \Psi(L, t) = 0$$

en la ecuación 4.7, se obtiene que $\phi = \pi/2$ y que λ y k pueden tomar varios valores. En particular se obtiene $k = m\pi/L$ con m un entero positivo ($m = 1, 2, 3, \dots$) por lo que $\lambda_m = 2L/m$. Es decir la onda entra un número entero de veces en la distancia $2L$. Las posibles soluciones toman la forma

$$\Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (4.8)$$

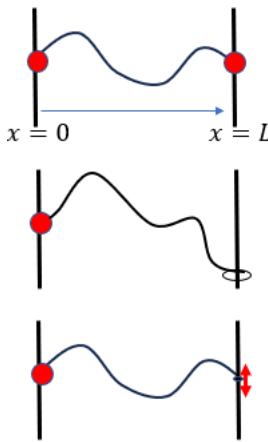


Figura 4.5: Ejemplo de dos configuraciones con distintas condiciones de contorno. Arriba, una onda con sus dos extremos fijos (puntos rojos). Medio:una onda con un extremo fijo y el otro extremo libre. Abajo: una cuerda con un extremo fijo y otro forzado

con A_n y φ_n parámetros a determinar a partir de las condiciones iniciales y ω_n y k_n relacionados a partir de la relación de dispersión de la cuerda $\omega_n = v k_n$, con $v = \sqrt{T/\mu}$ donde T es la tensión de la cuerda y μ su densidad lineal (en unidades de kg/m). Esto significa que solo algunas frecuencias podrán excitar a la cuerda. En la figura 4.6, se observa un esquema en donde se observan graficados los primeros modos normales, sus frecuencias ($f_n = \omega_n/2\pi$) y longitudes de onda. A la primer frecuencia f_1 se la conoce como frecuencia fundamental o primer armónico. Las demás frecuencias son múltiplos de esta y se las llama simplemente armónicos.

4.1.3. Cuerda con un extremo libre y uno fijo

Tarea: Probar que imponiendo las condición de borde de la ecuación 4.5 y 4.6 en cada uno de los extremos para todo tiempo, se obtienen los resultados de esta sección.

De manera análoga a la sección anterior, si ahora la cuerda tiene un extremo fijo en $x = 0$ y uno libre en $x = L$, y se proponen las condiciones de borde

$$\Psi(0, t) = 0; \quad \left. \frac{d\Psi(x, t)}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

en la ecuación 4.7, se obtiene que $\phi = \pi/2$ y que λ y k pueden tomar varios valores. En este caso se obtiene $k = (2m - 1)\pi/2L$ con m un entero positivo ($m = 1, 2, 3, \dots$) por lo

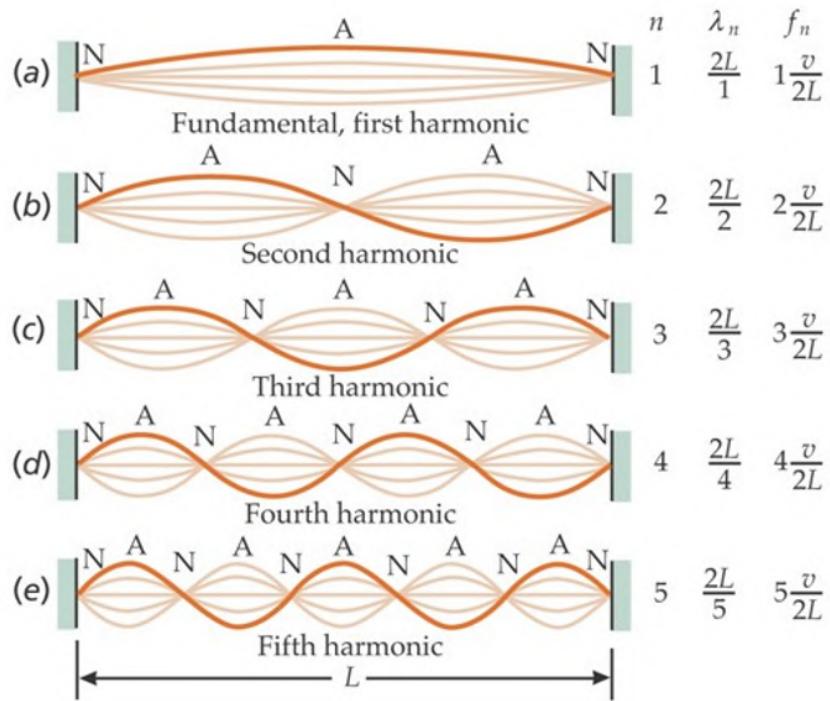


Figura 4.6: Primeros cinco modos de oscilación de una cuerda con dos extremos fijos. A la derecha se puede observar el número de modo (n), su longitud de onda (λ_n) y su frecuencia (f_n). En el esquema las N marcan las posiciones de los nodos y las A la de los antinodos (puntos de máxima amplitud).

que $\lambda_m = 4L/(2m - 1)$. Es decir la onda entra un número entero de veces en la distancia $4L$. De manera análoga al inciso anterior, las posibles soluciones toman la forma

$$\Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (4.9)$$

En la figura 4.7 se pueden observar graficados los primeros modos normales, sus frecuencias y longitudes de onda.

4.1.4. Cuerda con un extremo fijo y otro forzado

Supongamos que ahora tenemos una cuerda con un extremo fijo en $x = 0$ y uno forzado armónico en $x = L$ ($D \cos(\omega t)$). El extremo fijo será un nodo, pero el extremo forzado se verá obligado a moverse como el forzante, esto es

$$\Psi(0, t) = 0$$

$$\Psi(L, t) = D \cos(\omega t)$$

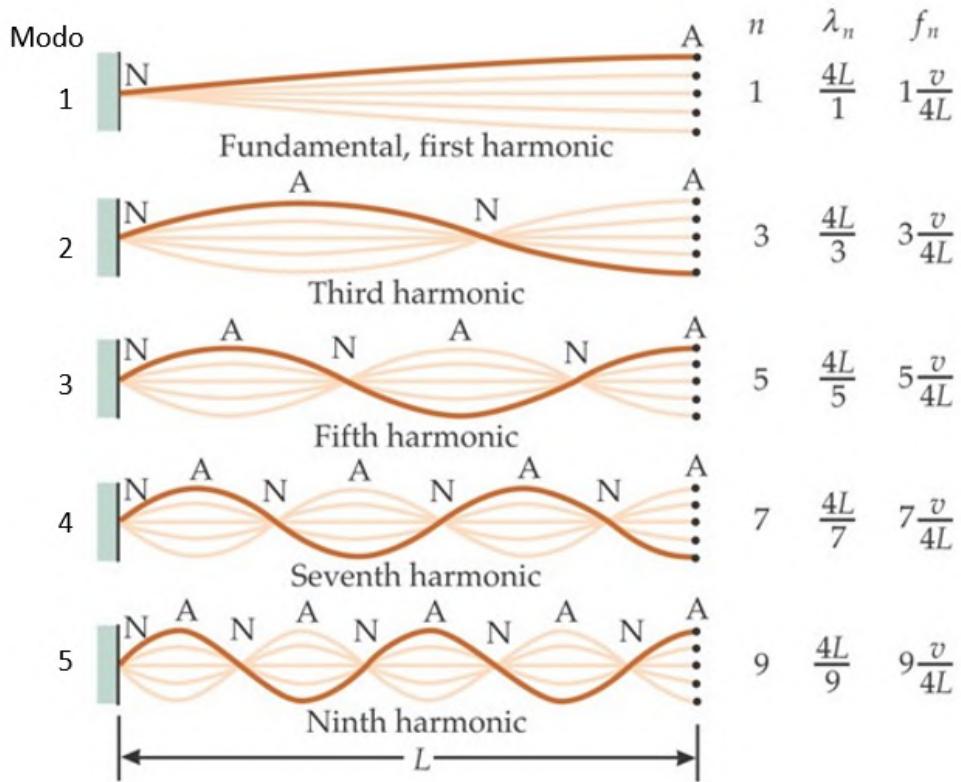


Figura 4.7: Primeros cinco modos de oscilación de una cuerda con dos un extremo fijo y uno libre. A la derecha se puede observar el número de modo (n), su longitud de onda (λ_n) y su frecuencia (f_n). En el esquema las N marcan las posiciones de los nodos y las A la de los antinodos (puntos de máxima amplitud).

Luego de aplicar estas dos condiciones a la ecuación 4.7, se obtiene que

$$\Psi(x, t) = \frac{D}{\sin(kL)} \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (4.10)$$

En donde se uso que dado que la solución transitoria decayó, la cuerda debe oscilar con la misma frecuencia y fase que el forzante.

El dominador de la ecuación 4.10 se anula cuando $kL = n\pi$ con $n = 1, 2, 3\dots$ (que son los mismos valores que se obtienen para extremos fijo-fijo o libre-libre). De este modo si el forzante tiene frecuencia $\omega = \omega_n = vk_n$, la solución diverge (es un sistema resonante).

Por otra parte, en las frecuencias de resonancia $D / \sin(kL) \gg D$, por lo tanto la amplitud del forzante es despreciable respecto a la amplitud de la onda, por ello consideramos al extremo forzado como un nodo.

¿Qué pasa si forzamos con una frecuencia que no sea de un modo normal? Al forzar generamos una onda progresiva que al llegar a un extremo se refleja generando una onda regresiva (que viaja en el sentido contrario). Cuando la onda regresiva llegue al otro

extremo volverá a reflejarse generando una nueva onda progresiva que se superpone con la onda progresiva original. En general, debido al tiempo de viaje, la nueva onda progresiva no estará en fase con la original. En cada reflexión, la onda adquiere una $\Delta\phi_i$, de manera que la perturbación total progresiva será la suma de todas las ondas con distintas fases

$$\Psi_{\text{tot}} = \sum_i (A \cos(kx - \omega t + \phi_o + \Delta\phi_i)). \quad (4.11)$$

La suma de ondas con defasaje aleatorio tiende a cero para una cantidad suficiente de ondas. La única manera que no se anule la suma es que la diferencia de fase sea cero. Esto se logra para algunas relaciones entre λ y L que son precisamente las condiciones bajo las cuales aparecen los modos normales. Lo mismo pasa con las regresivas.

4.1.5. Experimento: ondas estacionarias en cuerdas.

En esta experiencia se estudiarán ondas estacionarias en cuerdas. El dispositivo experimental se observa en la figura 4.8. En uno de los extremos de la cuerda se sujeta un portapesas y se la posiciona sobre una polea. En el portapesas se pueden colocar distintas masas para tensionar la cuerda. Se debe tener particular cuidado durante el montaje de que la cuerda este correctamente nivelada. Se excita a la cuerda en el otro extremo empleando un wave driver (un parlante con membrana). El wave driver tiene una pieza con una ranura para sujetar a la cuerda. Se alimenta al wave driver utilizando el generador de funciones y un amplificador de señales. Además se puede emplear un osciloscopio para medir la señal de alimentación. En el laboratorio se cuenta con cuerdas de distinta densidad, masas de distinto peso, balanza, micrómetro. **Advertencia:** el wave driver posee una traba para bloquear su accionamiento mecánico cuando no están en uso. No te olvides de retirar la traba antes de comenzar a usarlos. ¿Qué voltaje máximo soporta?

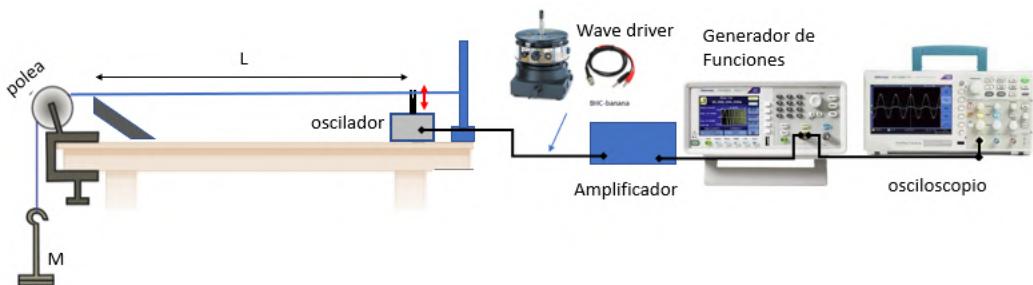


Figura 4.8: Esquema experimental para la experiencia con cuerdas.

Experimental:

- a) Como se genera un punto fijo del lado de la polea?
- b) Caracterizar las cuerdas que se van a utilizar midiendo su densidad lineal. ¿Cómo?
- c) Como genero tensión en la cuerda? que rango de tensiones es razonable emplear?
- d) Calcular la velocidad de propagación esperada en base a la densidad lineal y la tensión.
- e) Buscar los modos normales del sistema. Caracterizar la frecuencia, la longitud de onda, etc. Como determino la velocidad de la propagación a partir de las mediciones realizadas.
- f) Medir la velocidad de propagación para distintas tensiones de la cuerda. Cuantos valores de tensión es razonable tomar?
- g) Repetir para una cuerda con otra densidad.

4.2. Ondas estacionarias en tubos

Ya hemos estudiado ondas que se propagan en gases cuando hicimos el experimento de ultrasonido. Decíamos que la onda se propaga en el aire a través de compresiones y expansiones del mismo, pero que no hay un movimiento neto de las partículas de aire (aun estas puedan oscilar localmente).

Supongamos que el gas se encuentra en equilibrio en un tubo cuya sección tiene área A , a una presión de equilibrio P_o , con una densidad ρ_o (ver figura 4.9). Llamemos entonces $\Psi(x, t)$ al desplazamiento longitudinal de las moléculas de aire respecto de la posición de equilibrio, y consideremos un volumen inicial $V_o = \Delta x A$. Cuando la onda se propaga en el tubo, el volumen de aire sufre un desplazamiento o deformación y por lo tanto hay variaciones de presión en su entorno. La presión está relacionada con la compresión o expansión del gas. Cuando se comprime a un volumen más chico, la presión aumenta. Cuando se expande a un volumen más grande la presión disminuye. La variación de presión (Δp) se puede expresar como

$$\Delta p = -\kappa \frac{\Delta V}{V_o} \quad (4.12)$$

donde κ es el módulo de compresibilidad en unidades de Pa. De este modo, nos queda calcular la variación de volumen a partir de la función desplazamiento como $\Delta V = \Psi(x +$

$\Delta x, t) - \Psi(x, t)$. A partir de esta expresión y en el límite de Δx muy chiquito, se obtiene

$$\Delta p = -\kappa \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}. \quad (4.13)$$

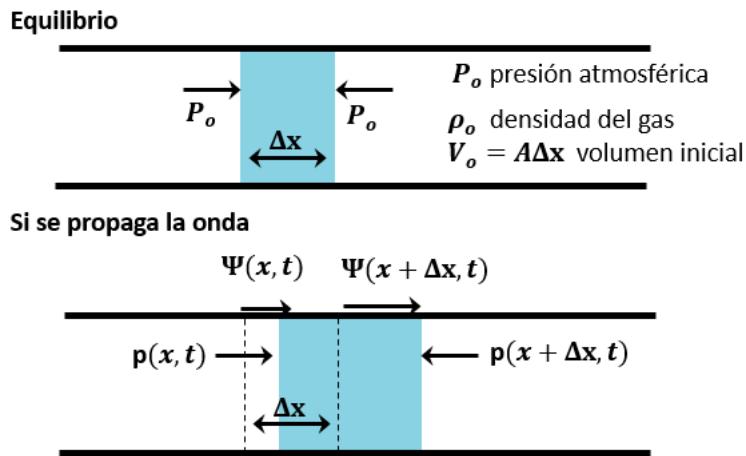


Figura 4.9: Esquema de un gas en equilibrio (arriba) y un gas en el que se propaga una onda (abajo)

Por otra parte, se puede ver que la variación de densidad es

$$\rho(x, y) = \rho_o \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}. \quad (4.14)$$

con ρ_o la densidad media del gas.

4.2.1. Condiciones de borde en tubos

Las condiciones de borde en los tubos pueden ser extremo cerrado, extremo abierto o extremo forzado (también existen otras como los cambios de sección, pero por ahora tomamos estas tres). Miremos primero qué pasa con el extremo cerrado que está a la derecha de la figura 4.10. Las partículas muy cercanas a la pared se encuentran quietas, de modo que la condición de borde se puede expresar como

$$\Psi(x_o, t) = 0, \quad (4.15)$$

donde x_o es la posición del extremo. En el momento de la foto, las partículas cercanas a la pared se mueven hacia la pared, por lo que la presión en ese extremo es máxima.

En el caso de un extremo abierto, como el que se muestra en la figura 4.11, la condición que hay que pedir, es que la presión inmediatamente antes e inmediatamente después del

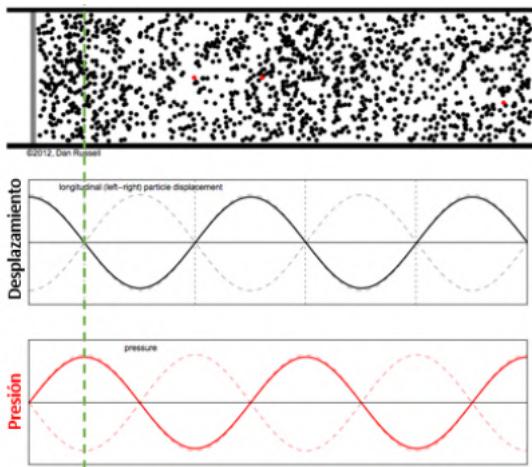


Figura 4.10: Condiciones de borde Forzado- cerrado. Arriba: Esquema de la distribución de moléculas o átomos en el gas. Medio: Desplazamiento de las moléculas (positivo es hacia la derecha, negativo es hacia la izquierda). Abajo: Presión en el tubo.

extremo sea la misma. De este modo, la variación de presión es nula, por lo que la condición es que

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_o} = 0. \quad (4.16)$$

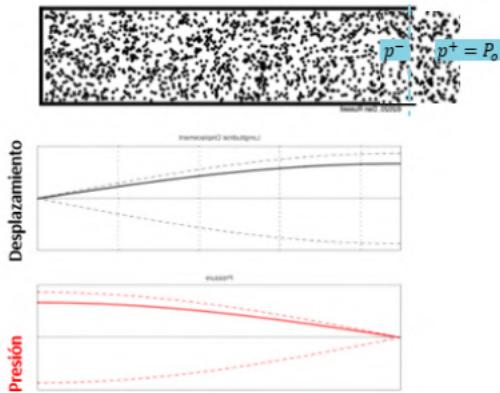


Figura 4.11: Condiciones de borde cerrado- abierto. A la derecha, el extremo está abierto y las presiones en el interior y exterior se igualan. Arriba: Esquema de la distribución de moléculas o átomos en el gas. Medio: Desplazamiento de las moléculas (positivo es hacia la derecha, negativo es hacia la izquierda). Abajo: Presión en el tubo.

Analicemos ahora el extremo forzado. Podemos suponer que las partículas se mueven igual que el forzante (igual que el piezoelectrónico o igual que el parlante), en cuyo caso la condición será que $\Psi(L, T) = C \cos(\omega t)$, suponemos al extremo forzado en $x = L$.

Utilizando esta condición obtenemos los mismos resultados que para la cuerda: $kL = n\pi$ y la función de onda

$$\Psi(x, t) = \frac{C}{\sin(kL)} \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (4.17)$$

Es decir, el extremo forzado se comporta como un extremo cerrado para desplazamiento. Sin embargo, también podríamos pensar que en el extremo forzado las presiones se igualan. Entonces

$$\Delta p = -\kappa \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = C \cos(\omega t). \quad (4.18)$$

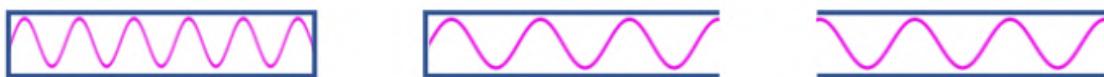
A partir de esta condición se obtiene que la amplitud de la onda es

$$A = \frac{-C}{\kappa \cos(kL)} \quad (4.19)$$

que se maximiza cuando $k_m = (2m-1)\pi/2L$, es decir, un extremo abierto para desplazamiento.

4.2.2. Modos normales en tubos

A partir de las condiciones de borde mencionadas, se puede probar que los modos en los tubos con condición abierto-aberto, abierto-cerrado o cerrado-cerrado, son similares a los de las cuerdas. Los resultados se encuentran en la Figura 4.12.



$$\Psi_m(x, t) = A_m \sin(k_m x) \cos(\omega_m t + \phi) \quad \Psi_m(x, t) = A_m \sin(k_m x) \cos(\omega_m t + \phi) \quad \Psi_m(x, t) = A_m \cos(k_m x) \cos(\omega_m t + \phi)$$

$$k_m = \frac{m\pi}{L} \rightarrow \lambda_m = \frac{2L}{m}$$

$$k_m = \frac{(2m-1)\pi}{2L} \rightarrow \lambda_m = \frac{4L}{2m-1}$$

$$k_m = \frac{m\pi}{L} \rightarrow \lambda_m = \frac{2L}{m}$$

Figura 4.12: Modos normales en tubos, para las condiciones cerrado-cerrado (izquierda), cerrado-aberto (medio), abierto-aberto (derecha)

Tarea: Nunca confíen en lo dicho, pruébenlo ustedes mismos!

4.2.3. Experimentando con tubos: el tubo de Kundt

El dispositivo experimental que se empleará en la práctica se muestra en la figura 4.13. Consiste en un tubo de longitud L , que incorpora una regla para medir posiciones dentro del mismo. En un extremo del tubo hay un pistón móvil que actúa como extremo cerrado y permite variar la longitud del mismo. Este se puede remover dejando al tubo con una longitud fija con aquel extremo abierto. Dentro del tubo hay un micrófono con el cual se mide la perturbación (de desplazamiento o presión) dentro del tubo. El micrófono se conecta a un amplificador y luego al osciloscopio para poder medir la señal. El otro extremo del tubo se encuentra abierto y a una distancia d_o ($d_o \ll L$) de un parlante con el cual se emitirá la señal. El parlante está conectado a un generador de funciones mediante un cable BNC-banana. El generador de funciones a su vez esta conectado al osciloscopio para medir la señal emitida. Todas las conexiones salvo las que se indica lo contrario son con cables BNC-BNC. **No superar los 2 Vpp que se mandan al parlante, sino se distorsiona la señal.**

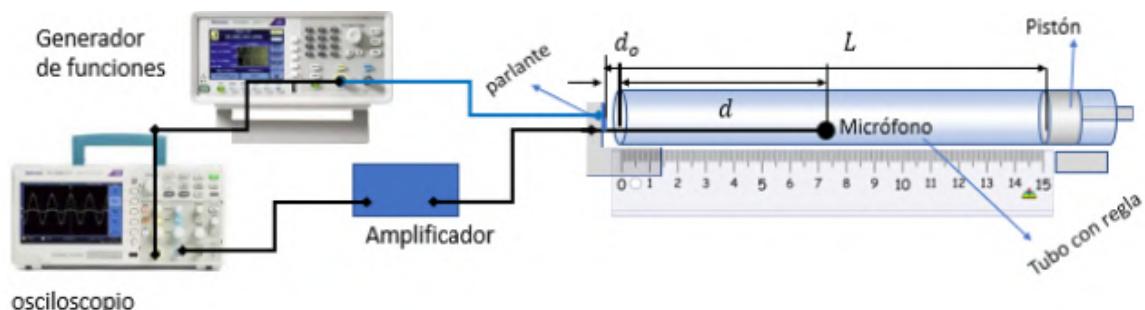


Figura 4.13: Dispositivo experimental que se empleará en la práctica de ondas estacionarias en tubos

Experimental:

- Determinar que mide el micrófono: Presión o desplazamiento. ¿Cómo lo hago? ¿Dónde mido? ¿Qué espero medir?
- Diseñar un experimento para determinar si el parlante fuerza al extremo en presión o desplazamiento. (es decir si el extremo está abierto o cerrado).

En todas las experiencias siguientes, repetir el experimento con pistón (cerrado), sin pistón (abierto).

- a) Medir las variaciones de presión o desplazamiento en los modos a lo largo del tubo. ¿Cuántos modos puedo observar? ¿Puedo definir la posición de los nodos? ¿Y de los máximos? ¿Qué error le asigno? ¿Cuál tiene menor error?
- b) Dejando L fijo, estudiar la dependencia entre la frecuencia ν , la longitud de onda de los modos λ y el número de modos. Pensar como es conveniente medir λ . Usando estos datos, medir la velocidad de propagación del sonido y el largo efectivo del tubo.
- c) Diseñar un experimento para medir la velocidad de propagación variando la longitud del tubo.
- d) Determinar la velocidad de propagación a partir del retardo entre una señal impulsiva y la señal medida. Adquirir una señal completa y guardar los datos (Los vamos a usar pronto!).
- e) Comparar la velocidad del sonido obtenida por los distintos métodos.

Capítulo 5

Composición de señales

En Física 2 estudiamos propagación de ondas imponiendo condiciones iniciales arbitrarias en sistemas que soportan modos normales, y vimos que en esos casos la onda que se propaga en el medio es una superposición de modos normales (¡los modos forman una base de el espacio de soluciones!). Esto es factible debido al **principio de superposición**: dado que la ecuación de ondas es lineal, una combinación lineal de soluciones también es solución.

En líneas generales, para hallar la solución se propone que la solución general a tiempo inicial es una superposición (combinación lineal) de modos normales. Luego, para hallar las amplitudes y fases de cada término de la superposición usamos la condición inicial expresada en una base Fourier (que, elegida apropiadamente, coincide con la de los modos normales), e igualamos la solución general en el tiempo inicial a la condición inicial.

¡Atención! Si no recordás esto que acabás de leer, leé primero la sección 5.1 en donde comentamos brevemente un ejemplo que vieron en Física 2 y luego retomá desde aquí. Si recordás todo, te lo podés saltar.

Si el sistema que estamos estudiando soporta un continuo de frecuencias, en lugar de usar sumatorias usamos integrales: la transformada de Fourier.

Este concepto lo podemos extrapolar a muchas situaciones, más allá de las ondas. Se utiliza muchísimo en casi cualquier rama de la física, como la electrónica y la óptica. Veamos algunos ejemplos.

La mayoría de los dispositivos electrónicos que usamos hoy en día manejan señales digitalizadas. Un ejemplo que ya usamos es la señal cuadrada que genera el generador de funciones. Para generar esa señal, el generador no hace más que superponer señales armónicas de distintas frecuencias. ¿Se te ocurre cuáles?

Otro ejemplo es cómo se transmite la información en los circuitos lógicos. En general esta está codificada en 8 bits, es decir base binaria de 8 dígitos (por ejemplo, si quiero transmitir una señal de 2 V, su codificación en base binaria es 00000010 ya que $2 = 0 \times 2^8 + 0 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$). Al conjunto ordenado de 8 bits lo conocemos como byte. Esta información además se transmite como pulsos con cierta frecuencia (bits por segundo), conocida como *bit rate*. Es decir que, a fines prácticos, en los circuitos lógicos la información se transmite en código binario, donde cada dígito es un pulso de amplitud 0 V si quiero transmitir el cero binario, y 3 V o 5 V para el 1 binario. En otras palabras: para transmitir la información de que la señal tiene 2 V, se transmite una serie de pulsos ordenados en el tiempo (byte) de amplitud (0 0 0 0 0 0 1 0). Y así, cualquier información que quiera transmitir necesito codificarla en código binario y transmitirla como 1 y 0, es decir como pulsos de 5 V y 0 V. Para transmitir estos pulsos, necesito que la electrónica que uso tenga suficiente ancho de banda como para que estos pulsos de los bits se propaguen en los circuitos sin deformarse demasiado (es decir, que no pierdan sus componentes de Fourier al propagarse).

Notar que, en cualquiera de los ejemplos mencionados anteriormente, para que los pulsos o señales estén *bien conformados*, es decir que tengan la forma que quiero que tengan, matemáticamente debería tener infinitas frecuencias (infinitas componentes del espectro en la serie de Fourier). Sin embargo, ningún dispositivo electrónico puede manejar infinitas frecuencias (ya que su ancho de banda es limitado), por lo que las series están truncadas. Entonces podemos ver una de las razones por las cuales es importante el ancho de banda de los dispositivos electrónicos (las frecuencias que pueden sintetizar o medir). Para sintetizar señales cuya forma no es armónica necesito que el ancho de banda sea suficiente para poder sintetizar la fundamental de la señal y un número adecuado de armónicos.

Analicemos todo lo dicho haciendo experimentos!

5.1. Recordando algunas cosas vistas en Física 2

5.1.1. La serie y la transformada de Fourier

La base de Fourier $\{1, \cos(2\pi n\nu_o x), \sin(2\pi n\nu_o x)\}$ nos permite escribir **cualquier función periódica** como una combinación lineal de senos y cosenos:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x) \quad (5.1)$$

donde las frecuencias $k_n = nk_o$ son múltiplos de la frecuencia fundamental ν_o y A_n, B_n amplitudes que pueden ser halladas a partir de las siguientes expresiones:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L S(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \quad (5.2)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L S(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \quad (5.3)$$

En la Fig. 7.1 se pueden observar las series de Fourier de diversas ondas periódicas.

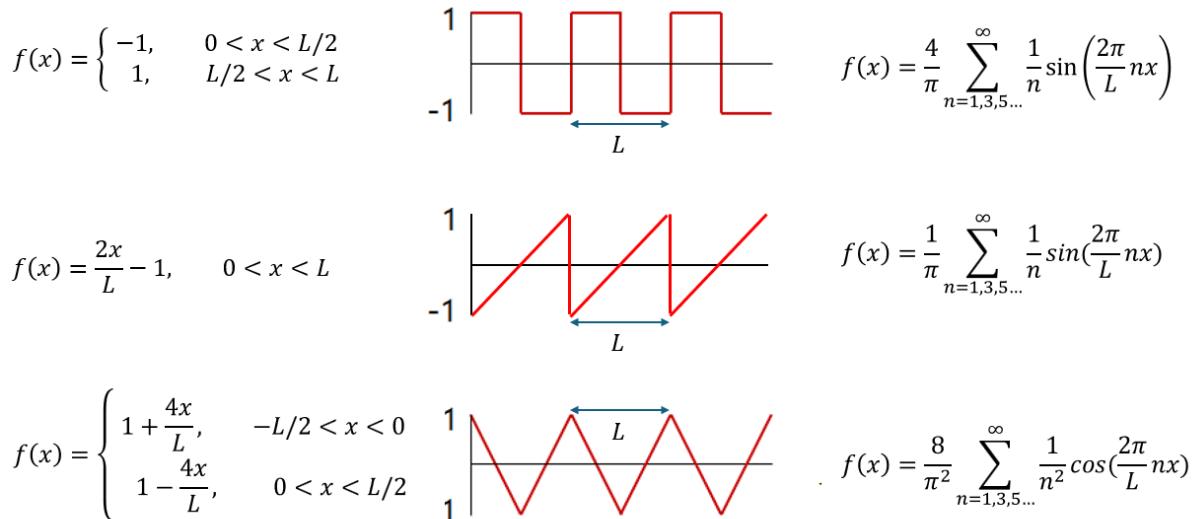


Figura 5.1: Series de Fourier de ondas periódicas cuadrada, diente de sierra y triangular.

Nota: Todo esto vale también para el tiempo, alcanza con cambiar $x \rightarrow t$ y $k_o \rightarrow \omega_o = 2\pi\nu_o$.

Tarea: Usando algún lenguaje de programación, graficar las series de Fourier de la Fig. 7.1, para un número finito de términos N_o .

-Que sucede cuando N_o aumenta?

-Cuantos términos necesito para que la serie se parezca a la función?

-Como puedo definir un error?

Así como existe una base de senos y cosenos, dado que la exponencial compleja es una combinación lineal de senos y cosenos ($e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx)$), también podemos definir la serie de Fourier en una base exponencial

$$S(x) = \sum_n^{\infty} C_n e^{ikx} \quad (5.4)$$

En donde los coeficientes C_n pueden ser hallados a partir de la siguiente expresión

$$C_n = \frac{1}{L} \int_L S(x) \cdot e^{-ikx} dx$$

Más aun, si el sistema admite un continuo de frecuencias (por ejemplo cuando no es un sistema acotado, por lo que las frecuencias no se discretizan), en lugar de usar una sumatoria discreta podemos usar una integral (por ejemplo haciendo el límite al continuo empleando la serie en base exponencial), obteniendo la transformada de Fourier. La expresión para la transformada directa es

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i2\pi\nu t} dt$$

y para la transformada inversa

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\nu)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \cdot e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

En la Fig. 5.2 se pueden observar las transformadas de algunas funciones que solemos usar.

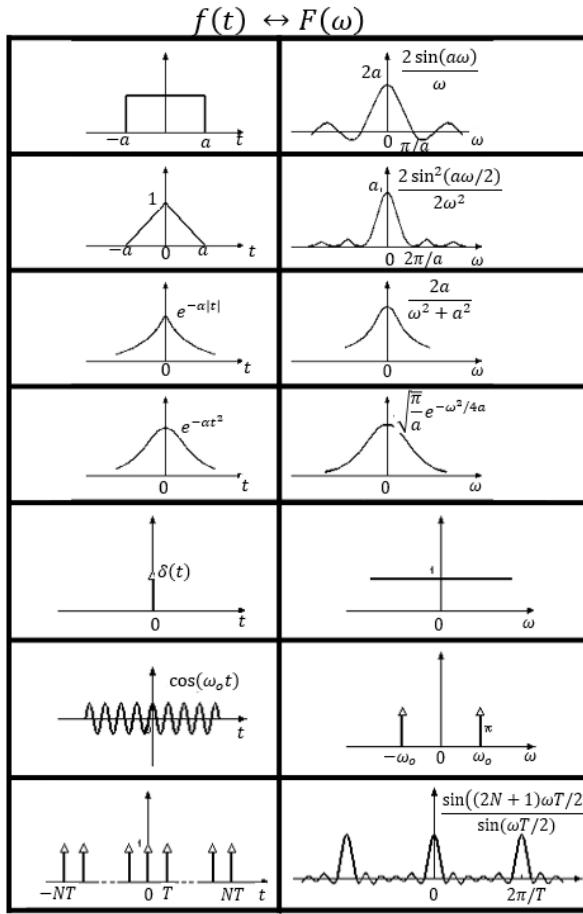


Figura 5.2: Transformadas de Fourier de distintas señales no periódicas.

Pensar: Podrías asociar las transformadas de la Fig. 5.2 a fenómenos que estudiaste en Física 2?

Veamos ahora ejemplos en donde usaron transformadas y series en Física 2.

5.1.2. Ejemplo del uso de la serie de Fourier en el problema de condiciones iniciales en sistemas acotados

Vamos a comentar someramente un ejemplo, pero si necesitás más detalles podés consultar el apunte de la materia Física 2 [?]. Tomemos como ejemplo para recordar, el de una cuerda de longitud L con extremos fijos. Tal como se mencionó en la sección 4.1.2, una posible solución es

$$\Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (5.5)$$

con $k_n = n\pi/L$. La solución más general es una superposición de modos normales

$$\Psi(x, t) = \sum_n A_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (5.6)$$

en donde las constantes A_n y φ_n están determinadas por las condiciones iniciales. Vamos a suponer que la cuerda parte del reposo, es decir $\dot{\Psi}(x, 0) = 0$, de una posición inicial dada por la expresión

$$\tilde{\Psi}(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \frac{L}{3} \\ \psi_o & \text{si } \frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3} \\ 0 & \text{si } \frac{2L}{3} < x < L \end{cases} \quad (5.7)$$

Si pedimos que la cuerda parte del reposo en la expresión 5.6, obtenemos que

$$\sum_n A_n \sin(k_n x) \sin(\varphi_n) = 0 \quad (5.8)$$

para toda posición, por lo que la única posibilidad es que $\varphi_n = 0$ para todo valor n .

La condición inicial para la deformación implica poder igualar $\Psi(x, 0) = \tilde{\Psi}(x, 0)$. Nos encontramos con el problema de que la forma general para la deformación está escrita en una base de senos, mientras que la condición inicial es una función cuadrada. De este modo lo primero que tenemos que hacer es escribir a la condición inicial en una base de senos y cosenos (la de Fourier):

$$\Psi(x, t) = \sum_p A_p \sin(p \frac{\pi}{L} x) = \tilde{\Psi}(x, 0) = a_o/2 + \sum_n a_n \cos(n k_o x) + b_n \sin(n k_o x) \quad (5.9)$$

Dado que las series de Fourier permiten escribir funciones **periódicas** como superposición de senos y cosenos, para poder expresar a la condición inicial como una serie de Fourier necesitamos convertirla en una función periódica. Pero, ¿cuál sería el período, y qué condiciones tienen que cumplir? En primer lugar, se tienen que cumplir las condiciones de borde en $x = 0$ y $x = L$. En segundo lugar, querríamos interpretar la serie de modos como otro desarrollo Fourier para igualar término a término los coeficientes. Esto es posible sólo si ambos desarrollos son de funciones con la misma periodicidad. Los períodos espaciales de los modos normales (longitudes de onda de los modos) son

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{k_p} = \frac{2L}{p}, \quad (5.10)$$

es decir que la longitud de onda del modo fundamental ($p = 1$) es $\lambda_1 = 2L$, y todos los otros son fracciones enteras de este. Por lo tanto, en analogía, vamos a pedir que el período Λ

de una extensión periódica de $\tilde{\Psi}(x, 0)$, sea la longitud de onda fundamental: $\Lambda = \lambda_1 = 2L$. Entonces, siendo que $k_o = 2\pi/\Lambda$, reemplazando $\Lambda = 2L$ se obtiene $k_o = \pi/L$, en cuyo caso la igualdad entre series quedará

$$\Psi(x, t) = \sum_p A_p \sin(p \frac{\pi}{L} x) = \tilde{\Psi}(x, 0) = a_o/2 + \sum_n^\infty a_n \cos(n \frac{\pi}{L} x) + b_n \sin(n \frac{\pi}{L} x) \quad (5.11)$$

Entonces ya sabemos cuál es el período de la extensión. Para terminar de determinar cuál es la función extendida correcta, notemos que en la igualdad anterior entre desarrollos, del lado de modos normales solamente tenemos senos, mientras que para Fourier tenemos senos y cosenos. Por lo tanto, necesitaremos que $a_n = 0$ para todo n . Esto lo logramos si extendemos a $\tilde{\Psi}(x, 0)$ de forma impar. En la Fig. 5.3 encontramos la extensión impar de $\tilde{\Psi}(x, 0)$, con período $\Lambda = 2L$ y que además cumple las condiciones de borde (en este caso dos extremos fijos).

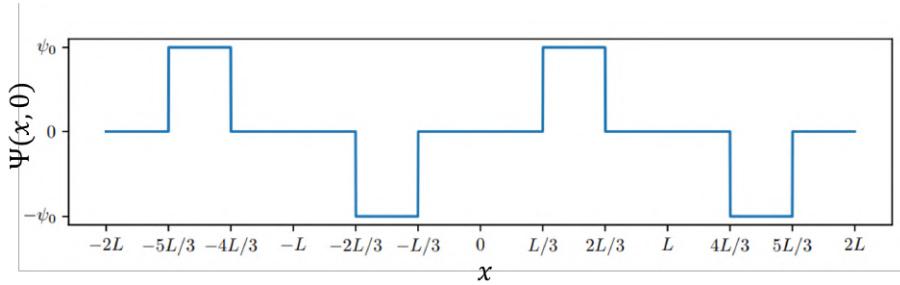


Figura 5.3: Extensión impar de $\tilde{\Psi}(x, 0)$.

Solo queda ahora resolver las integrales de las ecuaciones 5.3 tomando como período $2L$, es decir:

$$a_n = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} f(x) \cos \left(\frac{2\pi n x}{2L} \right) dx = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos \left(\frac{\pi n x}{L} \right) dx \quad (5.12)$$

$$b_n = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} f(x) \sin \left(\frac{2\pi n x}{2L} \right) dx = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin \left(\frac{\pi n x}{L} \right) dx, \quad (5.13)$$

a partir de las que se obtiene

$$a_n = 0 \quad (5.14)$$

$$b_{2n} = 0 \quad (5.15)$$

$$b_{2n-1} = \frac{4\psi_0}{\pi(2p-1)} \left[\cos \left(\frac{\pi(2p-1)}{3} \right) - \cos \left(\frac{\pi(2p-1)}{2} \right) \right] \quad (5.16)$$

Es decir que solo sobreviven los términos impares, al igual que la expansión en modos normales, por lo que podemos igualar los coeficientes $b_{2p-1} = A_p$ en la expresión 5.11. De modo que la solución para todo tiempo es

$$\Psi(x, t) = \sum_n \left\{ \frac{4\psi_0}{\pi(2p-1)} \left[\cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{2}\right) \right] \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \right\} \quad (5.17)$$

5.1.3. Ejemplo del uso de la transformada de Fourier en óptica

Observando la Fig. 5.2, es fácil recordar muchos problemas que resolvimos en óptica en Física 2:

1) Difracción en una rendija: la difracción en campo lejano es la transformada de Fourier de la rendija. Observar en la figura 5.2 que la transformada de la función cuadrada es la función seno cardinal.

2) La interferencia de N fuentes puntuales (campo lejano), es la transformada de Fourier de un peine de deltas como el último ejemplo de la figura 5.2. Esto da como resultado máximos (puntos brillantes) centrados en múltiplos de $2\pi/T$ (los ordenes de difracción). Estos máximos son más angostos cuanto más fuentes puntuales tenga.

3) En el caso más general, la difracción por una red se calcula como la interferencia de N fuentes puntuales (N es el número de rendijas iluminadas), multiplicado por la difracción en una de las rendijas (la transformada de Fourier de una de las rendijas).

5.2. Sintonizando señales con los piezoelectrinos

Vimos que, al alimentar al emisor con una señal sinusoidal de amplitud A_o , en el receptor se mide una señal de la misma frecuencia pero cuya amplitud depende de la misma ($A(\nu)$). Entonces podemos definir a la función transferencia del par emisor-receptor PE como $T(\nu) = A(\nu)/A_o$. Vemos entonces que, si la frecuencia de alimentación está cerca del máximo de la función transferencia (curva azul en la figura 5.4), la respuesta será mucho mayor que para una señal cuya frecuencia esté en las colas de la misma (curva verde). Podemos definir al factor calidad o de mérito como $Q = \nu_o/\Delta\nu$, donde ν_o es la frecuencia central y $\Delta\nu$ el ancho a mitad de altura de la campana de resonancia. Para el caso típico de los piezoelectrinos que se encuentran en el laboratorio, $Q \sim 0,1$. Ver que cuanto más

grande es la frecuencia de resonancia y más angosta la respuesta en frecuencias, Q se hace más grande.

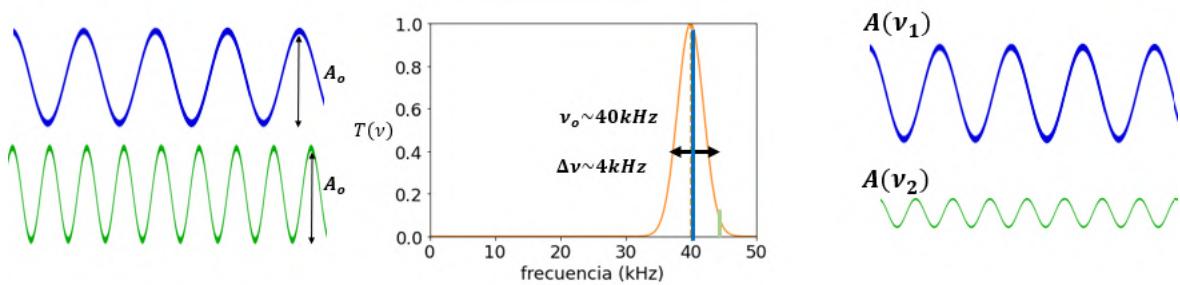


Figura 5.4: Izquierda: dos ejemplos de señales sinusoidales con distinta frecuencia con las cuales se alimenta un par ER. Medio: Curva de transferencia para el par ER. Notar que la frecuencia de la onda azul es un máximo en la función de transferencia, mientras que la verde no. Derecha: señal respuesta de cada excitación. Notar que en el caso de la onda azul la amplitud es mucho mayor que la verde.

Para pensar

¿Podemos pensar al piezoeléctrico como un filtro en frecuencias? (ver Fig. 5.4)
Explicar. ¿Cómo debería ser Q para sintonizar las frecuencias con precisión grande?

5.3. Sintonizando señales periódicas

Vamos ahora a estudiar la capacidad del piezoeléctrico de sintonizar señales. Sabemos que, en general, si la señal es periódica podemos escribirla como una suma de señales armónicas a partir de la serie de Fourier. Tomemos el ejemplo particular de la señal cuadrada (ustedes en clase pueden tomar la que más les interese). Una señal periódica cuadrada de amplitud A cuya frecuencia es ν_o como la que se muestra en la figura 5.5, puede ser representada por la serie de Fourier cuyos términos corresponden a múltiplos impares de la frecuencia fundamental:

$$S(t) = \frac{4A}{\pi} \left\{ \sin(2\pi\nu_o t) + \frac{1}{3}\sin(2\pi(3\nu_o)t) + \frac{1}{5}\sin(2\pi(5\nu_o)t) + \dots \right\}. \quad (5.18)$$

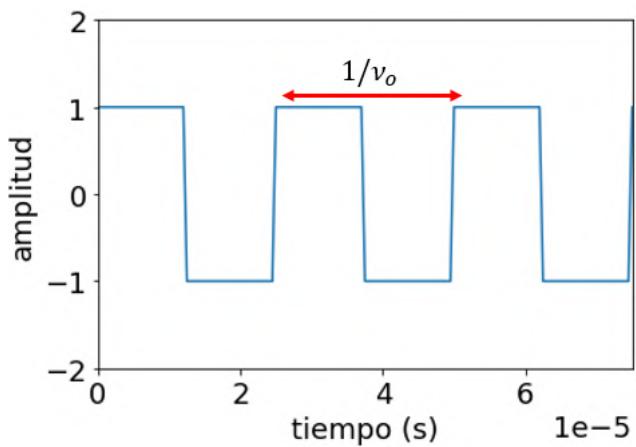


Figura 5.5: Señal periódica cuadrada de amplitud A y frecuencia ν_o .

Importante: Observar que no importa qué valor tome ν_o , los coeficientes de Fourier son siempre iguales ya que responden a la forma funcional de la señal.

En la figura 5.6(a) se puede observar la dependencia temporal de la señal y los primeros términos de la serie de Fourier. En la figura 5.6(b) se observa el **espectro** de frecuencias de la señal; es decir, la relación de los coeficientes de la serie de Fourier en función de la frecuencia. Se observa que, a medida que aumenta el número de armónico, la amplitud se hace cada vez más chica: esto hace pensar que, si bien la serie es una sumatoria infinita de términos, no necesitamos infinitos términos en la aproximación para tener una buena representación de la señal. En la figura 5.7 se puede observar la aproximación tomando $N=1$ y $N=10$ términos de la serie de Fourier.

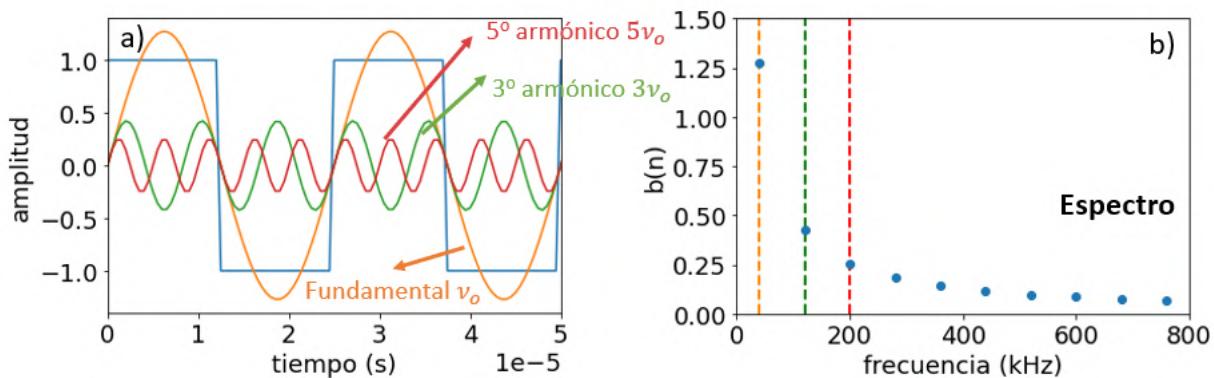


Figura 5.6: (a) Señal cuadrada (en azul) y los primeros tres términos de su serie de Fourier correspondientes al modo fundamental (amarillo), tercero (verde) y quinto (rojo) armónico. (b) Espectro de frecuencias de la señal cuadrada.

Ejercicio previo a la clase: Programar la serie de Fourier y graficarla para distintos valores de N. Estimar numéricamente el error de aproximación y definir cuántos términos es razonable tomar para tener una buena aproximación de la señal. Describir el criterio elegido.

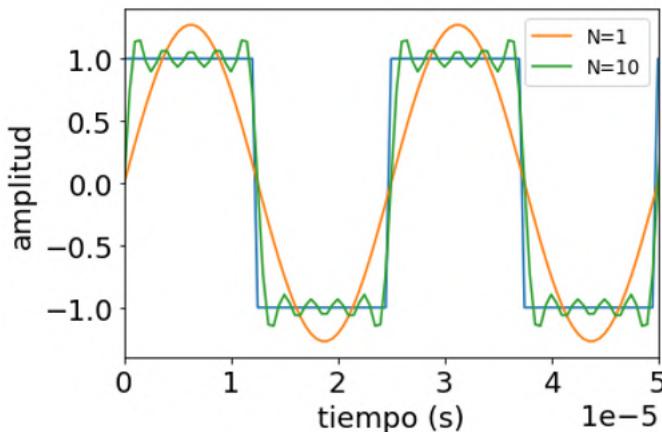


Figura 5.7: Aproximación a la señal cuadrada (azul) tomando N=1 (amarillo) y N=10 (verde) términos de la serie de Fourier.

Tal como se mencionó en la introducción de este capítulo, en cualquier instrumento para construir una señal se superponen ondas armónicas y, dado que el ancho de banda de los instrumentos es finito, no se pueden considerar infinitos términos en la superposición de las señales. Entonces, supongamos que el ancho de banda de nuestro instrumento es 800 kHz: en el caso del ejemplo podríamos tomar solo 10 términos de la serie, y por lo tanto mediríamos en el osciloscopio la señal que se muestra en la figura 5.7.

Para pensar y experimentar:

Observar en el osciloscopio el detalle de una onda cuadrada generada por el generador de funciones.

- ¿Cuál es el ancho de banda del generador de funciones? (está impreso en el mismo)
- ¿Cuál es el ancho de banda del osciloscopio? (está impreso en el mismo)
- ¿Cuál es el contenido espectral de la señal que estamos midiendo?
- ¿Quién lo limita: el osciloscopio o el generador de funciones?

Pensemos ahora el siguiente experimento. Alimentamos al piezoelectrónico emisor con una señal cuadrada. La frecuencia fundamental de la señal cuadrada la podemos cambiar libremente. ¿Qué se espera medir en el piezoelectrónico receptor? ¿Qué pasa cuando cambiamos la fundamental? Para responder esto podemos hacernos algunas preguntas que motiven el experimento. Aquí van algunos ejemplos, pero ¿qué otras preguntas se te ocurren?

Para pensar (antes de la clase) y experimentar (en clase):

Elegir la frecuencia de la señal con que se alimentará al piezoelectrónico. ¿Cómo es la separación entre las frecuencias los armónicos de la cuadrada respecto al ancho de la campana de resonancia?

¿Qué se mide en el receptor si se alimenta al emisor con una señal cuadrada de frecuencia:

- igual a la de resonancia del PE?
- igual a la de resonancia sobre un número entero impar?
- igual a la de resonancia sobre un número entero par?
- distinta a cualquiera de esas opciones?

¿Cómo utilizarías el piezoelectrónico para medir los coeficientes de la serie de Fourier?

¿Puedo reconstruir la señal empleando esos coeficientes de Fourier?

Explicar... ¡y hacerlo!

5.4. Respuesta impulsiva de un sistema

En todos los casos que vimos hasta ahora, el par ER fue alimentado con una onda periódica, y, por lo tanto, con un espectro de frecuencias discreto. Supongamos ahora que alimentamos al PE con una señal cuyo contenido espectral es continuo y coincidente con la función transferencia $T(\nu)$. Además supongamos que idealmente esta señal tiene un espectro plano, es decir, todas sus componentes espectrales tienen la misma amplitud. En la figura 5.8 se muestran algunas de las señales incluidas en la señal de alimentación en este experimento imaginario. Por lo que vimos hasta el momento, al medir en el receptor solo aquellas señales cuyas frecuencias coincidan con la campana de resonancia ofrecen una señal apreciable. Las señales con frecuencias coincidentes con la de resonancia tendrán

mayor amplitud y las que están hacia las colas de la función transferencia tendrán menor amplitud. En el receptor se mide entonces la superposición de todas esas señales. Es decir que, analizando el espectro de la señal medida, podemos medir la función transferencia del sistema piezoelectrónico ER.

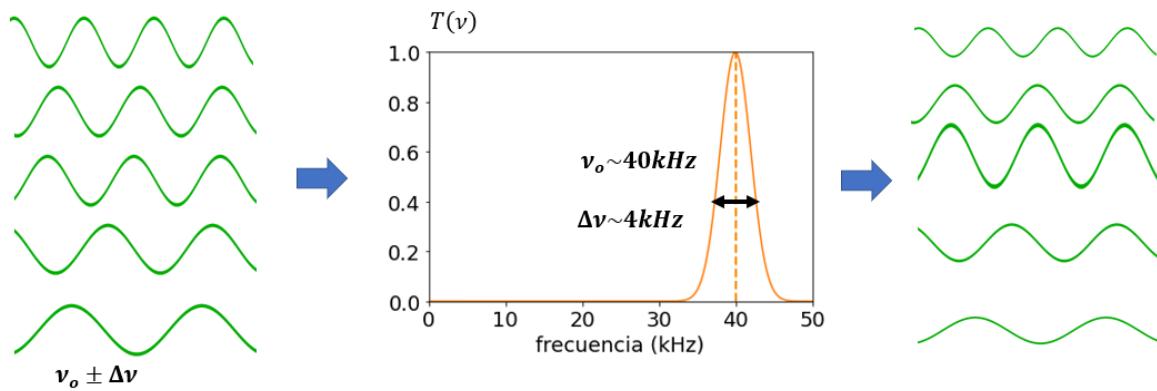


Figura 5.8: Esquema de la acción del par ER cuando se alimenta al emisor con ondas armónicas de igual amplitud cuyas frecuencias se encuentran en el rango donde la función transferencia $T(\nu)$ no es nula. La respuesta del par ER es la superposición de todas las ondas que se encuentran a la derecha.

Nos preguntamos ahora: ¿es posible excitar al PE simultáneamente en todo el rango en que este puede responder? Es decir, ¿existe alguna señal cuyo espectro sea continuo y se superponga con la función transmisión $T(\nu)$ del PE? ¿Cuál será esta señal?

Para responder esa pregunta necesitamos pensar en cuáles son las señales con mayor contenido espectral, y nos vamos a ayudar con situaciones que ya conocemos (¡y la figura 5.2!).

Analizar las siguientes situaciones con intuición y conocimiento:

- Un aplauso, un golpe en una mesa, un chasquito con los dedos, la explosión de un chaskiboom (todos lo conocemos no? :)): ¿cuánto dura el evento en el tiempo? ¿qué contenido espectral necesito para que suceda tan rápido?
- Hacer un experimento en casa grabando alguna de estas señales y utilizar la transformada de Fourier para analizar su contenido espectral.
- La difracción en una rendija en campo lejano: ¿cómo se relacionan la ‘función rendija’ y la ‘función difracción’? ¿Cuánto espacio ocupa la rendija? ¿Cuánto espacio ocupa la difracción? ¿Cómo se relaciona la difracción con la transformada de Fourier de la rendija?

Nota: Recordar la definición de la transformada de Fourier explicadas anteriormente.

5.4.1. Respuesta al impulso

Todas las situaciones que describimos anteriormente están relacionadas con señales del tipo impulsivas. Es decir, señales muy cortas en el tiempo y de amplitud muy grande. El impulso ideal es una $\delta(t)$ de Dirac, cuya transformada de Fourier (TF) es una constante (Fig. 5.2), por lo que su contenido espectral es infinito. Sin embargo, experimentalmente no podemos tener una señal que sea una delta (ya vimos que los dispositivos electrónicos tienen un ancho de banda limitado). Entonces, veamos cuál es la mejor señal impulsiva que podemos generar.

En la figura 5.9 se observa un pulso cuadrado de ancho Δt y altura $1/\Delta(t)$ (es decir área $A = 1$). Llamaremos a esta función $x(t) = \text{rect}(t)$. En el límite de $\Delta t \rightarrow 0$, el pulso cuadrado se parece cada vez más a la delta de Dirac. La TF del pulso cuadrado de ancho Δt es la función seno cardinal $\text{sinc}(\nu/\Delta\nu)$, que tiene su máximo en la frecuencia $\nu = 0$, y el ancho de la región más significativa es ($\sim 1/\Delta t$). Vemos que a medida que disminuye Δt el ancho de la función sinc aumenta, es decir, el contenido espectral aumenta. Entonces, generando el pulso más angosto posible obtendremos el mayor ancho espectral, pero centrado en la frecuencia $\nu = 0$.

Experimental: ¿Cuál es el pulso más angosto que se puede generar empleando el generador de funciones del laboratorio? ¿Qué contenido espectral tiene?

Todavía podríamos hacer un truco más para correr el centro del espectro a donde nosotros queremos. Supongamos que, en lugar de emplear una función cuadrada, empleamos una función armónica (portadora) modulada por una función cuadrada, $x(t) = \text{rect}(t)\sin(2\pi\nu_0 t)$. Para calcular la TF vamos a usar una propiedad de la transformada, cuya deducción van a aprender más adelante, pero es tan bueno que se los muestro ahora:

Propiedad: Dadas las funciones f y g , la transformada del producto se calcula así:

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} * \mathcal{F}\{g(t)\} = F(\nu) * G(\nu)$$

Es decir: la transformada de un producto, es la convolución del producto de la trans-

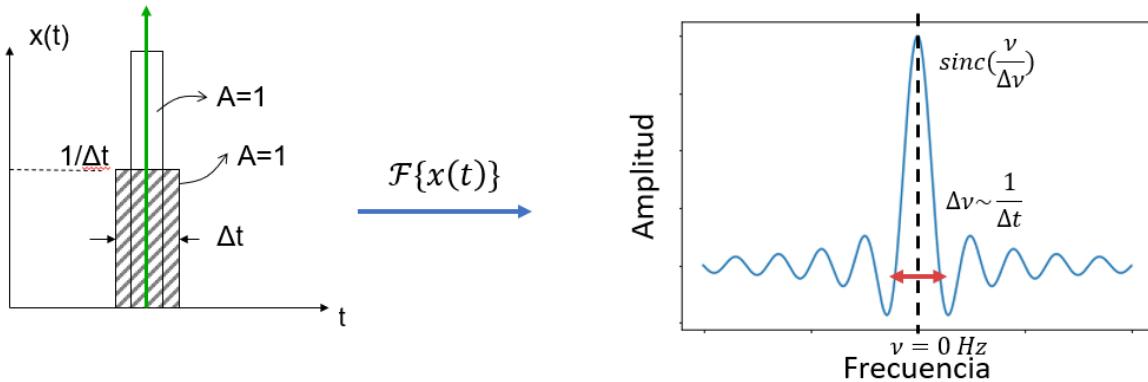


Figura 5.9: Esquema de un pulso cuadrado de ancho Δt y altura $1/\Delta t$ (izquierda) y su transformada de Fourier (derecha). A medida que $\Delta t \rightarrow 0$, el pulso se parece cada vez más a una delta y la transformada a una constante.

formada

Entonces, la TF de $x(t)$ se puede expresar como (la cuenta que sigue va para quienes hayan hecho Matemática 4, quienes aun no hayan cursado vean directamente el resultado):

$$F(\nu) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{\text{rect}(t)\sin(2\pi\nu_o t)\} = \mathcal{F}\{\sin(2\pi\nu_o t)\} * \mathcal{F}\{\text{rect}(t)\} = \quad (5.19)$$

$$F(\nu) = \delta(\nu - \nu_o) * \text{sinc}(\nu / \Delta\nu) = \text{sinc}((\nu - \nu_o) / \Delta\nu) \quad (5.20)$$

en donde usamos los resultados de la tabla 5.2 para calcular las transformadas. Es decir, agregar la portadora nos permitió correr el espectro a la frecuencia que querramos. En la figura 5.10 podemos ver un ejemplo de la señal y su transformada para una portadora de frecuencia $\nu_o = 10$ kHz. Sin embargo, cuanto más angosto es el pulso, menos oscilaciones entran, y cada vez menos se parece la señal a una modulación y una portadora.

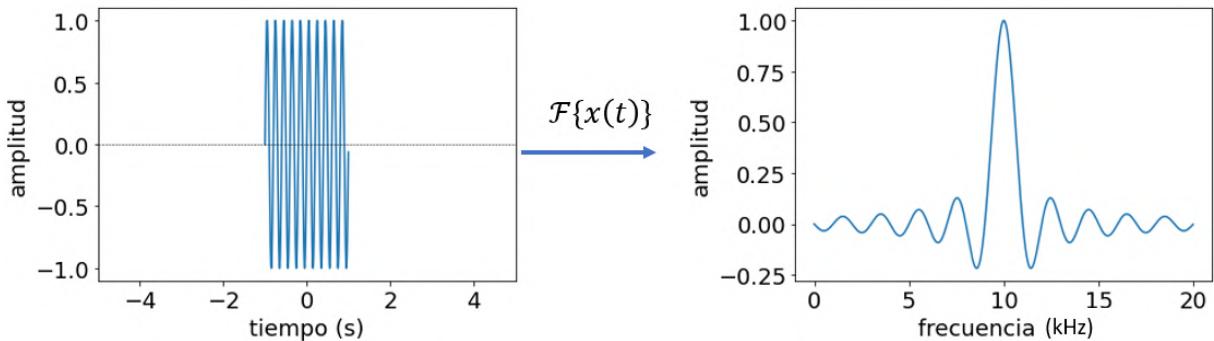


Figura 5.10: Ejemplo de una señal armónica modulada por una función cuadrada y su transformada de Fourier

Volvamos ahora al caso del pulso cuadrado, y analicemos un ejemplo hipotético sencillo para ver cómo es la evolución temporal para distintos anchos de impulsos, o a medida que el pulso cuadrado se acorta para parecerse más a un impulso ideal. El caso que se muestra podría ser el de un oscilador amortiguado. Queremos analizar qué sucede cuando, luego de recibir el impulso, el sistema evoluciona. Vemos que el ancho del pulso fija la condición inicial para la evolución posterior. Cuanto más corto, menos importante lo que suceda dentro del pulso; es decir, se lleva al sistema a la condición inicial instantáneamente. La evolución posterior depende de las frecuencias que se hayan activado, hasta que el sistema decaea completamente. Si el sistema tiene asociadas varias frecuencias o un ancho de frecuencias, cada señal asociada a una frecuencia individual decaerá con su tiempo característico propio, pero la señal total será la superposición de todas las señales. Es decir, estamos dando un impulso al sistema, y este reaccionará activando todas sus frecuencias que coincidan en rangopectral con las del impulso (idealmente un rango infinito), y la evolución posterior será que cada componente espectral decaerá con su tiempo característico. La respuesta total es la superposición de las respuestas individuales en cada frecuencia. Seguiremos trabajando con el concepto de frecuencias activadas en la siguiente sección.

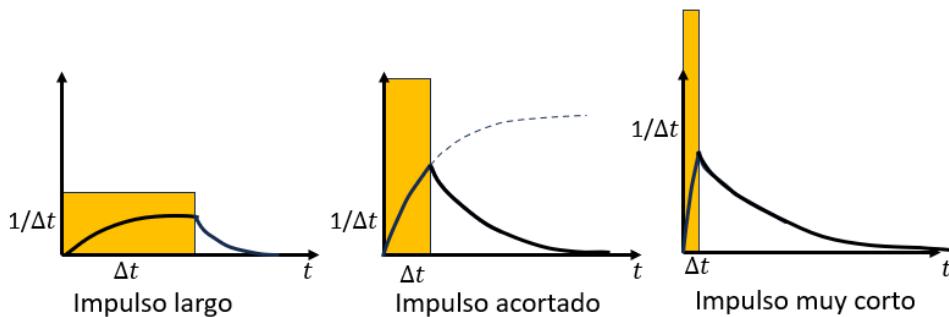


Figura 5.11: Dependencia temporal de una señal ante distintos impulsos. Cuanto más corto el impulso, es menos importante lo que pase durante Δt , la evolución posterior depende de las frecuencias activas del sistema.

5.4.2. Respuesta al escalón

En los experimentos de tiempo de vuelo en ultrasonido (piezoeléctricos) y en sonido (tubo de Kundt) usamos una señal cuadrada de baja frecuencia ($\sim 10\text{Hz}$) para medir con qué velocidad se propaga el flanco de la señal en el aire. Para eso medimos el retardo Δt entre la señal medida en el receptor (PE receptor o micrófono) y la señal de alimentación en función de la distancia entre el emisor y el receptor d , y usamos que $d = c_s \Delta t$, donde c_s

es la velocidad de propagación de las ondas. Como ejemplo de las señales medidas, en la figura observamos la señal que resulta de alimentar a un piezoeléctrico con dicho flanco.

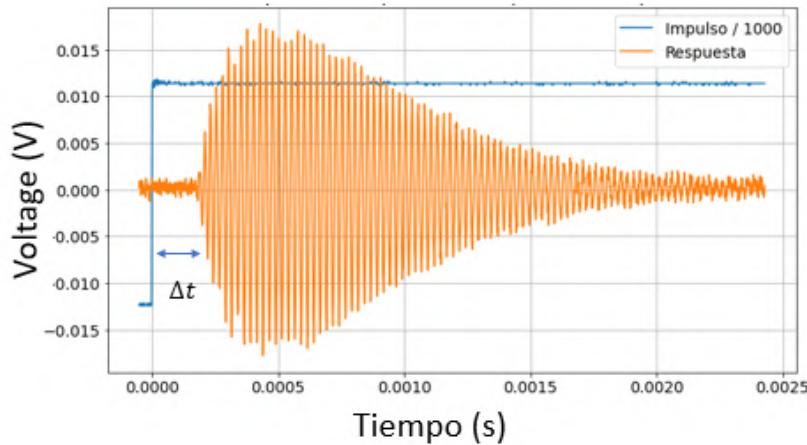


Figura 5.12: Respuesta del par ER (naranja) cuando se alimenta al emisor con una señal cuadrada de baja frecuencia (azul). Δt es el retardo entre que la señal es enviada por el emisor y recibida por el receptor.

Tratemos de entender ahora, por qué la señal adquiere esa forma. En primer lugar vemos que, para las escalas temporales que estamos manejando, podemos pensar que la señal cuadrada es simplemente una señal constante nula (frecuencia cero), un flanco vertical (ahora veremos que significa vertical) y nuevamente una señal constante (frecuencia cero). Sabemos que el piezoeléctrico no tiene respuesta en $\nu = 0$, entonces si lo estamos excitando, es porque el flanco tiene al menos una porción de su contenido espectral que coincide con la función transferencia del PE, $T(\nu)$.

Comencemos analizando conceptualmente al flanco, luego daremos descripciones más matemáticas. En la figura 5.13(a) vemos un flanco típico que podríamos medir con un osciloscopio. Podemos caracterizar al flanco midiendo el tiempo de subida de la señal (*rise time*) t_r que se suele caracterizar midiendo el tiempo que tarda la señal en subir del 10 % al 90 % del valor estable. En el ejemplo de la figura 5.13(b) se observa cómo el flanco de una señal cuadrada se va ajustando por una serie de Fourier que considera cada vez más términos. Vemos que si solo consideramos el primer armónico (una onda sinusoidal con la frecuencia fundamental) la subida de la señal es muy suave. También vemos que su flanco es más vertical cuanto más términos de la serie se consideran. Lo que estamos diciendo es que para tener un flanco vertical se necesita mucho contenido espectral. Pero ¿cuánto es mucho? Se puede ver, analizando la transformada de Fourier,

que el tiempo de subida de la señal es inversamente proporcional al ancho de banda $t_r = 0,35/BW(bandwidth)$. Entonces por ejemplo, si el tiempo de subida es 10 ns, el ancho de banda es aproximadamente 35 MHz, que es 3 ordenes de magnitud mayor que la frecuencia que necesitamos para excitar al PE.

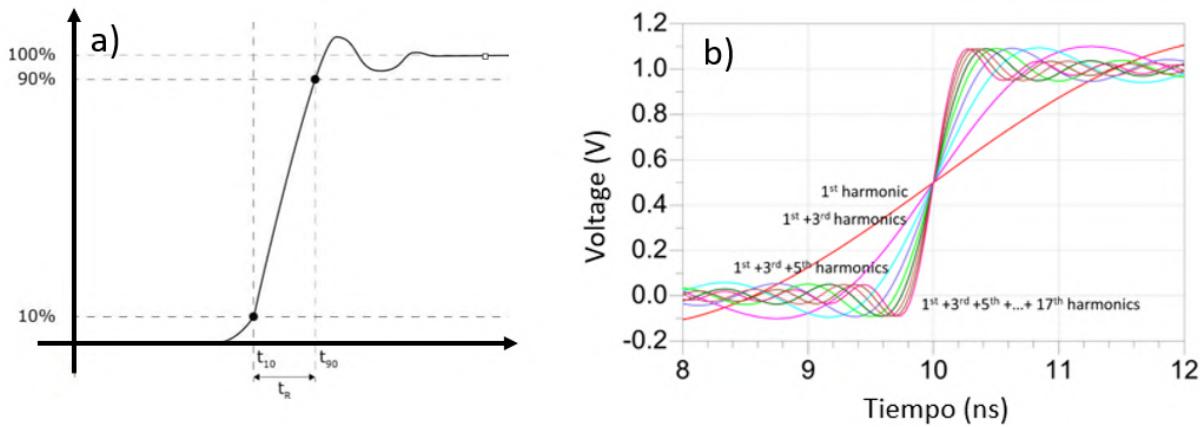


Figura 5.13: (a) Flanco de una señal cuadrada y medición del tiempo de subida (t_r). (b) Ejemplo de como la suma de más armónicos (o términos en la sumatoria) en la serie de Fourier reconstruye cada vez mejor una onda cuadrada.

Para experimentar

- Caracterizar el flanco de una señal producida en el generador de funciones empleando el osciloscopio. ¿Cuál es el tiempo de subida? ¿Cuál es el contenido espectral? ¿Quién lo limita: el generador, el osciloscopio o ambos?
- Comparar el ancho del pulso más angosto con el tiempo de subida. ¿Cuál de las dos señales es más rápida? ¿Cuál tiene mayor contenido espectral?

Nota: Si bien se comparó el flanco con términos de una serie de Fourier, todo este análisis se puede realizar empleando la transformada de Fourier de la función Heaviside: su comportamiento con la frecuencia, al igual que los términos de la serie, va como $1/\nu$ [?].

Entonces tenemos ancho de banda suficiente para excitar al PE, y lo estamos excitando en todas sus frecuencias. ¿Cómo entendemos entonces la señal de respuesta? En primer lugar, se observa que hay un retardo Δt entre que la señal es emitida y el PE receptor la recibe. Luego, de todas las posibles frecuencias contenidas en el flanco, solo aquellas que coinciden con $T(\nu)$ tienen una amplitud significativa. La señal total es la superposición de

todas las señales cuyas frecuencias están contenidas en $T(\nu)$, con amplitudes dadas por $T(\nu)$. Como todas las frecuencias están muy juntas, el resultado de dicha superposición es un batido.

Si entonces realizamos la transformada de Fourier de la señal medida, obtendremos la función transmisión del par ER.

Pensar y experimentar

Pensar cuáles son las diferencias y similitudes que hay entre el par ER piezoeléctrico y el micrófono-parlante en el tubo de Kundt.

- ¿Cómo se comparan los anchos de banda de sus respuestas?
- ¿Cómo se comparan las frecuencias que se pueden propagar entre ellos?
- ¿Qué se espera obtener si se realiza el experimento de la respuesta impulsiva en el tubo de Kundt?

5.5. Frecuencia de muestreo y transformada de Fourier

Cuando medimos con un instrumento en el laboratorio, a pesar de que la variable de interés sea continua, obtenemos una muestra discreta de esa variable. Por ejemplo, cuando medimos la amplitud de la onda en función del tiempo, estamos de acuerdo que tanto la amplitud como el tiempo son variables continuas; sin embargo, el osciloscopio nos entrega una señal que es digitalizada y muestreada.

La digitalización depende de los bits que tenga la placa de adquisición del osciloscopio o del instrumento que estemos usando. Por ejemplo, si nuestra placa es de 12 bits, significa que todo el rango dinámico que puede medir nuestro instrumento ΔV , va a estar dividido en valores digitales $\Delta V/2^{12}$.

El muestreo de una señal dependiente del tiempo corresponde a tomar datos equiespaciados en un tiempo dt o a una frecuencia de muestreo $f_s = 1/dt$ determinada. La frecuencia de muestreo define el número de muestras que se obtienen de la señal por segundo, y está limitada por el instrumento de medición. En este proceso hay que ser cuidadosos en no perder información de la señal. En la Figura 5.14 se muestra un ejemplo

de una señal muestreada (medida) utilizando una frecuencia más chica que la de la señal a medir, por lo que se obtienen puntos discretos sobre la señal. Sin embargo, se observa que la señal muestreada (puntos azules) poco tiene que ver con la señal que se desea medir. Si la frecuencia de muestreo no es adecuada, la señal medida puede resultar en una señal completamente distinta a la original. Este efecto se lo conoce como *aliasing*.

El teorema de Nyquist, establece que una señal estará correctamente muestreada si la frecuencia de muestreo f_s es al menos el doble de la frecuencia más alta de la señal f_{max} .

$$f_s > 2f_n. \quad (5.21)$$

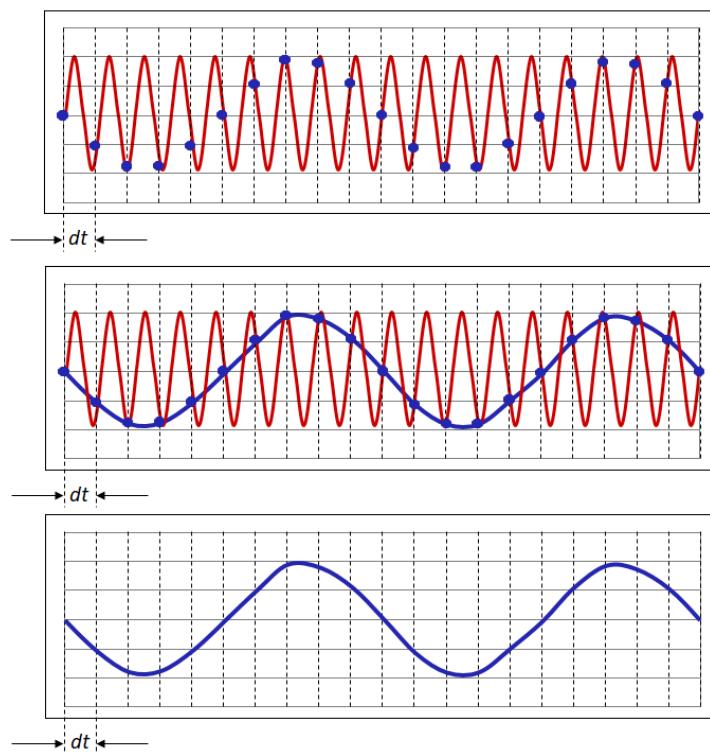


Figura 5.14: Señal continua periódica de frecuencia f_0 (en rojo) y señal medida (en azul) con una frecuencia de muestreo $f_s < f_0$ tal que la señal que se obtiene es una onda armónica con una frecuencia distinta a f_0 .

Si, por ejemplo, se desea muestrear una señal que contenga frecuencias de hasta 8 kHz, se necesita una frecuencia de muestreo de al menos 16 kHz. La mitad de la frecuencia de muestreo (equivalente a f_{max}), en este ejemplo 8 kHz, se denomina frecuencia de Nyquist, f_n .

Veamos cómo se desprende este teorema observando el espectro en frecuencias (espacio transformado) de la señal. En la Figura 5.15 se observa una señal continua $g(t)$ en el espacio de tiempos y su transformada $G(f)$ en el espacio de frecuencias. Consideraremos que la señal tiene un espectro de frecuencias acotado.

La señal muestreada $g_s(t)$ resulta de hacer el producto entre la señal continua y el muestreo, que está representado por el peine de deltas

$$s(t) = \sum_n \delta(t - n\delta t) \quad (5.22)$$

La transformada del peine de deltas es también un peine de deltas que están a una distancia f_s entre sí:

$$S(f) = \sum_n \delta(f - n f_s) \quad (5.23)$$

Es decir que, cuanto más chico sea δt , más van a estar separadas las deltas del peine en el espacio de las frecuencias.

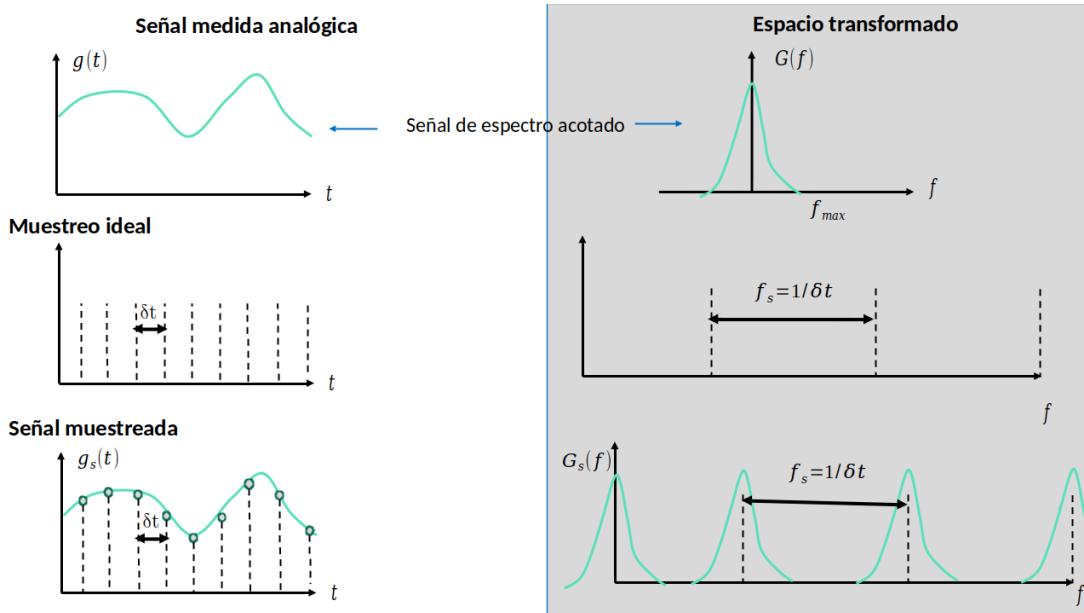


Figura 5.15: Medición de una señal continua en el tiempo y su representación en el espacio transformado de frecuencias.

La señal muestreada resulta entonces

$$g_s(t) = g(t) \sum_n \delta(t - n\delta t) = \sum_n g(n\delta t) \delta(t - n\delta t).$$

Ahora tenemos que ver cómo es el espectro de esta función, y para eso hacemos la transformada. Podemos usar una propiedad muy interesante de las transformadas y la convolución que dice que la transformada del producto de funciones, es igual a la convolución de las transformadas. Es decir:

$$\mathcal{F}\{g(t)h(t)\} = \mathcal{F}\{g(t)\} * \mathcal{F}\{h(t)\} \quad (5.24)$$

Entonces podemos calcular el espectro de la función muestreada como

$$G_s(f) = \mathcal{F}\{g(t)\} * \mathcal{F}\left\{\sum_n \delta(t - n\delta t)\right\} = G(f) * \sum_n \delta(f - nf_s) = \sum_n G(f - nf_s).$$

donde $G(f)$ es la transformada de la función sin muestrear (es decir el espectro de la señal original). No hace falta entrar en el detalle de cómo se calcula la convolución pero, en esencia, lo que implica la expresión más a la derecha es que tenemos una réplica de $G(f)$ centrada en cada posición $f = nf_s$. Veamos cómo se ve la señal en el espacio transformado cuando cambia la frecuencia de muestreo, o lo que es lo mismo, el dt en el espacio de tiempos. En la Fig. 5.17 se ven dos ejemplos: se observa que al aumentar dt (y por lo tanto disminuir f_s), en el espacio transformado comienzan a solaparse las réplicas vecinas. Esto da lugar al efecto de *aliasing* que mencionamos antes (la aparición de frecuencias que previamente no existían). Fíjense que ahora la condición de Nyquist surge naturalmente, ya que f_s tiene que ser por lo menos mayor que $2f_{max}$, para que las réplicas no se solapen.

Ahora nos preguntamos ¿cómo está muestreada la transformada? De hecho, tiene que estar muestreada, porque no podemos obtener una transformada continua si la función original es discreta. Si se realizan N mediciones (muestras) sobre la señal $g(t)$, la duración total de la señal está dada por $\Delta t = Ndt$. Mediante la transformada de Fourier discreta (DFT) en el espacio transformado obtendremos N valores de $G_s(f)$ en el intervalo $(-f_s/2, f_s/2)$ (ancho f_s). Por lo tanto, dado que en el espacio transformado tenemos también N muestras, el espaciado de frecuencias será $\Delta f = f_s/N = 1/(N\Delta t) = 1/\Delta t$ (ver Fig. 5.16). Es decir: **la resolución de la transformada está dada por el largo total de la medición.**

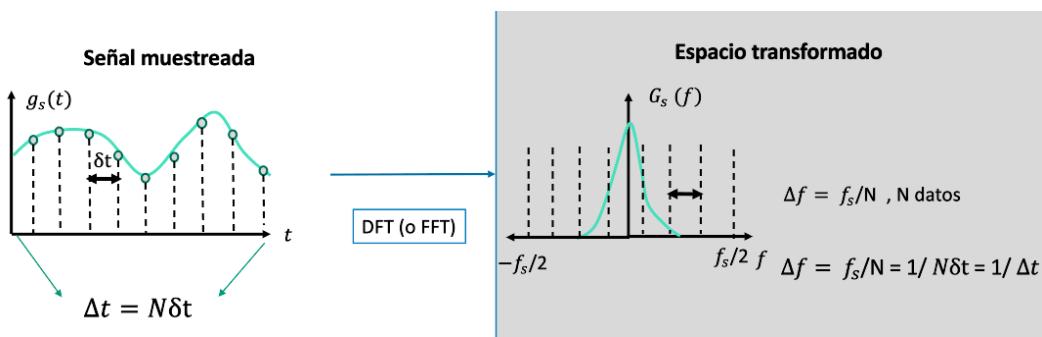


Figura 5.16: Esquema de la relación entre el tiempo en el espacio de coordenadas y las frecuencias en el espacio transformado.

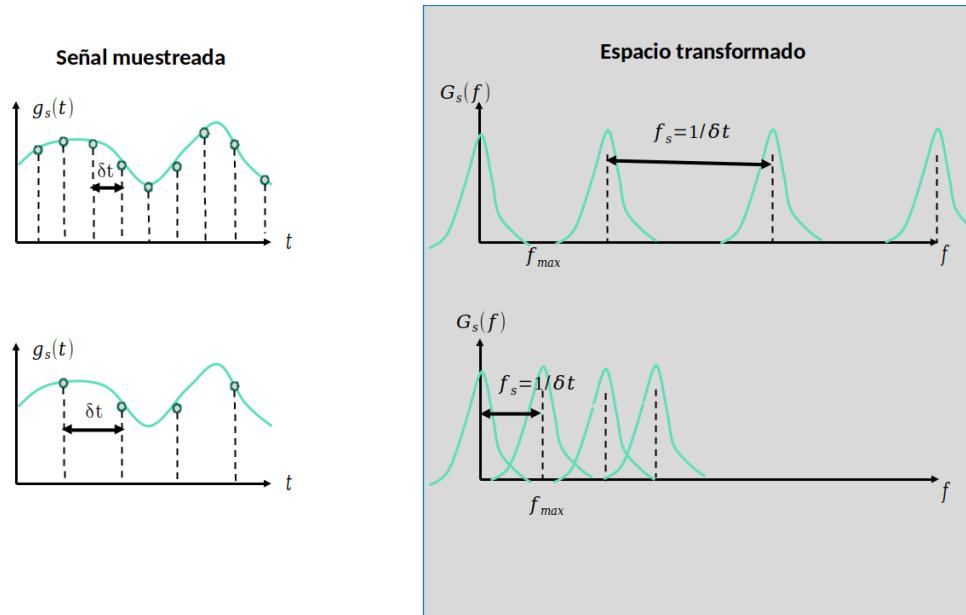


Figura 5.17: Ejemplo de una señal medida con dos frecuencias de muestreo diferentes, tanto en el espacio de coordenadas (tiempo) como en el espacio transformado (frecuencias).

Para pensar: Supongamos que se quiere medir la campana de resonancia del par PE a partir de la transformada de su respuesta. ¿Cuánto tiempo tengo que medir? ¿Qué frecuencia de muestreo debo usar para que no haya *aliasing* si la campana está centrada en 40kHz y tiene una ancho de 5kHz? Piensen en cuántos puntos se necesitan mínimo para medir bien la campana.

Capítulo 6

Ondas electromagnéticas

Hasta ahora hemos trabajado con ondas mecánicas transversales (vibraciones en cuerdas) y longitudinales (ondas acústicas). En este capítulo, y durante la segunda mitad de la materia, trabajaremos con ondas electromagnéticas. Este tipo de ondas son esenciales en diversas aplicaciones cotidianas, desde la transmisión de señales de radio y televisión hasta el funcionamiento de dispositivos de comunicación inalámbrica y la luz que percibimos. En el espectro electromagnético (Fig. 6.1) se encuentran diversas categorías de radiación como radiofrecuencias, microondas, infrarrojo, visible, ultravioleta, rayos X y rayos gamma. Cada una de estas categorías tiene aplicaciones específicas y propiedades particulares que las hacen adecuadas para distintos usos tecnológicos, médicos, de comunicación y de investigación científica. En particular, en esta materia vamos a realizar experimentos empleando luz en la parte visible del espectro (o luz visible por los humanos), formada por la radiación electromagnética cuyas longitudes de onda se encuentran entre 400 y 700 nm.

Las ondas electromagnéticas son generalmente ondas transversales que se caracterizan por la propagación de energía a través del espacio, sin requerir un medio material para su transmisión, propagándose en vacío con una velocidad $c \sim 3 \times 10^8 m/s$. El vector de campo eléctrico puede oscilar de diversas formas en el plano perpendicular al vector de propagación, definiendo el estado de polarización (luz polarizada lineal, circular, elíptica, luz natural o luz parcialmente polarizada).

Las propiedades de propagación de la luz en materiales, están determinadas por la respuesta de los electrones en los mismos. En esta materia estudiamos solamente la respuesta lineal, pero también existen otros fenómenos muy interesantes asociados a la respuesta no lineal. El campo electromagnético que constituye a la onda interactúa con los electrones en los materiales ejerciendo fuerzas sobre estos. Los electrones en los átomos se ponen en movimiento en el campo oscilatorio de luz, desplazándose respecto a los núcleos que son

muy pesados y se mantienen quietos. El movimiento oscilatorio de los electrones genera dipolos (un desbalance de carga) oscilantes que re-irradian luz. La magnitud física que caracteriza macroscópicamente la interacción lineal con los electrones es el índice de refracción (por lineal se entiende que la polarización del material es lineal con el campo, y eso se traduce en que el desplazamiento de los electrones es proporcional al campo eléctrico de la luz).

Las propiedades de propagación más básicas son la absorción (A), transmisión (T), reflexión (R) y scattering (S), como se esquematiza en la Fig. 6.2. En general vale, por conservación de energía que $I = R + T + A + S$, donde I es la intensidad incidente.

Supongamos que un haz de luz incide con un ángulo θ_i sobre una interfaz entre dos medios. Parte del haz se refleja en la superficie con un ángulo θ_r y parte se transmite con un ángulo θ_t . El valor de los ángulos θ_t y θ_r se obtienen a partir de las leyes de Snell

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t) \quad (6.1)$$

$$\theta_r = \theta_t. \quad (6.2)$$



Figura 6.1: Esquema de los tipos de ondas y frecuencias que abarca el espectro electromagnético, donde solo una pequeña porción es visible para el ojo humano. Se muestran ejemplos de fuentes que generan esas ondas

Las ondas reflejadas y transmitidas se generan en respuesta a la oscilación de los electrones en el medio, que irradian luz al oscilar (dipolo oscilante) en presencia del campo

incidente. Al transmitirse, la luz incidente cambia de dirección porque su velocidad de propagación es menor segundo medio. Las las ondas con polarización paralela o perpendicular al plano de incidencia, se reflejan y transmiten con distinta eficiencia, que está dada por los coeficientes de Fresnel.

La absorción está relacionada con las transiciones electrónicas en los átomos. La luz puede promover electrones de un nivel energético inferior a otro de mayor energía. Luego de absorber fotones, los electrones en los átomos pueden decaer naturalmente a estados de menor energía (como siempre es conveniente), y lo pueden hacer emitiendo luz en una frecuencia distinta a la incidente (fluorescencia) o transformando esa energía en calor (o vibraciones en el material).

La dispersión de luz (scattering) sucede cuando en el medio hay partículas o moléculas cuyo tamaño es chico comparado con la longitud de onda, que provocan que la luz cambie su dirección. En el modelo microscópico de dipolos, cuando los dipolos son iluminados estos oscilan con la misma frecuencia que la luz, al estar oscilando estos emiten luz en todas las direcciones.

La luz transmitida es aquella que pudo atravesar el material, sin absorberse ni dispersearse.

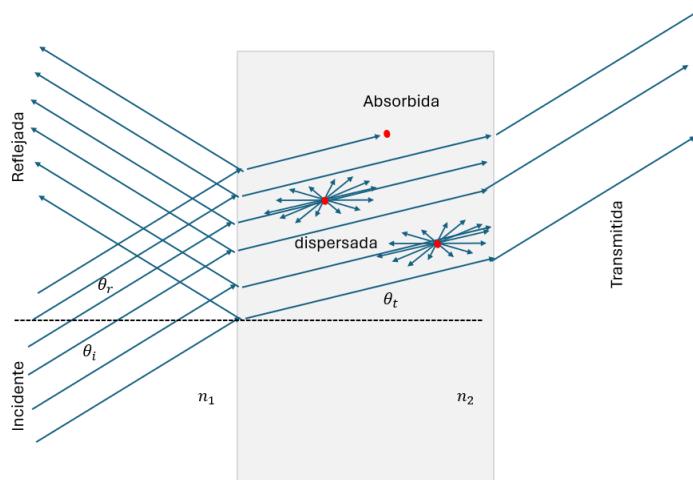


Figura 6.2: Un haz que incide en el material con un ángulo θ_i , puede reflejarse, refractarse en su superficie. La luz refractada, puede dispersarse, absorberse o transmitirse.

6.1. Polarización de la luz

La luz es una onda electromagnética compuesta por campos eléctricos \vec{E} y magnéticos \vec{H} que oscilan perpendicularmente entre sí y, a su vez, éstos son perpendiculares a la

dirección de propagación, dada por el vector de ondas \vec{k} . Si la onda es monocromática (una única frecuencia) y se propaga en la dirección \vec{z} , podemos escribir al campo eléctrico como

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(kz - wt)\hat{x} + E_{0y} \cos(kz - wt + \phi)\hat{y}. \quad (6.3)$$

En notación compleja, la ecuación anterior se puede re-escribir como

$$\vec{E} = E_{0x} e^{i(kz-wt)}\hat{x} + E_{0y} e^{i(kz-wt+\phi)}\hat{y} = e^{i(kz-wt)}(E_{0x}\hat{x} + E_{0y}e^{i\phi}\hat{y}). \quad (6.4)$$

Otra manera de visualizar esta ecuación es escribiendo las componentes cartesianas de manera vectorial, de la siguiente manera

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y}e^{i\phi} \end{pmatrix} e^{i(kz-wt)}. \quad (6.5)$$

Una propiedad relacionada con la luz es su polarización, que se refiere a la orientación preferencial de las oscilaciones del campo eléctrico. Ver que según las ecuaciones anteriores, las componentes en \hat{x} e \hat{y} del campo eléctrico pueden oscilar con distintas amplitudes y fases. Al vector que representa la forma en que oscila el campo eléctrico, se lo llama polarización. Si fijamos valores para las amplitudes y fases en valores particulares, podemos encontrar distintos tipos de polarización, como se muestra en la figura 6.3:

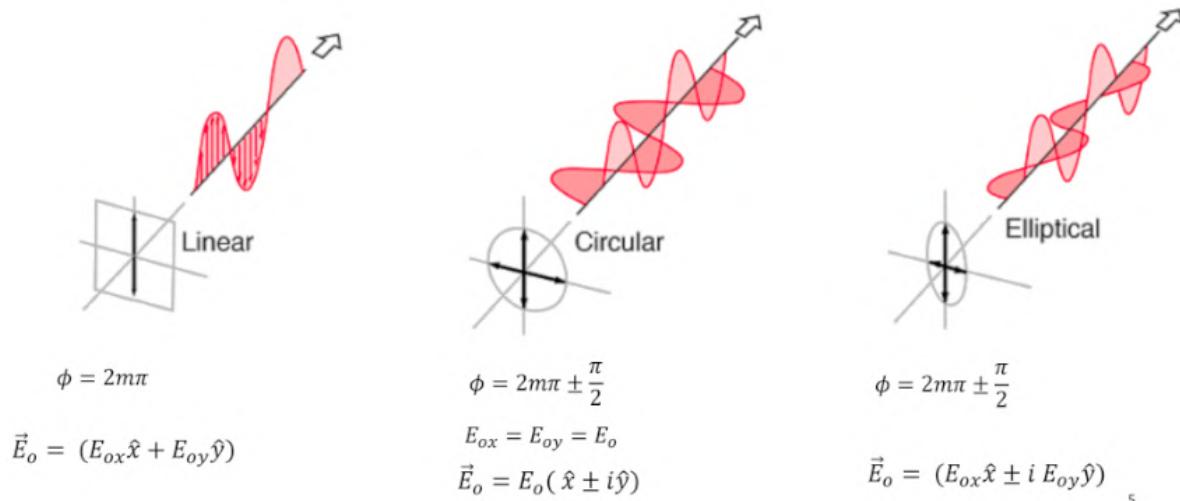


Figura 6.3: Onda electromagnética polarizada lineal, circular y elíptica, y sus respectivos vectores de polarización escritos en forma genérica.

- Polarización lineal: En la polarización lineal las oscilaciones eléctricas se realizan en un solo plano, lo que resulta en una onda que vibra en una dirección específica.

- Polarización circular: El vector de polarización oscila girando (en sentido horario o antihorario) describiendo un patrón helicoidal a medida que se propaga. En el plano perpendicular a \vec{k} , el vector de polarización describe un círculo.
- Polarización elíptica: La polarización elíptica es una combinación de la polarización lineal y circular. Las oscilaciones siguen una trayectoria elíptica a medida que se propagan. Este tipo de polarización puede ser tanto elíptica derecha como elíptica izquierda, dependiendo del sentido de giro. En el plano perpendicular a \vec{k} , el vector de polarización describe una elipse.
- Luz naturalmente polarizada (o no polarizada): Una onda electromagnética no polarizada se caracteriza por la vibración aleatoria del campo eléctrico, de manera que en los tiempos característicos de detección, no se puede determinar una dirección de oscilación particular. Ejemplos de luz naturalmente polarizada son el sol, el fuego, las lámparas de filamento y tungsteno, lámparas de gas, entre otras (ver Fig. 6.4). Por qué sucede esto? porque las fuentes están compuestas por un número enorme de átomos que emiten luz. Cada átomo emite por un tiempo del orden de $10^{-8}s$, y el campo eléctrico emitido no tiene ninguna dirección de oscilación ni de propagación preferencial (es decir, difiere entre distintos átomos). La emisión de la fuente está formada por la superposición de las ondas emitidas por todos los átomos, con polarizaciones que cambian caóticamente, dando lugar a un campo total que varía también aleatoriamente y se emite en todas las direcciones. Si la luz es parcialmente polarizada la amplitud en una dirección es significativamente mayor que en la otra.

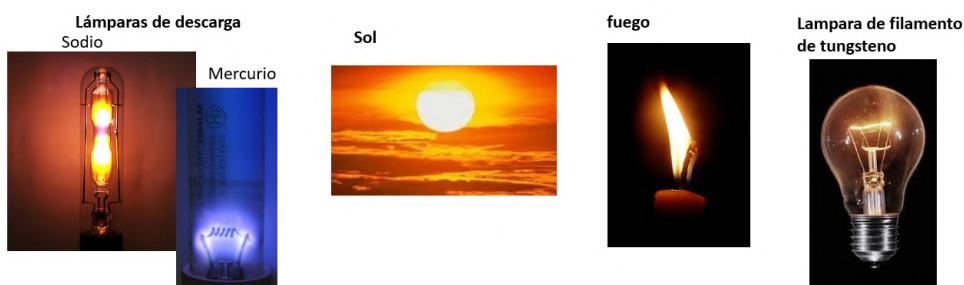


Figura 6.4: Ejemplos de fuentes que producen luz natural

6.2. Fenómenos que polarizan la luz

La luz natural no está polarizada, pero hay ciertos fenómenos y materiales en la naturaleza que polarizan la luz. Un ejemplo son los materiales anisótropos, como la calcita.

La reflexión polariza la luz (esto es siempre cierto?). El scattering o dispersión de la luz también es un fenómeno polarizante.

6.2.1. Polarización por reflexión

Cuando las ondas de luz se reflejan en una superficie, pueden polarizarse parcial o totalmente según el ángulo de incidencia y las propiedades de la superficie. Supongamos que un haz de luz natural incide sobre una superficie con un ángulo de incidencia θ_i respecto a la normal a la superficie, como se indica en la Fig.6.5a.

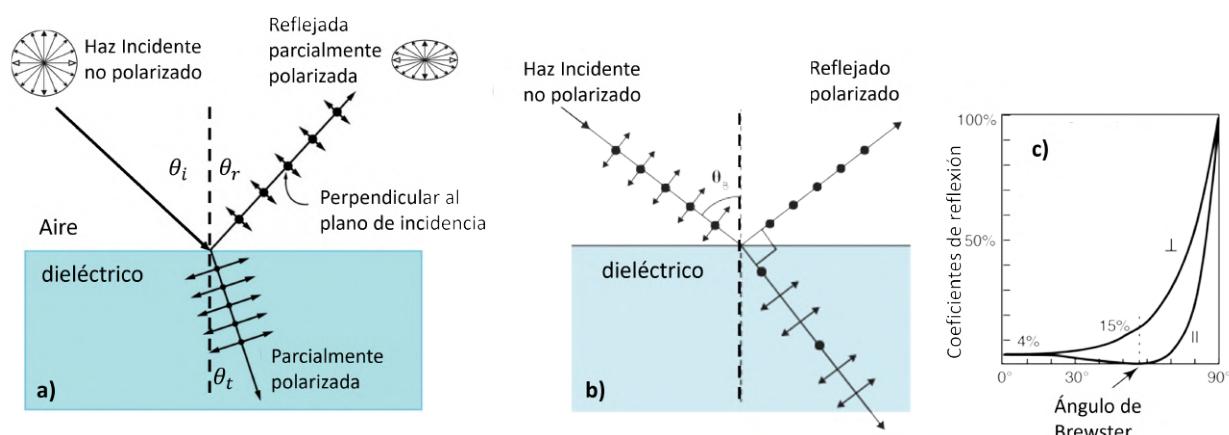


Figura 6.5: a) Esquema del plano de incidencia, indicando los ángulos intervinientes y la polarización de los haces. b) Esquema similar cuando el ángulo incidente es el de Brewster θ_B . c) coeficientes de reflexión para las polarizaciones perpendiculares y paralelas al plano de incidencia

El ángulo de Brewster (θ_B) es el ángulo de incidencia para el cual la luz reflejada se polariza completamente, como se muestra en la Fig. 6.5b. La polarización de la luz reflejada en ese caso es paralela a la superficie. Esto sucede debido al peculiar comportamiento de las ondas de luz y su interacción con los átomos en el material, que se ve manifestada en los coeficientes de reflexión de Fresnel (Fig. 6.5c).

En general los campos eléctricos de las ondas luminosas incidente, reflejada y transmitida, se pueden descomponer en componentes paralelas (E^{\parallel}) y perpendiculares (E^\perp) al plano de incidencia. En el ángulo de Brewster, la componente del campo eléctrico reflejado paralela al plano de incidencia E_R^{\parallel} se anula, dando como resultado una luz reflejada completamente polarizada. Por qué sucede esto? Dijimos anteriormente que la luz incidente produce la oscilación de los electrones que forman dipolos en el segundo medio. Estos mismos dipolos oscilantes son los que generan la luz reflejada. Los dipolos oscilarán en la dirección de la polarización de la luz transmitida. Si la polarización de la luz transmitida E_T^{\parallel} es paralela a la dirección de propagación de la onda reflejada, estos dipolos no podrán

generar campo eléctrico reflejado con esa polarización (como veremos más abajo, los dipolos no generan radiación en la dirección de oscilación), por lo que la luz reflejada será polarizada E_R^\perp .

Entonces el efecto de polarización está influenciado por las propiedades del medio en que se propagan los haces, como su índice de refracción. En el ángulo de Brewster, el haz reflejado y transmitido forman un ángulo de 90° , y, esta condición junto a las leyes de Snell, permiten obtener

$$\theta_B = \arctan(n_2/n_1), \quad (6.6)$$

donde n_1 es el índice de refracción del medio desde donde se incide (por ejemplo, aire) hacia el segundo medio de índice n_2 (mayor que n_1), en donde se transmiten los haces (por ejemplo, un superficie de vidrio o agua).

6.2.2. Polarización por dicroísmo

Los materiales dicroicos tienen la propiedad de absorber la luz de forma selectiva según sea su estado de polarización, permitiendo que solo pase la luz con una polarización específica. Principalmente existen dos tipos de materiales dicroicos según la polarización de la luz que manipulan: lineales (cuando hay una dirección lineal preferencial de absorción o transmisión) y circulares (cuando reaccionan diferente según sea la polarización circular izquierda o derecha).

Los materiales (polarizador lineal), en general, están formados por moléculas alineadas (mediante procesos de fabricación o propiedades inherentes del material) que absorben selectivamente la luz con una orientación particular del campo eléctrico (ver Fig. 6.6). La luz incide con polarización paralela al eje mayor de las moléculas es absorbida, por lo que la luz que emerge del material está polarizada en la dirección perpendicular a la de las moléculas. Quedan entonces definidos los ejes de absorción y transmisión del material. En la Fig. 6.7 se muestra el efecto de un polarizador lineal cuando sobre él incide luz natural. La luz que emerge, independientemente de la polarización incidente, es polarizada linealmente en la dirección del eje de transmisión.

En este contexto, cuando sobre el polarizador lineal incide luz linealmente polarizada (Fig. 6.8), es posible describir la relación entre la intensidad de la luz incidente y transmitida utilizando la ley de Malus

$$I = I_0 \cos^2(\theta) \quad (6.7)$$

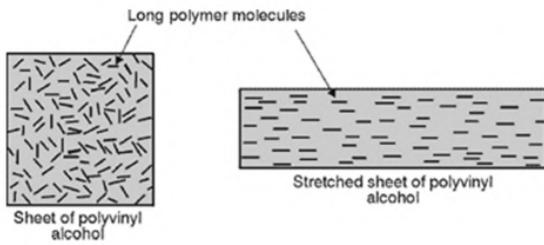


Figura 6.6: Al estirar una lámina de polyvinyl alcohol, sus moléculas se alinean generando una dirección preferencial para la absorción

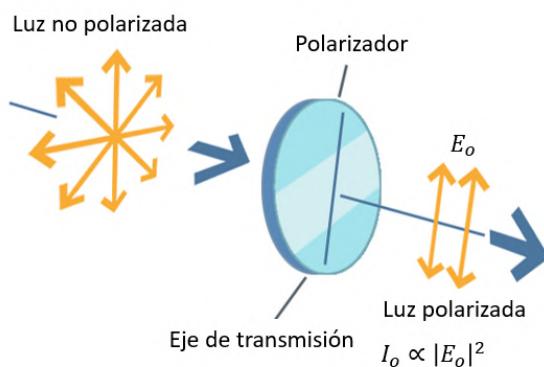


Figura 6.7: La luz naturalmente polarizada emerge del polarizador con polarización lineal, en la dirección perpendicular a la dirección de absorción

donde la intensidad de la luz transmitida (I) es directamente proporcional a la intensidad de la luz incidente (I_0), y un factor igual al coseno al cuadrado del ángulo (θ) entre la dirección de polarización del haz incidente y el eje rápido del polarizador (ver Fig.6.8).

Esta ley demuestra cómo un material dicroico lineal permite seleccionar y controlar la polarización de la luz. Por ejemplo, si el ángulo es $\theta = 0$, la intensidad se reduce a cero, bloqueando toda la luz que no está alineada con el polarizador. Del mismo modo, se pueden usar lentes de sol de polarizadores para anular las reflexiones que están polarizadas (aquellas cuyo ángulo de incidencia es cercano al de Brewster), como se esquematiza en la Fig. 6.9. Con este mismo truco, podes salvarte de un ataque de cocodrilo ([ver link](#)).

Para pensar: Al expresar la ley de Malus, consideramos que los polarizadores son ideales, de modo que la absorción solo se da por el efecto dicroico. Como modificamos esta expresión para considerar un polarizador real? Quien debería ser I_o ?

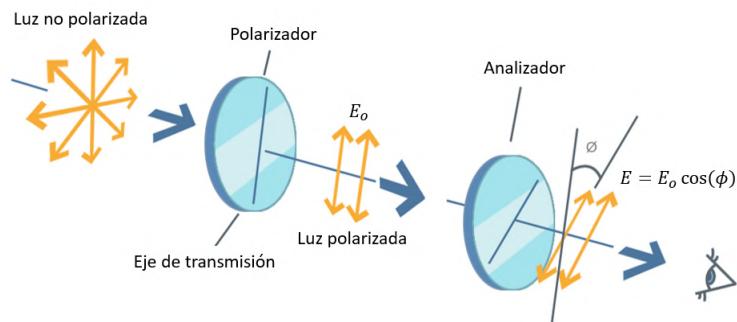


Figura 6.8: El haz incidente sobre el analizador, está linealmente polarizado en la misma dirección que el eje de transmisión del polarizador. El analizador está rotado en un ángulo ϕ respecto del eje del polarizador.

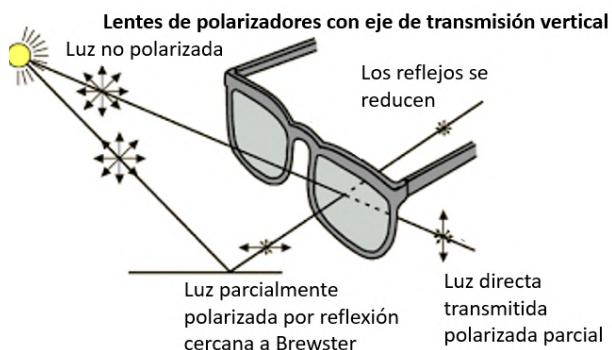


Figura 6.9: Los anteojos con vidrios polarizados permiten anular los reflejos polarizados

6.2.3. Polarización por dispersión (scattering)

Cuando la luz se propaga por un medio se dispersa. Si las partículas del medio tienen un tamaño comparable a la longitud de onda de la luz, este proceso se denomina dispersión o scattering de Rayleigh. Esencialmente cuando la luz incide sobre una molécula/átomo, los electrones que los constituyen oscilan con el campo electromagnético externo formando un dipolo oscilante. Este dipolo re-irradia luz, tal como lo haría una antena dipolar. Los medios en donde se dispersa la luz están compuestos por un número elevado de partículas. Debido a que las partículas están distribuidas en posiciones aleatorias, la luz dispersada por cada partícula llega al punto particular de observación con fases aleatorias, por lo tanto la radiación es incoherente y la intensidad resultante es la suma de las amplitudes al cuadrado de luz dispersada en cada partícula (sin término de interferencia). El scattering de Rayleigh es inelástico, porque por las leyes de conservación la frecuencia de las ondas emitidas es igual a las incidentes. La expresión que corresponde al vector de Poynting (vector cuya dirección dice hacia donde fluye la energía, y su magnitud la intensidad) de

un dipolo oscilante es

$$\langle \mathbf{S} \rangle \sim \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (6.8)$$

donde p_0 es el momento dipolar y c la velocidad de la luz en vacío. Observemos algunas cuestiones importantes. En primer lugar, el módulo del vector de Poynting es directamente (inversamente) proporcional con la frecuencia (longitud de onda) a la cuarta. En segundo lugar, depende inversamente de la distancia al cuadrado y tiene simetría acimutal (no depende del ángulo acimutal polar). Además, depende del $\sin^2(\theta)$, o sea tiene una dirección de emisión preferencial: la emisión es máxima cuando $\theta = \pi/2$, mínima cuando $\theta = 0$, o sea en la dirección de oscilación del dipolo. En la Fig. 6.10 se observa el patrón de radiación de un dipolo, que se obtiene a partir de los campos electromagnéticos. Notar que, la emisión tiene simetría acimutal, y en la dirección de oscilación del dipolo (flechita) no hay emisión.

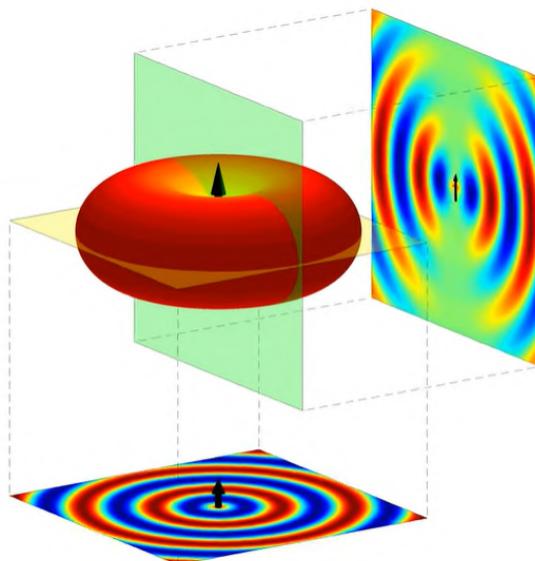


Figura 6.10: Simulación de el campo electromagnético irradiado por un dipolo. Se observa que no emite en la dirección de oscilación, tiene simetría acimutal, y emite preferencialmente en la dirección perpendicular a la de oscilación. Gráfico adaptado de [este video](#).

A partir de estos conceptos, podemos entender por ejemplo, cual es el color del cielo y cual es su polarización.

La dependencia de la longitud de onda ($\sim 1/\lambda^4$) de este tipo de dispersión es responsable de los cielos azules y los atardeceres rojos, como se esquematiza en la Fig.6.11. Las longitudes de onda más cortas (azules) se dispersan mucho más que las largas (rojas). El

sol emite luz blanca (en todo el espectro visible) y la luz tiene que atravesar la atmósfera para llegar a nosotros. Cuando el sol está alto (por ejemplo al medio día) la luz recorre una capa relativamente angosta en la atmósfera. La mayor parte del espectro visible puede recorrer mayor distancia sin desviar su recorrido, pero las ondas en el espectro azul se dispersan en todas las direcciones. Por ese motivo vemos al sol casi blanco, y alrededor vemos al cielo celeste. En cambio al atardecer, el sol está en su posición baja, por lo que la luz recorre una distancia mucho mayor en la atmósfera. Los haces azules se dispersan cambiando su recorrido, pero la distancia que tienen que recorrer es tan grande, que prácticamente no llegan al observador. De este modo, vemos el cielo anaranjado.

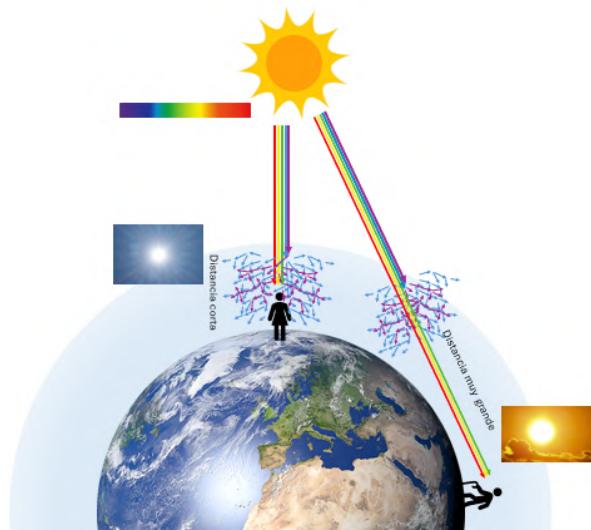


Figura 6.11: La dispersión de Raileigh es responsable de que veamos el cielo azul durante el día y naranja al atardecer

Consideremos ahora la polarización de la luz del sol (no polarizada) entrando a la atmósfera terrestre. La fuente está tan lejos que podemos considerar a los haces incidentes sobre la tierra paralelos, o casi paralelos (una onda plana no polarizada). Nuevamente consideraremos dos situaciones esquematizadas en la Fig. 6.12. Los haces que entran a la atmósfera por el camino 1, inciden normalmente sobre el observador (gorro rojo). Como ya vimos los haces azules se dispersan más que los rojos, pero en lo que respecta a la polarización, la luz continua siendo no polarizada. Los haces que recorren el camino 2, son observados perpendicularmente a su vector de propagación. Podemos descomponer a la polarización en dos direcciones, paralela a la dirección de observación (línea punteada roja) o perpendicular a la misma. Ahora recordemos, que al inicio de esta sección se mostró que la emisión dipolar es simétrica alrededor del dipolo, y que no hay emisión en la dirección del dipolo. Por ese motivo, la componente de polarización paralela a la

linea roja, no puede generar emisión de luz, mientras que la otra si. De este modo, la luz dispersa, observada normal a la dirección de propagación del haz incidente, es polarizada. Estrictamente, la intensidad de la onda dispersada con la polarización indicada con al flechita (paralela al papel), disminuye como $\cos^2\theta$, donde θ es el ángulo de observación . Además, como hay un sin fin de centros de scattering, en realizad la luz será siempre parcialmente polarizada.

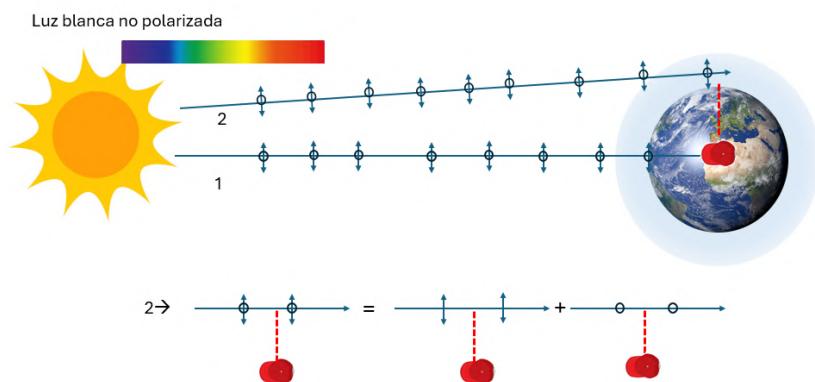


Figura 6.12: Análisis de la polarización de la luz dispersada. En incidencia normal sobre nuestros ojos, la luz tiene polarización natural. Si miramos perpendicular a la dirección de propagación, la luz es polarizada.

6.2.4. Polarización por birrefringencia

La birrefringencia, o doble refracción, es un fenómeno que se presenta en cristales no cúbicos como la calcita o en plásticos sometidos a tensión. Debido a su estructura atómica estos materiales son anisótropos y la velocidad de la luz depende de su dirección de propagación a través del material. El rayo incidente al pasar por la calcita se separa en dos rayos, llamados ordinario (o) y extraordinario (e), el rayo e se desvía más que el o (Fig. 6.13a).

El eje óptico en cristales uniaxiales está dado por el eje de simetría del cristal. El plano principal es el plano que contiene al eje óptico (Fig. 6.13a en gris). Supongamos un haz que incide perpendicular a la superficie del cristal. Podemos separarlo por polarización según sea paralela o perpendicular al plano principal, como se muestra en la Fig. 6.13a,b. El haz ordinario, viaja con su polarización perpendicular al plano principal (y por lo tanto perpendicular al eje óptico), no se desvía y viaja con velocidad $v_{\perp} = c/n_o$. En cambio el haz extraordinario, tiene polarización paralela al plano principal. Entonces, el campo

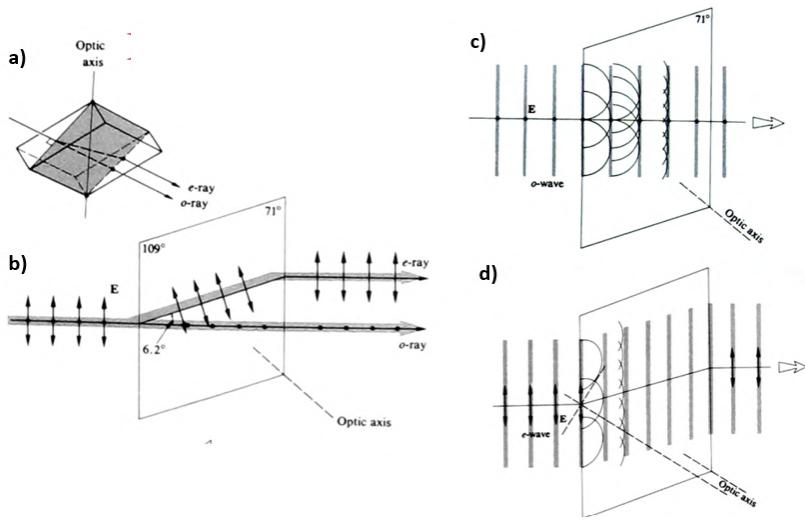


Figura 6.13: Esquema de la lámina birefringente uniaxial, en donde se observa el plano principal (a), y la refracción de los haces ordinario y extraordinario (b), mostrando además los casos separados para el haz ordinario (c) y extraordinario (d).

eléctrico se puede descomponer según sea paralelo o perpendicular al eje óptico. Si es perpendicular al eje óptico, viaja con $v_{\perp} = c/n_o$. Si es paralelo al eje óptico viaja con $v_{\parallel} = c/n_e$. Por ello, se desvía. Como consecuencia, al colocar una calcita sobre un papel escrito, se producen imágenes dobles, polarizadas perpendicularmente (Fig. 6.14).

Para pensar antes de la clase: En la clase vas a tener disponibles calcitas y polarizadores y algunos objetos por descubrir. Te proponemos pensar en algunos experimentos:

- Que experimento podés hacer para estudiar la polarización por reflexión? -
Como determinarías cual es el eje de transmisión del polarizador?
- Que experimento podes hacer para estudiar si la luz dispersada es parcialmente polarizada?.
- Como están polarizados los haces ordinario y extraordinario en la calcita?



Figura 6.14: Dobles refracciones en la calcita

6.3. Detectores de luz

Existen numerosos dispositivos capaces de detectar luz, y convertirla en señales eléctricas. Entre ellos encontramos a los fotodiódos, fotoresistencias, fototransistores, cámaras CCD/CMOS, etc (Fig. 6.15). En la segunda parte de la materia usaremos fotodiódos y CCDs (detectores 2D que contienen NxM fotodiódos).



Figura 6.15: Ejemplos de distintos detectores de luz

Los fotodiódos son detectores que se basan en la tecnología de los semiconductores. Al absorber un fotón de luz con determinada energía, electrones que están en la banda de valencia del material son promovidos a la banda de conducción. Esos electrones pueden ahora transportarse en el circuito eléctrico de medición generando de una corriente que es posible medir. La relación $R = P/I$ entre la potencia lumínica absorbida $P[W]$ (energía/tiempo) y la corriente generada $I[A]$ se conoce como responsividad, fotosensibilidad, respuesta espectral, etc, depende de la longitud de onda (energía de los fotones) y del material del fotodiodo (Fig. 6.16). Como se puede observar en la figura, existen fotodiódos con respuesta en diversos rangos espectrales según el material del que estén constituidos.

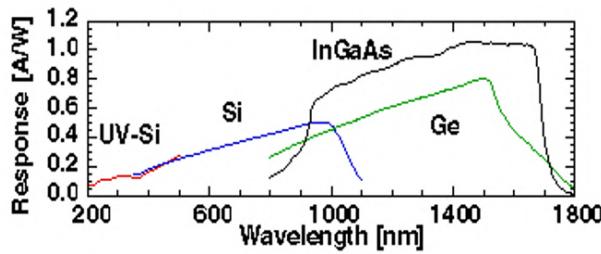


Figura 6.16: Responsabilidad típica en A/W para distintos materiales en función de la longitud de onda

La mínima corriente que puedo medir, se conoce como corriente de oscuridad (I_{dark}), y está generada esencialmente por el movimiento térmico de los electrones. Por otra parte, la relación entre la potencia lumínica $P(W)$ o la intensidad $I(W\text{cm}^{-2})$ y la señal medida en el fotodiodo, depende del circuito al que este esté conectado, pero típicamente tiene un comportamiento lineal y una saturación (I_{sat}) (6.17).

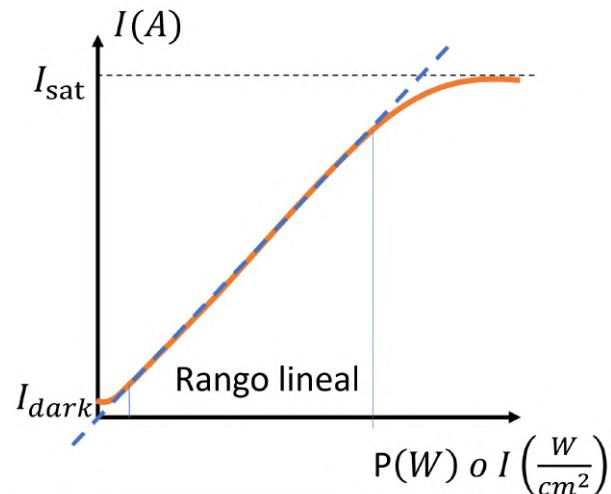


Figura 6.17: Esquema de la corriente (en A) típica medida en un fotodiode, en función de la potencia o intensidad incidente

Pensar un experimento: Si queremos hacer experimentos con los fotodiodos detectando variaciones de intensidad y queremos hacer estudios comparativos, necesitamos saber como es la calibración de corriente en función de intensidad de luz. Para esto necesitamos generar variaciones conocidas de intensidad. Que fenómeno

o elementos ópticos podés usar para variar la intensidad controladamente? Como harías entonces el experimento?

6.4. Características de los láseres

En esta parte de la materia vamos a estudiar algunas características de los láseres. La palabra láser es en realidad un acrónimo que significa Light Amplification by Stimulated Emission Of Radiation. En líneas generales, un láser está compuesto por un medio activo o de amplificación, un bombeo y una cavidad resonante, como se esquematiza en la Fig. 6.18. El bombeo, puede ser eléctrico (como en los punteros láser) u óptico (una lámpara flash u otro láser). Su función es proveer energía al medio activo. El medio activo es típicamente un material que es capaz de amplificar luz. La conservación del momento de los fotones hace que las ondas que se generan en el medio estén en fase con las ondas incidentes, por lo que la radiación láser resulta **coherente**. Además, como solo algunos niveles de energía del material son capaces de generar amplificación, la emisión es muy **monocromática**.

La cavidad resonante, es una cavidad óptica, como por ejemplo una cavidad de Fabry Perot que está formada por dos espejos (uno de ellos tiene alta reflectividad, el otro deja salir un porcentaje pequeño de la luz presente en la cavidad). La cavidad se usa principalmente para acumular energía hasta que las condiciones de laseo se cumplan y el láser empiece a funcionar: esto es que la ganancia que provee el medio activo, supere las pérdidas dentro de la cavidad (reflectividad en los espejos, absorción en los materiales). La luz puede reflejarse sucesivas veces solo en la dirección perpendicular a los espejos, un haz que está desviado respecto a esa dirección, va a salir de la cavidad luego de algunas reflexiones. Es por esto, que la amplificación se da principalmente en esa dirección, y por lo tanto el láser sale de la cavidad **colimado**, con una divergencia muy pequeña ($< 10\text{mrad}$). En la Fig. 6.19a, podemos ver un esquema de un láser en donde se observa que el haz láser y se va expandiendo a medida que se propaga. La **polarización** en los láseres típicamente se obtiene poniendo una ventana (vidrio con gran calidad óptica y transparente) en ángulo de Brewster dentro de la cavidad o usando como bombeo un láser polarizado.

Tal como vimos en las prácticas de ondas estacionarias (cuerdas y tubos), en una cavidad óptica también tenemos modos porque la luz está confinada entre dos espejos; en este caso hablamos de modos longitudinales. Los modos longitudinales que pueden propagarse en la cavidad son aquellos que además tengan frecuencias en el espectro de

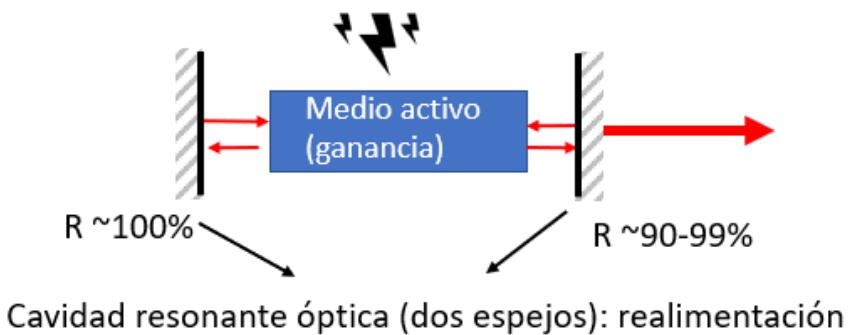


Figura 6.18: Esquema simplificado de un láser, en donde se muestra una cavidad óptica formada por dos espejos, un medio activo o amplificador. El haz láser emerge de la cavidad colimado.

ganancia del medio activo, las ondas con frecuencias fuera del espectro de ganancia no son amplificadas. Además, como los espejos tienen un tamaño finito, la luz también está confinada en la dirección perpendicular a la de la cavidad. Por tal motivo, aparecen también los modos transversales, que son quienes le dan la estructura a la distribución de intensidad en el plano perpendicular a la dirección de propagación. El modo más bajo, se conoce como TEM_{oo} y tiene forma de una función gaussiana (modo gaussiano). Por esta razón, si ponemos un papel en frente del láser vemos una distribución espacial de intensidad como la que se observa en la Fig. 6.19b. Si graficamos la intensidad sobre un corte de esa figura (línea blanca), observamos que la forma funcional es gaussiana, como se muestra en la Fig. 6.19c.

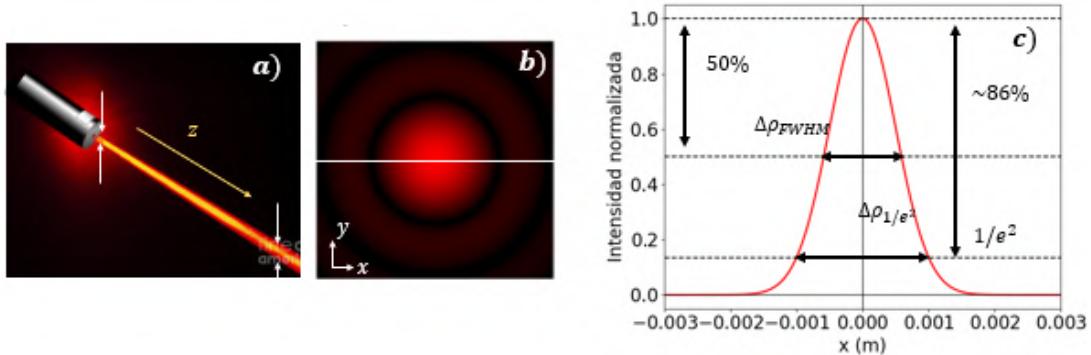


Figura 6.19: Esquema de un laser que se propaga (a), y como lo observaríamos cuando este incide normalmente sobre una pantalla b). c) Perfil sobre la linea blanca de la figura b)

La expresión de la intensidad de un haz gaussiano que se propaga en la dirección z se puede escribir como

$$I(r, z) = I_o \left(\frac{\omega_o}{\omega(z)} \right)^2 e^{\frac{-2r^2}{\omega(z)^2}} \quad (6.9)$$

donde I_o la intensidad máxima cuando $z = 0$, ω_o es el tamaño de la cintura del haz (el tamaño transversal más chico del haz), $r^2 = x^2 + y^2$ es la distancia medida desde el centro del haz, y $\omega(z)$ el tamaño del haz a medida que este se propaga, y viene dado por la expresión

$$\omega(z) = \sqrt{1 + \frac{z_r}{z}} \quad (6.10)$$

donde $z_r = \pi\omega_o/\lambda$ se conoce como parámetro de Rayleigh o confocal, que es la distancia longitudinal en la que el haz se mantiene enfocado. En la Fig. 6.20a se observa un corte a lo largo de la dirección z , en donde se esquematizan los parámetros mencionados. Además se observa en los perfiles de intensidad en distintas posiciones a lo largo del eje z (Figs. 6.20b-d) que a medida que nos alejamos de la posición en donde se encuentra la cintura (Fig. 6.20b), el haz gaussiano se achata en intensidad y se ensancha. Se puede hallar una expresión para la divergencia dada por $\theta = \lambda/\pi\omega_o$, pero experimentalmente conviene usar otras formas de medir, como se verá más adelante.

Podemos definir algunos parámetros para caracterizar el ancho de la distribución de intensidad. Una forma es a partir de medir el ancho de la gaussiana a la mitad de su altura (ancho mitad altura (FWHM)), es decir el ancho cuando $I(r, z) = I_{max}/2$, donde I_{max} es la intensidad máxima, obteniéndose

$$\Delta\rho_{FWHM} = \frac{1}{2}\sqrt{2\ln(2)}\omega(z) \quad (6.11)$$

Otra forma puede ser medir el ancho cuando la intensidad cae en $1/e^2$, que representa aproximadamente el 86 % de la intensidad, es decir cuando $I(r, z) = I_{max}/e^2$, a partir de lo que se obtiene que

$$\Delta\rho_{1/e^2} = 2\omega(z) \quad (6.12)$$

En resumen, los láseres se caracterizan por ser:

- Direccionales
- Colimados (divergencia 1-10 mrad)
- Monocromáticos
- Coherentes
- Polarizados (la mayor parte de los casos)

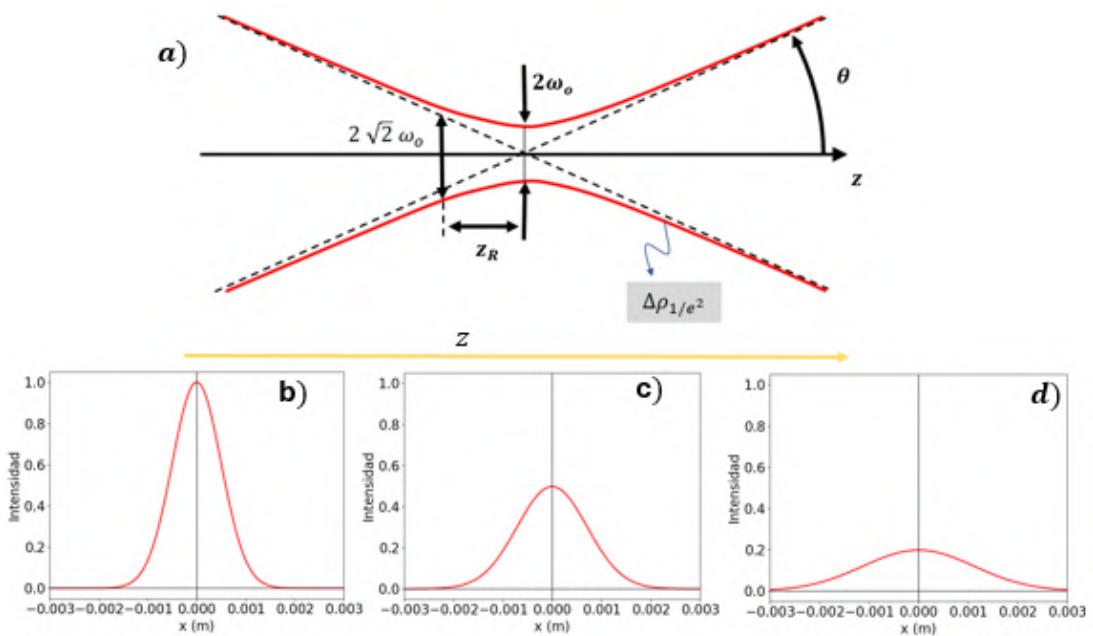


Figura 6.20: a) Corte longitudinal de un haz gausiano, en donde se muestra la cintura de tamaño $\sim 2\omega_0$, divergencia θ y parametro de Raileigh z_r . b-d) Perfil del haz para posiciones que se alejan de la cintura.

- Típicamente gaussianos.
- Estabilidad temporal (esta es nueva :))

En consecuencia de la direccionalidad y colimación, toda su potencia (P), está concentrada en un área A pequeña, y en un ángulo sólido Ω que es también muy pequeño. Por ese motivo, tiene gran brillo

$$B = \frac{P}{A\Omega} \left[\frac{W}{cm^2 sr} \right]. \quad (6.13)$$

Veamos como caracterizar algunas de las magnitudes descriptas anteriormente: colimación, polarización, distribución espacial de intensidad, estabilidad temporal, divergencia. Dejamos para más adelante la coherencia y monocromaticidad (espectro).

6.4.1. Polarización

Para estudiar la polarización del láser, podemos emplear un polarizador lineal y caracterizar el **contraste o grado de polarización**. Supongamos que tenemos una fuente de luz, cuya polarización es quasi lineal (una elipse con su eje mayor mucho más grande que el menor). Si usamos al analizador podemos determinar dos intensidades:

1. La intensidad máxima I_{max} que corresponde al eje del analizador paralelo al eje mayor.

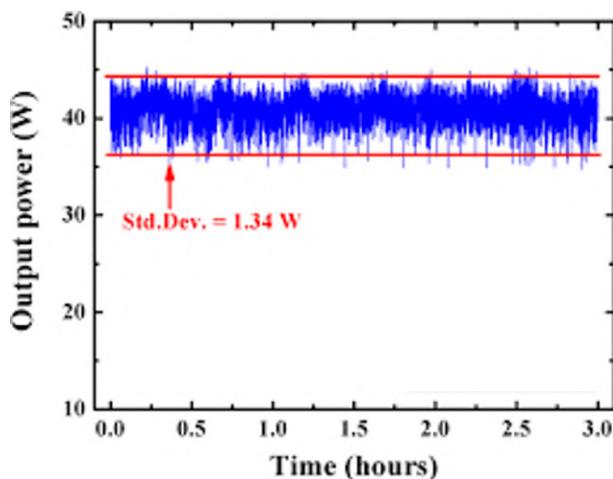


Figura 6.21: Medición típica de la potencia del laser en función del tiempo

2. La intensidad mínima I_{min} , que corresponde aleje del analizador paralelo al eje menor.

A modo de cuantificar la linealidad en la polarización, definimos como contraste de polarización a

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (6.14)$$

Cuanto más cercano a 1 sea ese número, más lineal es la polarización.

6.4.2. Estabilidad Temporal

La estabilidad temporal en un láser continuo, significa que su potencia o intensidad se mantiene estable en el tiempo. Las causas de falta de estabilidad del láser pueden ser externas como las variaciones de temperatura, humedad, vibraciones, fluctuaciones de la fuente de alimentación; como internas, como la competencia de modos, la realimentación, el desgaste por años de uso.

Si tenemos un detector de luz con resolución temporal adecuada, simplemente podemos medir en el tiempo como fluctúa la señal medida durante un tiempo determinado. Supongamos que medimos algo similar a lo que se observa en la Fig. 6.21. Podemos caracterizar estas fluctuaciones con su amplitud rms (ΔV_{RMS}) respecto a la amplitud media. La estabilidad pico a pico se refiere a la diferencia porcentual entre el valor máximo y mínimo de la potencia o energía de salida y el valor promedio de la potencia o energía. También podemos caracterizar las fluctuaciones de la señal ΔV en comparación con el valor medio V , para saber si estas son importantes o no, definiendo la relación señal-ruido

$$SNR = \frac{V}{\Delta V} \quad (6.15)$$

6.4.3. Distribución espacial de intensidad

Para caracterizar como es la distribución de intensidad en la dirección transversal a la propagación, podemos usar varios técnicas. Ambas necesitan de detectores calibrados en intensidad.

Cámara. Se puede usar una cámara para tomar una foto de la distribución espacial de intensidades. Se puede sacar la foto del láser incidiendo sobre un papel y tomar una escala para calibrar pixel en distancia. Si quiero hacer mediciones comparativas en intensidad, además necesito hacer una calibración en intensidades. Como lo harías?

Método de la gillete o del borde filoso. Se puede determinar como varía la intensidad en una dirección empleando un dispositivo como el que se muestra en la Fig. 6.22. Un borde filoso interrumpe el haz, dejando pasar otra parte del mismo que es colectada en un detector. Para asegurar que toda la luz sea colectada, también se puede usar una lente entre el borde filoso y el detector. El borde filoso se encuentra ubicado sobre un posicionador con tornillo micrométrico (unidad de translación), de manera que es posible desplazarlo a través del haz y medir la intensidad en cada posición.

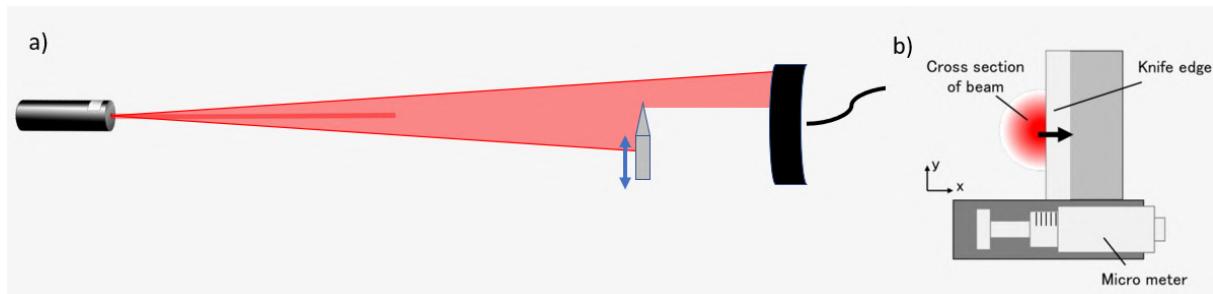


Figura 6.22: Esquema experimental para la medición del perfil del haz empleando la técnica del borde filoso.

La cuestión está ahora en entender cual es el resultado de esa medición. En primer lugar observamos que si tenemos totalmente tapado el haz, no medimos señal. A medida que vamos destapando el haz cada vez medimos una señal mayor, hasta que está totalmente destapado y medimos la señal máxima. Este procedimiento, por el cual se va sumando acumulativamente la intensidad para posiciones en aumento del borde filoso, es justamente lo que hace la operación integral. Es decir, lo que estamos midiendo, es la integral del perfil de intensidad. Por lo tanto podemos escribir a la señal medida como la integral de una gaussiana

$$P(x) = \frac{P_{max}}{2} (1 - erf(\sqrt{2}x/\omega)) \quad (6.16)$$

y tomando la derivada $dP(x)/dx$ obtenemos $I(x) = I_{max}exp(-2x^2/\omega)$

Pensar: Desde el punto de vista del análisis de datos, conviene derivar los datos o ajustar por la expresión integral? Por que?

6.4.4. Divergencia

La divergencia es el ángulo con el cual el haz se abre a medida que se propaga. Como vimos anteriormente este ángulo se relaciona con el tamaño de la cintura del haz: cuanto más chica la cintura, mayor divergencia (te suena difracción?). El problema que tenemos con los láseres, es que es difícil determinar en donde está la cintura, ya que el parámetro confocal es muy largo (sino no estaría casi colimado por distancias muy largas). Para determinar la divergencia, entonces necesitamos realizar dos mediciones muy distantes del tamaño del haz y emplear argumentos geométricos. Como lo harías?

Resumen de la clase 1 óptica:

- Tendrás disponibles polarizadores, cristales birrefringentes, polímeros deformados, filtros, etc.
- Podrás analizar con dichos elementos los fenómenos que polarizan la luz.
- Caracterizarás la respuesta de detectores de luz en función de la intensidad incidente.
- Caracterizarás un láser: polarización, distribución espacial de intensidad, estabilidad temporal, divergencia.

Capítulo 7

Difracción

El fenómeno de difracción se observa con gran frecuencia en la naturaleza, por ejemplo, cuando los haces del sol atraviesan las nubes, el arco iris que se forma en un CD. Las estrellas no tienen naturalmente puntas, las puntas son la difracción en los distintos diafragmas de las cámaras. En los ojos tenemos lo que se conoce como líneas de suturas, que hace que veamos fuentes lejanas con difracción (Fig. 7.1). Por supuesto que la difracción no solo es atributo de ondas electromagnéticas, sino de cualquier tipo de ondas, por ejemplo, las que se ven en las playas de Tel Aviv (Fig. 7.1). Por otra parte, el fenómeno de difracción tiene muchísimos usos en la ciencia, por ejemplo se usa para medir partículas de cientos de nanómetros a algunos micrones, en medicina para hacer “delivery de drogas”, para medir tamaño de gotas (así se midieron los sprays pulmonares o nasales durante la pandemia debida al COVID!).

En este capítulo, vamos a estudiar entre otras cosas cómo uso la difracción para medir tamaños de objetos muy pequeños? cuáles son las ventajas de usar difracción y de donde surgen dichas ventajas?

A continuación revisaremos algunos conceptos sobre difracción, si los tenes claros podes saltar al experimento directamente. El objetivo es entender los conceptos más allá de resolver las cuentas, y entender cuáles son las aproximaciones importantes que se hacen para entender la difracción.

7.1. La integral de Kirchhoff

Kirchhoff (1882) encontró la solución de la ecuación de Maxwell para un frente de ondas plano que atraviesa una apertura

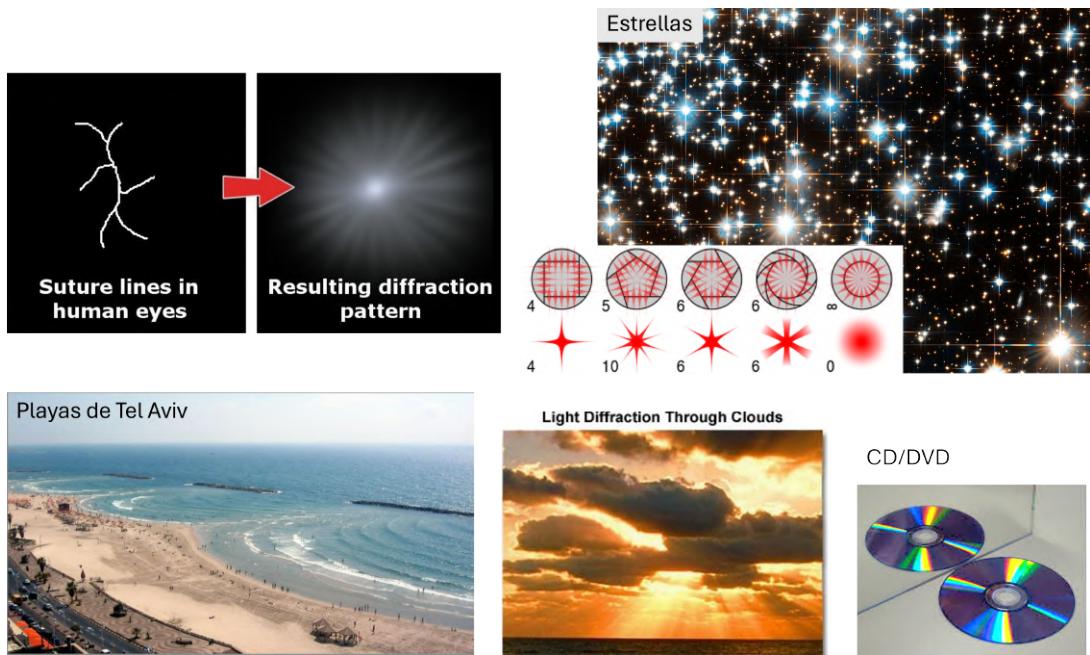


Figura 7.1: Ejemplos de la naturaleza en donde observamos difracción

$$U(P) = \iint_S \left(\frac{-i}{\lambda} \right) U(P') \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} (\cos(\hat{n}, \hat{r}) + 1) ds \quad (7.1)$$

Mediante esta ecuación, si conocemos la distribución de campo $U(P')$ en los punto P' de una superficie, podemos calcular el campo $U(P)$, luego de que la onda se propagó hasta un punto $P = (x, y, z)$ arbitrario del espacio. También podemos calcular como la luz se propaga a través de distintos objetos. En particular podemos calcular como se difracta en una apertura de geometría arbitraria, como la que se esquematiza en la Fig. 7.2. Se ilumina una apertura de manera que se genera una distribución de intensidad $U(P')$ sobre la apertura. Es decir el campo valdrá $U(P')$ en los puntos $P' = (x', y', 0)$ sobre la apertura y cero fuera. Queremos calcular la distribución de intensidad en un punto P sobre el plano xy que se encuentra a una distancia d de la apertura. La coordenada r va desde el punto P' en la máscara al punto P , y podemos escribir su módulo en función de las coordenadas cartesianas como

$$r = \sqrt{d^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (7.2)$$

Analicemos primero el significado de la parte de la ecuación pintada de rojo. En primer lugar podemos identificar una onda esférica emitida desde el punto P' , e^{ikr}/r . La amplitud de esta onda es la intensidad de la onda incidente en el punto P' reducida en λ : $U(P')/\lambda$ y desfasada en -90° ($-i$).

Si esquematizamos el término pintado en azul, vemos que es 1 cuando el ángulo entre \hat{r} y la normal \hat{n} es 0° y nulo cuando ese ángulo es 180° . Lo que nos dice este término entonces, es que esta ondita esférica que parte del punto P' en realidad emite más hacia adelante. A este término se lo conoce como factor de oblicuidad.

Si ahora hacemos la integral, lo que estamos diciendo es que de cada punto en la apertura, parte una onda esférica que emite preferentemente hacia adelante. Al realizar la integral, estamos superponiendo (interferencia) todas esas onditas que parten de la apertura. No estamos diciendo otra cosa, que la difracción es un fenómeno de interferencia.

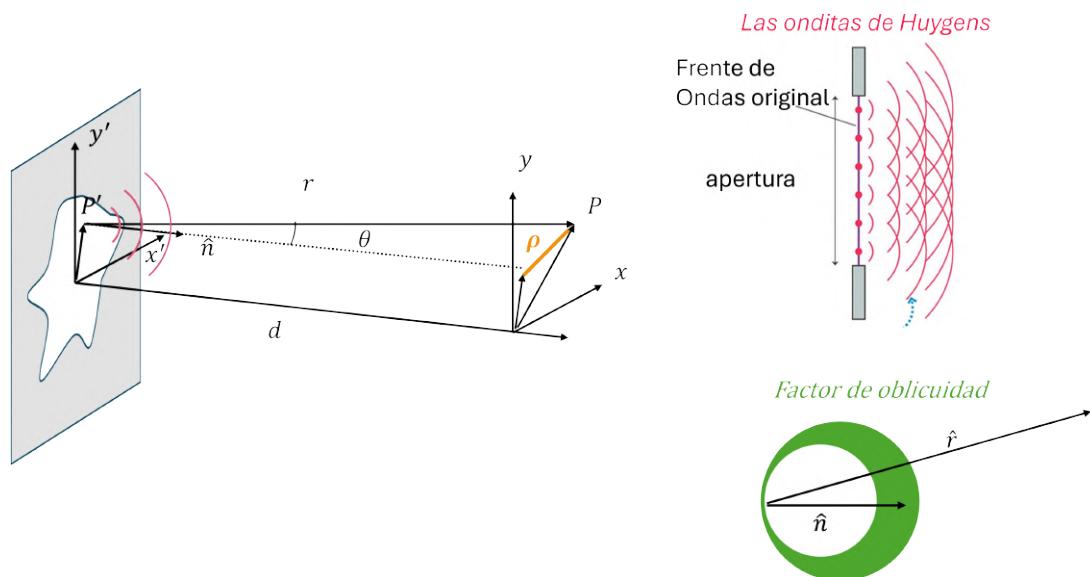


Figura 7.2: Esquema de una ranura de forma arbitraria en donde se indican los distintos sistemas de coordenadas. Arriba a la derecha, se observa un esquema de la superposición de onditas esféricas y abajo a la derecha un esquema del factor de oblicuidad.

Esto justamente constituye el principio de Huygens-Fresnel (1818): El campo en cualquier punto del espacio se obtiene como la **superposición** (es decir, **interferencia**) de las “onditas esféricas secundarias” generadas en cada punto de la apertura. Solo que Kirchhoff agregó que estas onditas se emiten preferentemente hacia adelante (el factor de oblicuidad)

La integral de la ecuación 7.1 es muy difícil de resolver, pero se simplifica si hacemos algunas aproximaciones, como se muestra a continuación.

7.1.1. Aproximación de Fresnel

La primera aproximación que podemos hacer es la paraxial. En esta aproximación se considera que las distancias involucradas en el plano donde se mide ρ son mucho más

chicas que la distancia de propagación d (es decir que los haces son casi paralelos al eje óptico). Esto se cumple si estamos observando en posiciones cercanas a la rendija, en donde los haces aun no se desviaron demasiado. Ver que en términos de ρ , r se puede escribir como

$$r = \sqrt{d^2 + \rho^2} \quad (7.3)$$

siendo $\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ (ver Fig. 7.2). Si $\rho \ll d$ entonces podemos hacer un desarrollo de Taylor en r ,

$$r = d \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{d}\right)^2} \sim d \left(1 + \frac{\rho^2}{2d^2}\right) + \mathcal{O}(2). \quad (7.4)$$

Para implementar esta aproximación, en primer lugar, vamos a reescribir la ecuación 7.1 usando que $\cos(\hat{n}, \hat{r}) = d/r$

$$U(x, y) = \iint_S \left(\frac{-i}{\lambda}\right) U(P') \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} \left(\frac{d}{r} + 1\right) ds \quad (7.5)$$

Luego, dado que los términos con $1/r$ varían mucho más lento que los términos exponenciales de fase, vamos a aproximar $r \sim d$ (Taylor orden 0) en el numerador, y vamos a considerar Taylor orden 1 en la exponencial. De esta manera, usando la definición para ρ^2 dada anteriormente, obtenemos lo que se conoce como integral de Fresnel

$$U(x, y) = \left(\frac{-i}{d\lambda}\right) e^{ikd} \iint_S U(x', y') e^{\frac{ik}{2d}(x-x')^2 + (y-y')^2} dx' dy' \quad (7.6)$$

Hacemos un poquito más de cuentas para llegar a un resultado importante y terminamos con Fresnel :). Ahora vamos a desarrollar el cuadrado en la potencia, con el objetivo de dejar dentro de la integral solamente las variables primadas, obteniendo

$$U(x, y) = \left(\frac{-i}{d\lambda}\right) e^{ikd} e^{\frac{ik}{2d}(x^2+y^2)} \iint_S \textcolor{red}{U(x', y')} e^{\frac{ik}{2d}(x'^2+y'^2)} e^{-\frac{ik}{d}(xx'+yy')} dx' dy' \quad (7.7)$$

Este resultado es muy interesante, porque si observamos el término que depende de xx' e yy' , notamos que se parece mucho al factor de una transformada de Fourier. Entonces vemos que podemos escribir a la integral de Fresnel como una transformada de Fourier de la función $U'(x', y')$ (que es la que está pintada en rojo en la ecuación anterior), evaluada en las variables $x/\lambda d$ e $y/\lambda d$

$$U(x, y) = \left(\frac{-i}{d\lambda} \right) e^{ikd} e^{\frac{ik}{2d}(x^2+y^2)} \mathcal{F}_{\lambda d} \left\{ U(x', y') e^{\frac{ik}{2d}(x'^2+y'^2)} \right\} = F \left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d} \right) \quad (7.8)$$

Esta ecuación me dice entonces que en la aproximación Fresnel, puedo calcular el campo haciendo la transformada de Fourier de la distribución de campo en la apertura, agregando una fase cuadrática. Notar que si quiero calcular la intensidad, los factores de fase fuera de la transformada dejan de tener relevancia, ya que desaparecen al tomar módulo cuadrado.

A modo de ejemplo, en la Fig. 7.3 se observan simulaciones numéricas de la difracción por distintas aperturas, en la aproximación de Fresnel y en la aproximación de Fraunhofer (que veremos pronto).

En las dos secciones siguientes vamos a intentar deshacernos de la fase cuadrática de dos maneras.

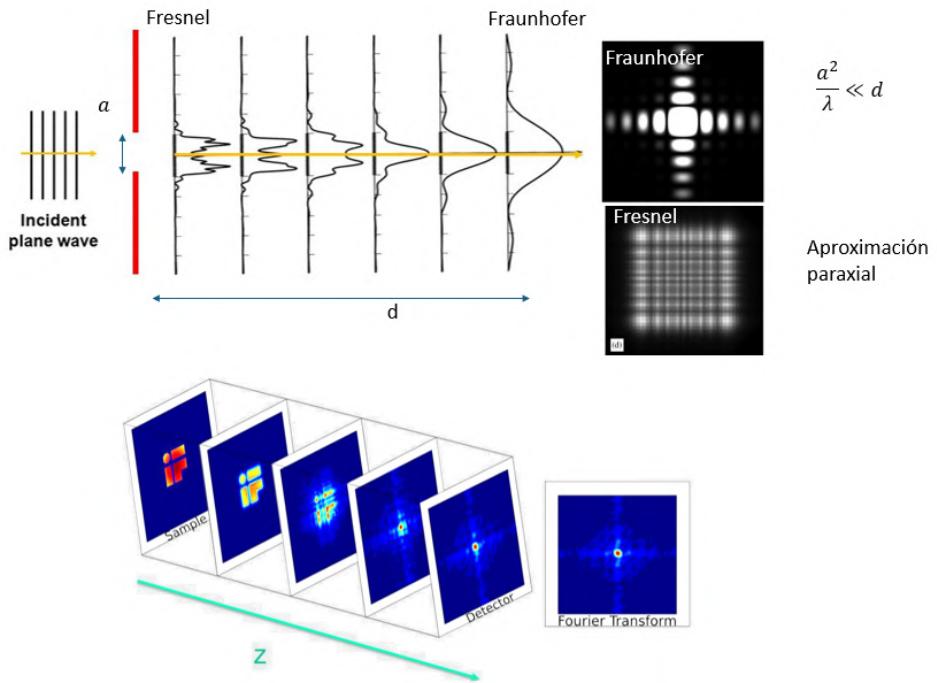


Figura 7.3: Difracción por fijas rendijas mostrando como luce en la aproximación de Fresnel y Fraunhofer.

7.1.2. Aproximación de Fraunhofer

Queremos lograr que $e^{ik(x'^2+y'^2)/2d}$ sea aproximadamente 1, para eso vamos a hacer que el exponente sea muy chico, lo que implica $d \gg k(x'^2+y'^2)/2$. Como los puntos (x', y') son

posiciones en la apertura, podemos acotarlos por un tamaño característico, por ejemplo $(x'^2 + y'^2) \sim A$ donde A es el área de la apertura. Entonces obtenemos $d \gg kA/2$, y la integral de Fresnel se reduce a

$$U(x, y) \sim \mathcal{F}_{\lambda d} \left\{ U(x', y') \right\} \quad (7.9)$$

en donde omitimos todos los factores de fase y constantes para no perder de vista nuestro objetivo.

Arribamos a una conclusión importante, en la aproximación de Fraunhofer (campo lejano), el campo no es más que la trasformada de Fourier del campo de la apertura.

7.1.3. El truco de la lente

Supongamos ahora que queremos calcular el campo que atraviesa la apertura y a continuación una lente convergente. La función transmisión de la lente es simplemente una variación de fase cuadrática, por lo que la podemos escribir como

$$T(x, y) = e^{-\frac{ik}{2f}(x^2+y^2)} \quad (7.10)$$

en donde f es la distancia focal. Para escribir el campo en un punto arbitrario (x, y, d) agregamos $T(x, y)$ en la Eq. 7.8

$$U(x, y) \sim \mathcal{F}_{\lambda d} \left\{ U(x', y') e^{-\frac{ik}{2f}(x'^2+y'^2)} e^{\frac{ik}{2d}(x'^2+y'^2)} \right\} \quad (7.11)$$

en donde para no perder de vista nuestro objetivo, obviamos todos los factores multiplicativos. Si ahora queremos calcular el campo en el plano focal de la lente, basta con tomar $f = d$ en la ecuación anterior. En ese caso, los factores de fase se cancelan, obteniendo

$$U(x, y) \sim \mathcal{F}_{\lambda d} \left\{ U(x', y') \right\} \quad (7.12)$$

Arribamos ahora a una segunda conclusión muy importante:

la difracción de Fraunhofer se encuentra tanto en el campo lejano (Eq. 7.9) como en el foco de una lente (Eq. 7.12). Esta situación se encuentra esquematizada en la figura 7.4

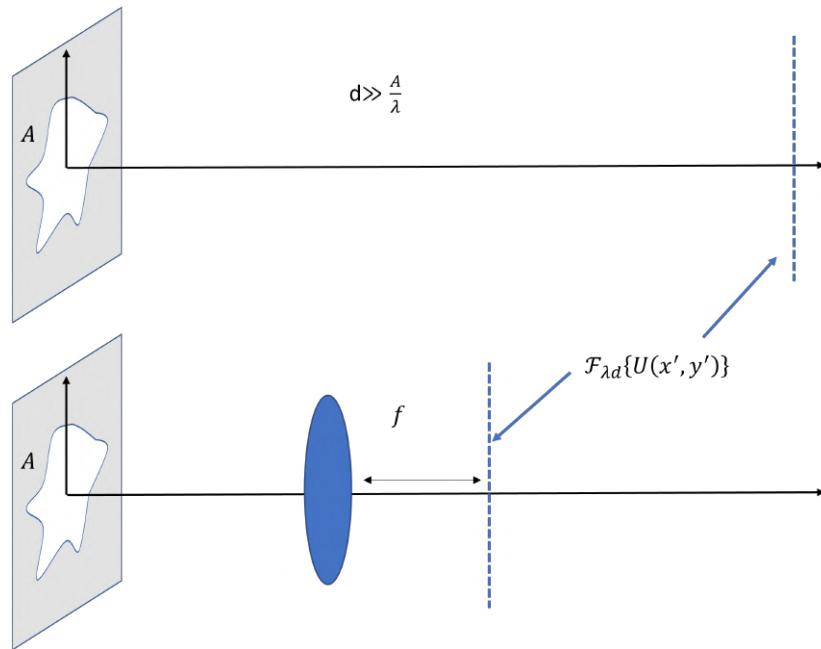


Figura 7.4: Esquema que muestra que la difracción en campo lejano es equivalente al campo en el foco de la lente

7.2. Difracción por una rendija rectangular

Vamos a estudiar en la materia, la difracción por una rendija rectangular de tamaño a , que se encuentra esquematizada en la figura 7.5.

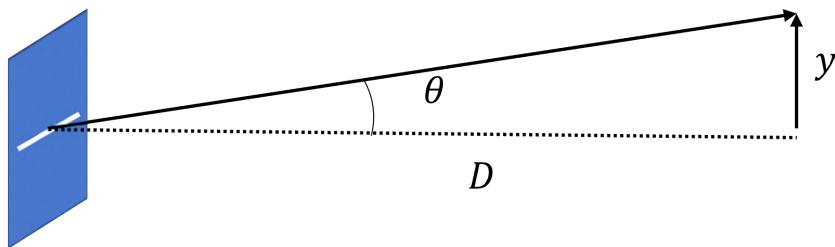


Figura 7.5: Difracción por una rendija rectangular en donde se muestran las variables de interés para el problema: θ angulo de difracción, D distancia entre la pantalla y la rendija, y posición medida en la pantalla

Ya estudiaron en Física 2 que la expresión analítica de la intensidad $I(\theta)$ de la figura de difracción en función del ángulo θ es

$$I(\theta) = Io \frac{\sin(\delta)^2}{\delta^2}, \quad (7.13)$$

siendo $\delta = \pi a \sin(\theta)/\lambda = \pi a y / D \lambda$. En la figura 7.6 se puede observar una foto de una figura de difracción, y el resultado de la expresión anterior, que, experimentalmente equi-

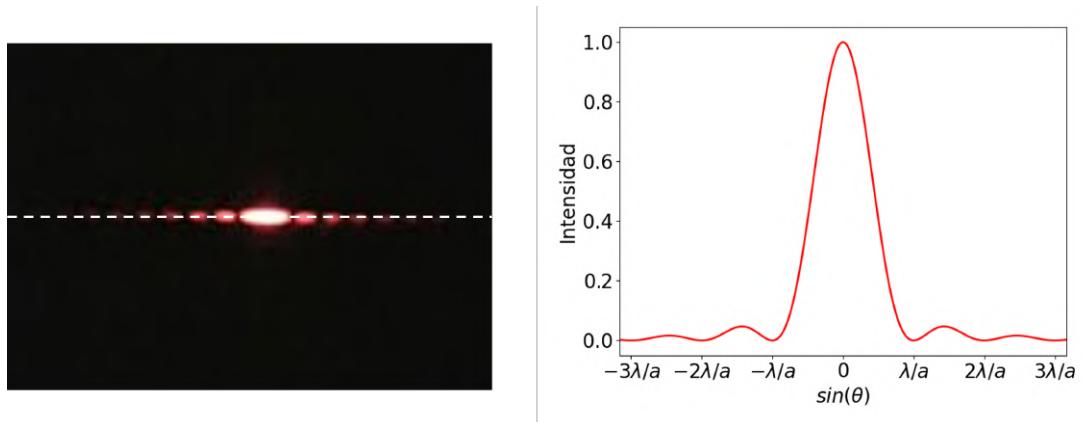


Figura 7.6: Figura de difracción y perfil de la misma tomado sobre la linea punteada blanca

vale a medir la intensidad en los puntos sobre la linea blanca. La figura de difracción tiene mínimos situados en donde se encuentran los ceros de la función seno, es decir, cuando $\delta = n\pi$ con n un entero, es decir cuando $\sin(\theta) = y/D = n\lambda/a$

A partir de esta expresión podemos hacer observaciones importantes (y bastante generales). En primer lugar, podemos observar que haces con menor longitud de onda, difractan más. En la figura 7.7, podemos observar la figura de difracción producida por una fuente de luz blanca, y las figuras de difracción que resultan de filtrar longitudes de onda en la misma figura.

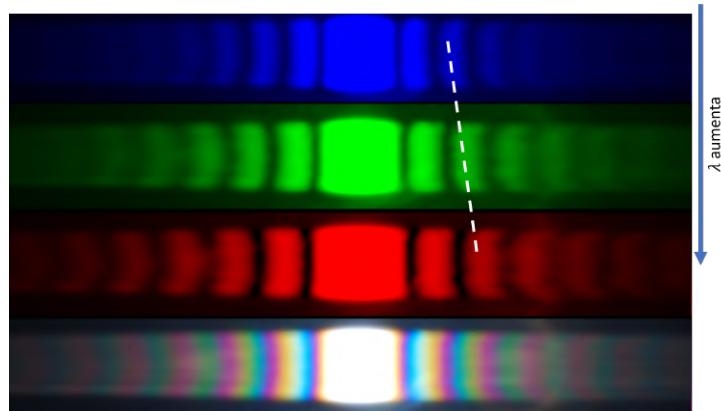


Figura 7.7: Difracción de luz blanca por una rendija rectangular y su descomposición en colores RGB

Pensar: En la figura de difracción de la fuente de luz blanca se observan colores

cian, magenta y amarillo (CMY). Sin embargo los colores originales son rojo, verde y azul (RGB). Porque se ve CMY?

En segundo lugar podemos relacionar el tamaño de la rendija con la extensión de la figura de difracción: vamos que cuanto más chica es la rendija, la figura de difracción es más extensa. Esto tiene mucha lógica si pensamos que la difracción de Franhofer es una transformada de Fourier de la rendija, y las coordenadas relacionadas por la transformada (x y $\xi = x'/\lambda d$ en este caso) siempre cumplen una relación de incertezza $\Delta x \Delta \xi > cte$: si la rendija es muy chica, $\Delta \xi$ es muy chico, entonces Δx es muy grande.

Experimental: En la experiencia de difracción, vamos a medir el tamaño de la rendija a partir de la figura de difracción y vamos a comparar el tamaño obtenido con el que midamos con un microscopio. Hay muchas maneras de medir y caracterizar a la figura de difracción:

- 1) Marcar en un papel la posición de los mínimos y medir la posición del mínimo en función del número de mínimo. Obtener a a partir de la pendiente de la recta (necesito además λ).
- 2) Sacar una foto de la figura de difracción, para determinar la posición de los mínimos (y seguir como en el ítem anterior). Necesito además, obtener una escala para calibrar pixeles de la cámara en distancia. Las cámaras miden las señales en unidades discretas conocidas como niveles de gris. Para medir intensidad necesitamos saber primero cual es la calibración de la intensidad en nivel de gris, o al menos saber si la relación es lineal. Si obtenemos esta información además podríamos medir el perfil de intensidades. Como podemos calibrar la cámara?
- 3) Desplazando al Fotodiodo a través de la figura de difracción, relevar la intensidad en función de la distancia. Las consideraciones que necesitamos tener en cuenta para la medición del perfil de intensidad con el fotodiodo son:
 - Linealidad de la señal en el fotodiodo con la intensidad (ya lo probaron la clase anterior)
 - Muestreo espacial adecuado requiere conocer aproximadamente lo que se

quiere medir. Se debe cumplir Nyquist (como mínimo). Cuál es el detalle más chico que quiero medir?

- Influencia de la respuesta del detector: La medición es la convolución de la función respuesta del detector y la magnitud a medir. (Revisar capítulo de mediciones).

Pensar como realizarían cada uno de estos experimentos, ustedes ya tienen las herramientas!

7.3. Máscaras complementarias

Nos preguntamos ahora ¿Como se comparan las figuras de difracción producida a partir de dos objetos complementarios, como las de la Fig. 7.8a y b? ¿Cuáles son sus similitudes y sus diferencias?

Puedo conocer el tamaño de las células rojas (Fig. 7.8e) a partir de conocer la difracción por una apertura circular (Fig. 7.8d)?

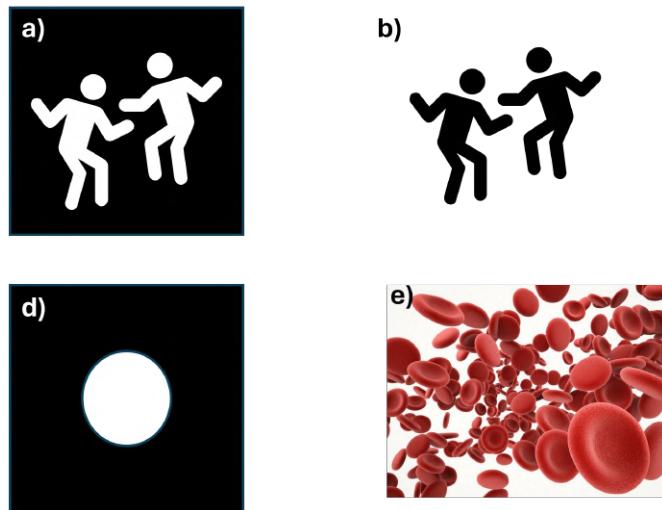


Figura 7.8: Esquema de máscaras complementarias (a y b son complementarias, y d y e también lo son).

En primer lugar escribamos la función transmisión de ambas máscaras, diciendo que la función transmisión $T(P')$ es 1 si la máscara es transparente y 0 si la máscara es opaca, como se esquematiza en la Fig. 7.9. Luego notamos que la suma de las transmisiones de ambas máscaras es 1, por lo que podemos escribir $T_{A''}(P') = 1 - T_{A'}(P')$. Ahora escribamos la integral de Kirchhoff (Eq. 7.1)



Figura 7.9: Función transmisión para dos máscaras complementarias y su suma.

$$U(P) = \iint_A U(P') f(P') ds = \iint_S U(P') (T_{A'} + T_{A''}) f(P') ds \quad (7.14)$$

en donde llamamos $f(P') = \left(\frac{-i}{\lambda}\right) \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2} (\cos(\hat{n}, \hat{r}) + 1)$. Luego, distribuyendo la integral

$$U(P) = \iint_A U(P') f(P') ds = \iint_A U(P') T_{A'} f(P') ds + \iint_A U(P') T_{A''} f(P') ds \quad (7.15)$$

usando las definiciones de la función transmisión podemos escribir

$$U(P) = \iint_A U(P') f(P') ds = \iint_{A'} U(P') f(P') ds + \iint_{A''} U(P') f(P') ds \quad (7.16)$$

En la aproximación de Fraunhofer, podemos aproximar las integrales por transformadas de Fourier

$$U(P) = \mathcal{F}_{\lambda d}\{U_A(P')\} = \mathcal{F}_{\lambda d}\{U_{A'}(P')\} + \mathcal{F}_{\lambda d}\{U_{A''}(P')\} \quad (7.17)$$

Observando que A es un cuadrado por donde pasa luz, sabemos que su transformada es una función *sinc*. Si ese cuadrado es muy muy grande, la *sinc* es muy angosta, de modo que $\mathcal{F}_{\lambda d}\{U_A(P')\} = 0$ salvo en el punto donde incide el laser o sobre la función *sinc* que es muy angosta (casi una delta). De este modo resulta que

$$\mathcal{F}_{\lambda d}\{U_{A'}(P')\} = -\mathcal{F}_{\lambda d}\{U_{A''}(P')\} \quad (7.18)$$

Es decir, las intensidades de ambas figuras de difracción son idénticas en la aproximación de Frounhofer (salvo en el centro de la figura de difracción en el caso de la máscara más transparente, ya que tiene un punto muy luminoso).

Experimental: En esta parte de la experiencia, vamos a comparar la figura de difracción de objetos complementarios. Pensar que objetos podrían usar y como realizar tal comparación.

Capítulo 8

Lentes y sistemas formadores de imágenes

El mundo de la fotografía y la videografía ha sido revolucionado por los intrincados componentes dentro de las lentes de la cámara. Más allá de aparentar ser solo un accesorio, las lentes son la puerta de entrada para capturar imágenes impresionantes. Los arreglos de lentes también permiten tener otros dispositivos de gran calidad, como los telescopios. El rol fundamental de una lente o sistema de lentes en estos dispositivos es proyectar la imagen de un objeto sobre el elemento sensible de la cámara (Fig. 8.1).

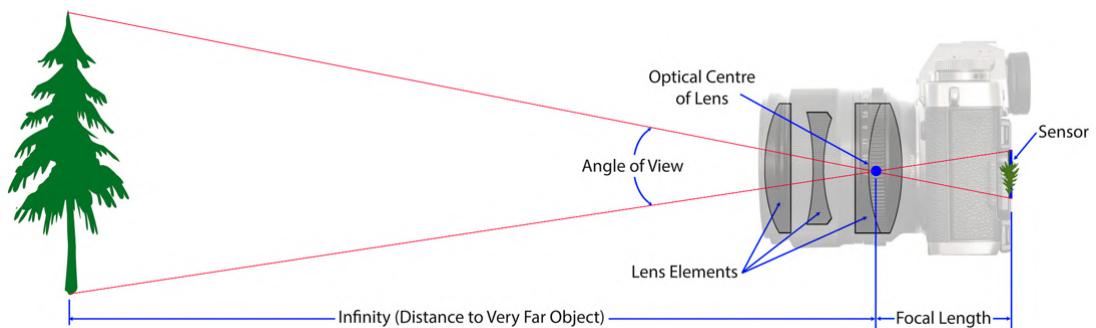


Figura 8.1: Mediante un sistema de lentes, se forma una imagen de-magnificada del objeto en el sensor de la cámara

8.1. Sistemas de lentes simples

Las propiedades ópticas que definen una lente están originadas en su composición estructural, específicamente en su distancia focal, ángulo de campo de visión y apertura relativa.

Podemos clasificar a las lentes como convergentes o divergentes, como se esquematiza

en la Fig. 8.2. En el caso de las lentes convergentes (convexas), los haces que inciden paralelos al eje óptico convergen en el plano focal de la misma. En cambio, en la lente divergente, los haces que inciden paralelos al eje óptico divergen, pareciendo provenir de un punto focal virtual, localizado detrás de la lente.

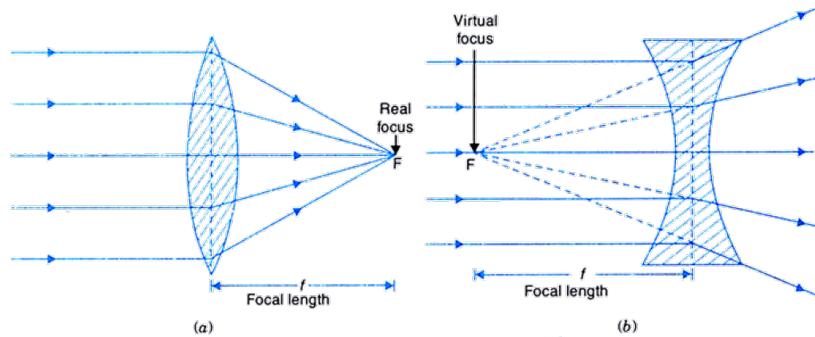


Figura 8.2: El foco de las lentes convergentes (a) y divergentes (b)

8.1.1. La ecuación de la lente, las bases de la óptica geométrica

En el caso de que las lentes sean delgadas, se puede encontrar una relación entre la distancia focal (f), la posición del objeto (u) y la posición de la imagen (v), conocida como la ecuación de la lente

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f} \quad (8.1)$$

A la relación entre el tamaño de la imagen (h') y el tamaño del objeto (h) se la conoce como aumento y esta también se relaciona con la posición objeto e imagen como

$$M = \frac{h'}{h} = \frac{v}{u} \quad (8.2)$$

En base a la ecuación de la lente, se puede definir el trazado de ciertos haces de luz a partir de los cuales se puede obtener la descripción geométrica de las lentes, como se esquematiza en la Fig. 8.3. Las reglas básicas son:

- El haz de luz que incide paralelamente al eje principal sobre una lente convergente pasa por el foco real, mientras que en una lente divergente, dicho haz parece provenir del foco virtual.
- El haz de luz que pasa por el centro óptico de la lente sigue su trayectoria sin desviarse.

- El haz de luz que incide sobre la lente pasando por el foco real de una lente convergente sale de la lente de manera paralela al eje principal. En una lente divergente, el haz de luz que se dirige hacia el foco virtual sale de la lente paralelamente al eje principal.

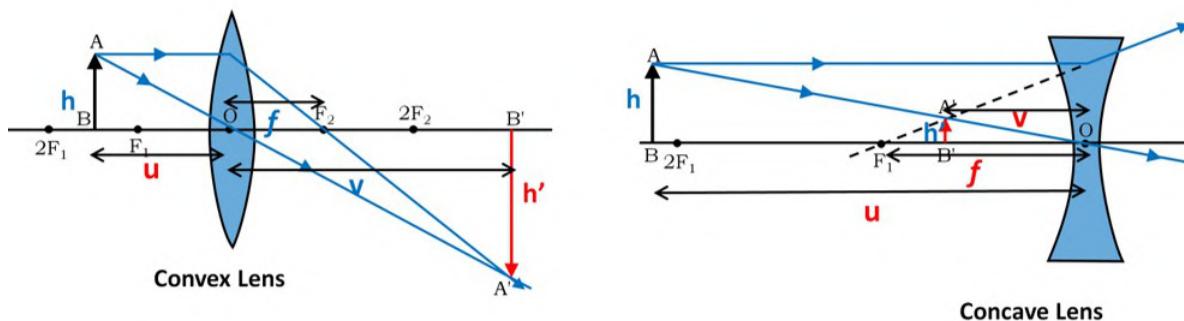


Figura 8.3: Trazado de haces principales en lentes delgadas

8.1.2. Apertura numérica, profundidad de foco y resolución

La apertura numérica (NA) de una lente es una medida de su capacidad para colectar luz y resolver detalles pequeños. La apertura numérica se define como:

$$NA = n \sin(\theta)$$

donde n es el índice de refracción del medio en el que se encuentra la lente y θ es el ángulo medio de aceptación de la lente. La apertura numérica puede relacionarse con los parámetros de la lente usando que

$$\sin(\theta) = \frac{D}{2f}$$

donde D es el diámetro de la apertura de la lente (o pupila de entrada) y f es la distancia focal.

Una mayor apertura numérica indica que la lente puede colectar más luz y tiene una mayor capacidad para resolver detalles pequeños, lo cual es crucial en aplicaciones como la microscopía y la fotografía de alta precisión.

La capacidad de colección de luz aumenta porque una lente con una mayor NA puede aceptar luz de un ángulo más amplio, lo que significa que más rayos de luz pueden entrar en la lente. Esto resulta en una imagen más brillante y mejor iluminada.

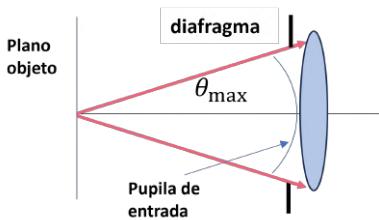


Figura 8.4: Esquema de una lente y como determina el diafragma a la apertura numérica

Además, la resolución aumenta con una mayor apertura numérica. La resolución de una lente se refiere a su capacidad para distinguir entre dos puntos muy cercanos. Según el criterio de resolución de Rayleigh, la resolución R es inversamente proporcional a la apertura numérica

$$R = \frac{0,61\lambda}{\text{NA}}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz utilizada. Una mayor NA reduce el valor de R , permitiendo a la lente resolver detalles más finos.

El concepto de profundidad de foco también está relacionado con la apertura numérica. La profundidad de foco es la distancia sobre la cual el sistema óptico puede mantener un enfoque aceptable. La profundidad de foco está inversamente relacionada con la apertura numérica:

$$\text{Profundidad de foco} \approx \frac{\lambda}{(\text{NA})^2}$$

Una mayor apertura numérica reduce la profundidad de foco, lo que significa que el rango de distancias en el que la imagen permanece nítida es más pequeño. Esto puede ser una ventaja o una desventaja, dependiendo de la aplicación: en microscopía, una menor profundidad de foco permite enfocar en detalles muy específicos dentro de una muestra tridimensional. En fotografía una menor profundidad de foco permite resaltar el objeto principal enfocado mientras que el resto de los objetos en otros planos están borroneados.

En resumen, una mayor apertura numérica mejora la capacidad de colección de luz y la resolución, permitiendo a la lente captar imágenes más brillantes y detalladas. Sin embargo, también reduce la profundidad de foco, restringiendo el rango de distancias a lo largo de las cuales la imagen permanece enfocada.

Experimental 1: En la experiencia de lentes vamos a estudiar primero lentes delgadas. En particular van a disponer de una fuente LED, una máscara para usar de

objeto, un diafragma, dos lentes de distinta distancia focal y una pantalla. Para ambas lentes:

- 1) Diseñar un experimento para determinar la distancia focal de las lentes.
- 2) Formar una imagen de un objeto. En que cambia la imagen si cambio el diámetro de la lente? Hint: usar un diafragma.
- 3) Como cambia la intensidad en el foco si cambio el área del diafragma?
- 3) Como varía la intensidad en la dirección longitudinal al atravesar el foco? y en la dirección transversal? Que detector usariás para medir la variación de intensidad en función de la posición?

¿Qué lente elijo para tener un foco más chico y con más intensidad?

8.2. Sistemas formados por varias lentes

En óptica, los sistemas formados por varias lentes son comunes y ofrecen diversas ventajas y funcionalidades que una sola lente no puede proporcionar. Estos sistemas pueden incluir combinaciones de lentes convergentes y divergentes para corregir aberraciones, mejorar la resolución, ajustar el campo de visión y controlar la magnificación.

Por ejemplo, las aberraciones ópticas, como la aberración cromática y la aberración esférica, pueden ser corregidas mediante la combinación de diferentes tipos de lentes. Por ejemplo:

- **Lentes Apocromáticas:** Utilizan al menos tres lentes de diferentes materiales para corregir la aberración cromática en tres colores.
- **Lentes Acromáticas:** Combinan dos lentes, generalmente una convergente y una divergente, para corregir la aberración cromática en dos colores.

Un microscopio compuesto es un buen ejemplo de un sistema óptico con varias lentes:

- **Objetivo:** Lente o sistema de lentes cercano a la muestra que produce una imagen real y ampliada.
- **Ocular:** Lente o sistema de lentes a través del cual se observa la imagen real ampliada, produciendo una imagen virtual aún más ampliada.

La magnificación total del microscopio compuesto es el producto de las magnificaciones del objetivo y el ocular.

Experimental 2: Armar algun sistema compuesto de lentes. Proponemos uno como ejemplo, pero pueden probar cualquier otro.

Telescopio. El esquema del telescopio se puede observar en la Fig. 8.5. Determinar el aumento, registrar distancias objeto, imagen, focos, distancia entre lentes. Utilizarlo para aumentar el tamaño de un laser. Como medirías el tamaño del haz?

Ahora podes usar el telescopio para iluminar un par de rendijas. Podremos ver la difracción de Fresnel y la de Fraunhofer? Recordemos que en el foco de la lente, podemos encontrar la figura de difracción de Fraunhofer. Podemos usar una segunda lente para aumentar lo que se observa en el foco? Como elegir S_o y S_1 de manera que pueda observar la imagen, la difracción de Fresnel, y de Fraunhofer.

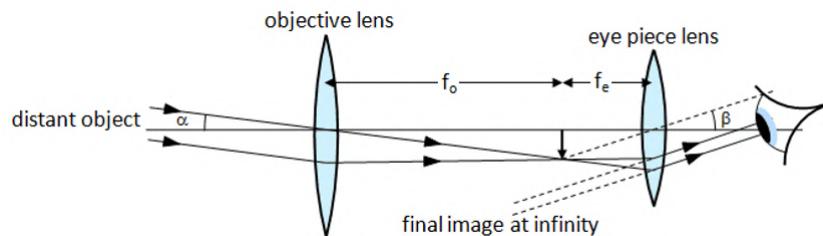


Figura 8.5: Esquema de un telescopio simple

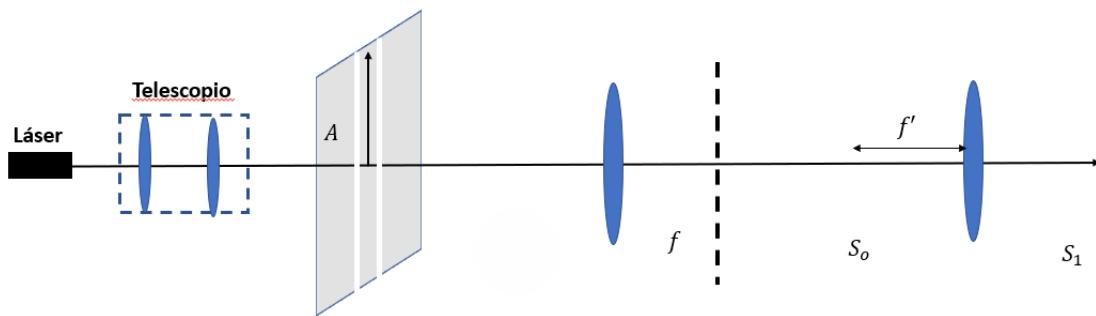


Figura 8.6: Ejemplo de montaje para observar la difracción de Fresnel y Fraunhofer

Capítulo 9

Espectrometría

La espectrometría es un campo amplio y versátil de la ciencia que abarca una serie de técnicas destinadas a analizar la composición en frecuencia del espectro electromagnético. Estas técnicas se utilizan para obtener información detallada sobre las propiedades estructurales de los materiales mediante su interacción con la luz. A través de la espectrometría, es posible estudiar transiciones atómicas y moleculares, así como propiedades cristalinas, proporcionando una comprensión profunda de la materia a nivel microscópico y molecular. A continuación se mencionan algunos ejemplos de tipos de espectrometría y sus aplicaciones:

Espectrometría de Absorción

- **Descripción:** Esta técnica mide la cantidad de luz absorbida por un material a diferentes longitudes de onda. Cuando la luz pasa a través de una muestra, algunas longitudes de onda son absorbidas más que otras, creando un espectro de absorción característico.
- **Aplicaciones:** Determinación de bandas de absorción de materiales, identificación de compuestos químicos, análisis cuantitativo de concentración de sustancias.

Espectrometría de Fluorescencia

- **Descripción:** Se basa en la emisión de luz por una sustancia que ha absorbido previamente luz o radiación electromagnética. La muestra es excitada con una longitud de onda específica, y la luz emitida (fluorescencia) es medida.
- **Aplicaciones:** Análisis de elementos traza en materiales, estudios de proteínas y ácidos nucleicos, investigación de materiales biológicos y farmacéuticos.

Espectrometría Infrarroja (IR)

- **Descripción:** Esta técnica estudia los niveles de energía vibracionales de las moléculas. La radiación infrarroja interactúa con las moléculas, causando transiciones en sus niveles vibracionales.
- **Aplicaciones:** Identificación de grupos funcionales en compuestos orgánicos, estudio de estructuras moleculares, análisis de contaminantes ambientales.

Espectrometría de Resonancia Magnética Nuclear (RMN)

- **Descripción:** Utiliza la interacción de núcleos atómicos con un campo magnético externo y radiación electromagnética en el rango de radiofrecuencia para estudiar las propiedades de los núcleos en una molécula.
- **Aplicaciones:** Determinación de estructuras tridimensionales de moléculas orgánicas e inorgánicas, estudio de dinámicas moleculares, análisis de metabolitos en biología.

Espectrometría de Masas

- **Descripción:** Mide la relación masa/carga de los iones. Una muestra es ionizada, y los iones resultantes son separados según su masa y carga.
- **Aplicaciones:** Identificación de compuestos químicos, determinación de la estructura molecular, análisis de mezclas complejas, estudios de proteómica y metabolómica.

Espectrometría de Rayos X

- **Descripción:** Utiliza la interacción de rayos X con la materia para estudiar la estructura atómica y molecular. Los rayos X pueden ser absorbidos o dispersados, proporcionando información sobre la estructura interna.
- **Aplicaciones:** Análisis de materiales cristalinos (difracción de rayos X), estudios de composición elemental (fluorescencia de rayos X), investigación de defectos en materiales.

Cada tipo de espectrometría ofrece ventajas específicas y es adecuado para diferentes aplicaciones científicas y tecnológicas. La elección de la técnica adecuada depende de la naturaleza de la muestra y la información que se desea obtener. La espectrometría es una herramienta esencial en química, física, biología y muchas otras disciplinas científicas, y continúa evolucionando con el desarrollo de nuevas tecnologías y métodos analíticos.

9.1. Espectrómetros

Un espectrómetro es un sistema formador de imágenes, que mapea imágenes monocromáticas de la rendija de entrada en el plano del detector. Existen diversas configuraciones de espectrómetros; en particular, el que ustedes estuvieron usando en la materia (espectrómetro de Thorlabs) tiene una configuración experimental conocida como Czerny-Turner, que es robusta y no tiene partes móviles. En la Fig 9.1 se muestra este espectrómetro además de otras dos configuraciones posibles.

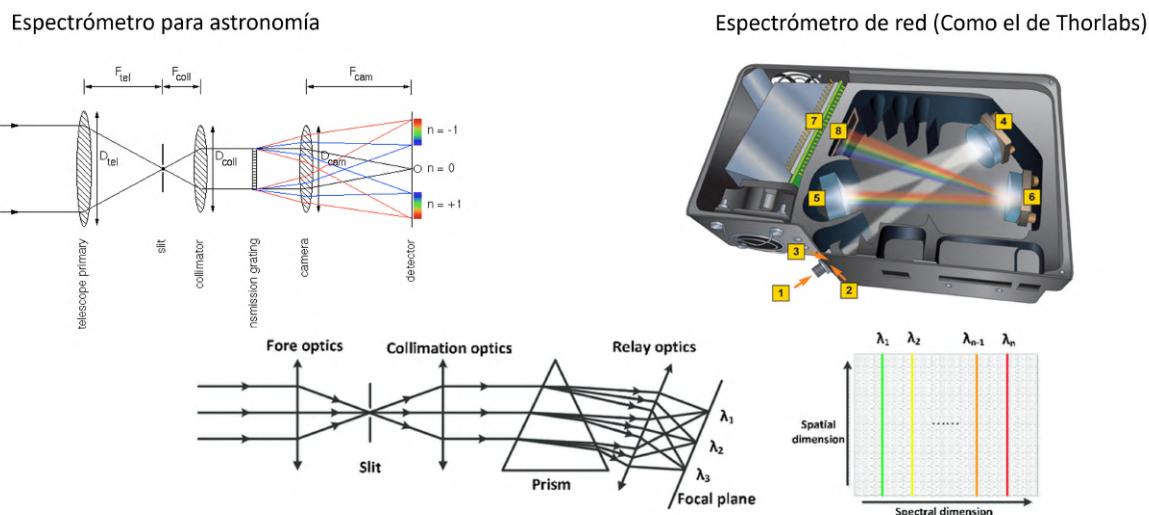


Figura 9.1: Ejemplo de montajes de distintos espectrómetros

Como se puede observar en la figura, todos coinciden en que poseen algunos elementos en común: una fuente de luz, una rendija y un elemento que dispersa luz (un prisma o una red de difracción). Además se usan lentes y espejos para formar imágenes y colimar haces. En esta materia utilizaremos como elemento principal a la red de difracción, quien determina el rango de longitudes de onda que se puede medir y, de manera parcial, la resolución del espectrómetro.

9.2. La detección en espectrometría

La medición del espectro (intensidad en función de la longitud de onda) se puede realizar de dos maneras, que se encuentran esquematizadas en la Fig. 9.2. Una opción es usar una rendija para seleccionar un rango de longitudes de onda y un detector puntual a continuación para medir la intensidad. Luego se hace un barrido en longitud de onda ya sea moviendo el detector en conjunto con la rendija o cambiando la posición angular de

la red para dirigir porciones distintas del espectro a la rendija. La otra opción es usar una cámara (CCD, CMOS), en ese caso, lo que determina el rango espectral de longitudes de ondas medidas en cada pixel, es el tamaño del pixel.

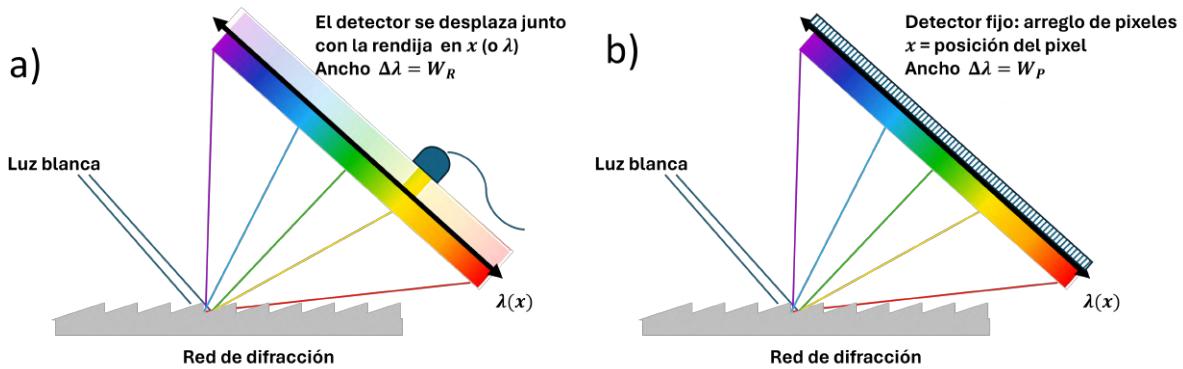


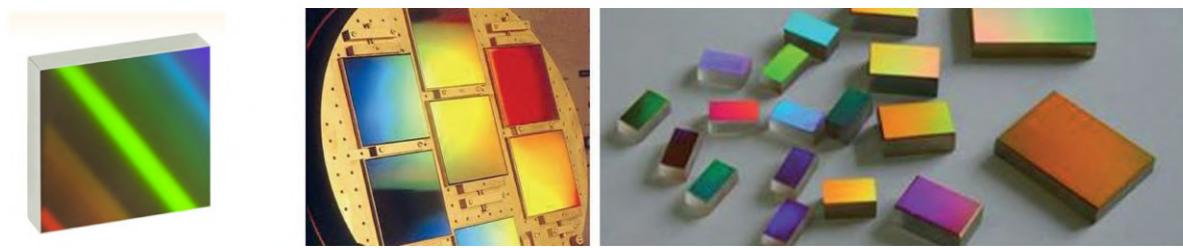
Figura 9.2: Posibles sistemas de detección en espectrometría

Nuevamente, lo que medimos resulta de la convolución entre lo que queremos medir (el espectro) y la función respuesta de detección, determinada en este caso por el tamaño de la rendija o del pixel. En este caso, podríamos pensar que la función respuesta de cada elemento de detección (pixel o rendija junto a detector) vale 1 en el área de detección y cero en otro lugar. Vemos entonces más adelante que un factor importante para la resolución del especlrómetro va a ser el tamaño del detector (tamaño de la rendija o del pixel).

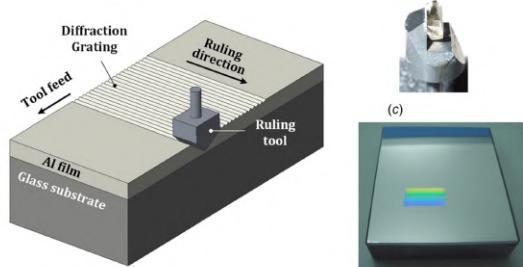
9.3. Redes de difracción

Una red de difracción es un arreglo periódico de estructuras (rendijas, espejos, etc) que tienen tamaños similares a la longitud de onda. Estas redes pueden ser de reflexión o de transmisión. En la Fig. 9.3 se muestran algunas de ellas y los métodos más comunes de fabricación. Las conocidas como *ruled gratings*, son redes de reflexión y esencialmente están compuestas por surcos (que se graban mecánicamente) en una superficie espejada. Las holográficas, son exactamente hologramas que se graban en un polímero y luego se transfieren a una superficie (traslúcida o espejada) mediante técnicas como *etching*.

La red más sencilla es la red de rendijas, que está compuesta por un arreglo de N rendijas de ancho a y separación d (medida entre centros). Supongamos que iluminamos a la red con luz coherente monocromática de longitud de onda λ en incidencia normal (Fig. 9.4). La difracción se puede analizar utilizando los principios de la interferencia y la difracción de Fraunhofer.



Ruled gratings



Redes holográficas

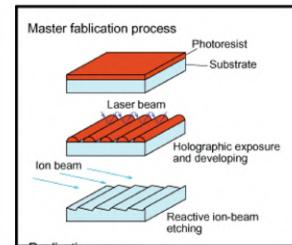


Figura 9.3: Ejemplo de distintos tipos de redes y los métodos de fabricación

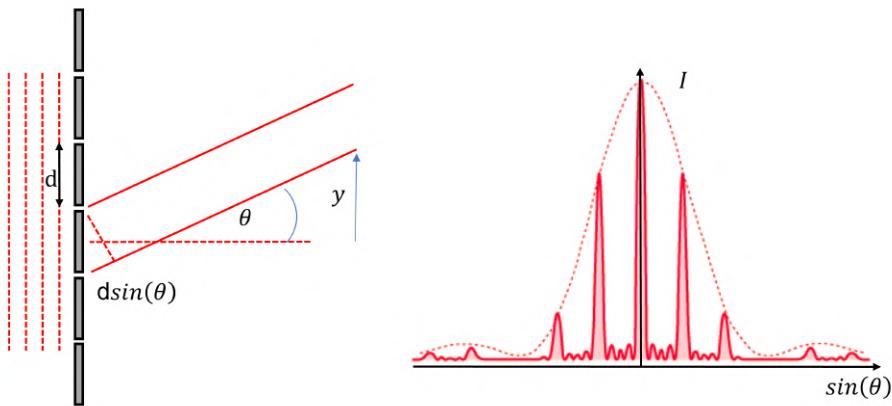


Figura 9.4: La red de rendijas y un esquema de la figura de difracción producida por la misma.

La intensidad de la luz difractada en un ángulo θ está dada por

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin(N\gamma)}{\sin(\gamma)} \right)^2 \quad (9.1)$$

donde I_0 es la intensidad máxima $\beta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$ y $\gamma = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$. Recordemos la interpretación de la figura de difracción: el término que contiene β (la envolvente en linea punteada en la figura) describe la difracción por una sola de las rendijas. Las características de la figura de difracción por una rendija cuadrada ya fueron estudiadas en el capítulo de Difracción por lo que no lo repetimos aquí. El término que contiene γ describe la interferencia entre

N fuentes puntuales, que genera una distribución de intensidad de máximos principales y secundarios, cuyas características generales se muestran en la Fig. 9.5.

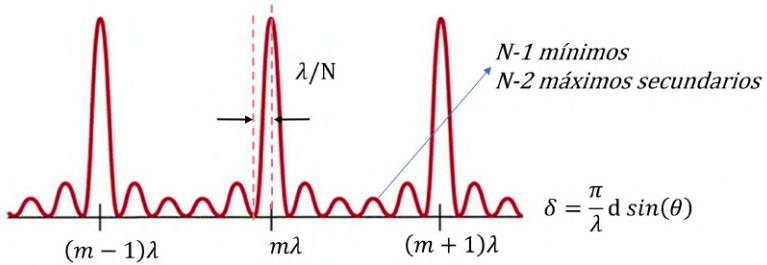


Figura 9.5: Esquema de la interferencia de N fuentes puntuales y características principales (el dibujo corresponde a $N=6$).

La condición para obtener máximos de interferencia en un arreglo de rendijas se da cuando la diferencia de camino óptico entre las ondas que pasan por rendijas adyacentes es un múltiplo entero de la longitud de onda (Fig. 9.4). Esto se expresa como

$$d \sin \theta = m\lambda \quad \text{donde} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.2)$$

donde m es el orden del máximo. Ver que esto resulta equivalente a pedir que γ sea múltiplo entero de π . La intensidad de estos máximos es

$$I_p = I_o N^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \quad (9.3)$$

Es decir, los máximos principales que se encuentren cerca del máximo de difracción tendrán una intensidad N^2 veces mayor que la intensidad de la fuente I_o . Cuanto mayor sea el número de rendijas iluminadas (N), mayor es la intensidad en los máximos principales.

Maximizando la función $\left(\frac{\sin(N\gamma)}{\sin(\gamma)}\right)^2$, se pueden obtener también la posición de los máximos secundarios, que se encuentran en aquellos valores de γ que cumplen con la ecuación trascendental $\tan(N\gamma) = N \tan(\gamma)$. Sin embargo, su intensidad

$$I_s = \frac{I_p}{1 + (N^2 - 1) \sin(\gamma)^2} \quad (9.4)$$

es mucho menor que la de los máximos principales, por lo que normalmente no los observamos fácilmente.

La posición de los mínimos es importante calcular porque eso nos va decir cuán angosto es un máximo. Los mínimos se encuentran en los ceros de la figura de interferencia de N fuentes puntuales, es decir cuando $\sin(N\gamma) = 0$. Esto ocurre si $N\gamma = \pi d \sin(\theta)/\lambda = m\pi$

o $d \sin(\theta) = m\lambda/N$. Se puede ver en entre dos máximos principales hay $N - 1$ mínimos, $N - 2$ máximos y que el primer mínimo se encuentra a una distancia $d \sin(\theta) = \lambda/N$ del máximo correspondiente (ver detalles sobre este tema en cualquier libro de óptica que hayan usado en F2). Esto significa que el máximo principal tendrá un ancho $2\lambda/N$, y entonces cuanto más líneas ilumine de la red, más angosto serán los órdenes de difracción.

Nota: En general, si la luz incide en un ángulo θ_o , podemos reescribir la Eq. 9.2 de manera que la expresión adopta la forma de la conocida ecuación de la red

$$d(\sin \theta - \sin \theta_o) = m\lambda \quad \text{donde } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.5)$$

donde m indica la posición de los máximos principales, los órdenes de difracción.

Experimental 1: En el laboratorio vas a recibir una red de transmisión holográfica. Como podrías corroborar que la densidad de líneas por milímetros es la indicada en la etiqueta? que experimento realizarías?

9.4. La difracción de una fuente no monocromática

Si queremos determinar el espectro de una fuente que no es monocromática empleando una red, vamos a encontrar que los máximos principales van a tener una posición distinta para cada longitud de onda. Por ejemplo, en la Fig. 9.6 se muestra un ejemplo de los órdenes 2, 1, 0, -1 y -2 de una fuente de luz blanca.

Aquí se hace evidente la posibilidad de crear un instrumento para medir espectros: solo basta medir un orden de difracción y realizar la calibración de:

- la longitud de onda en función de posición,
- la señal en el detector en función de intensidad.

Observemos que, según lo visto en la sección anterior, el orden va a estar más expandido cuanto más grandes sean el número de orden, la densidad de líneas de la red, y la distancia a la pantalla. Entonces podemos pensar intuitivamente (y luego confirmaremos) que la resolución (capacidad de detectar longitudes de onda distintas), va a aumentar con el número de orden. El costo a pagar por tener mayor resolución es que tenemos menos

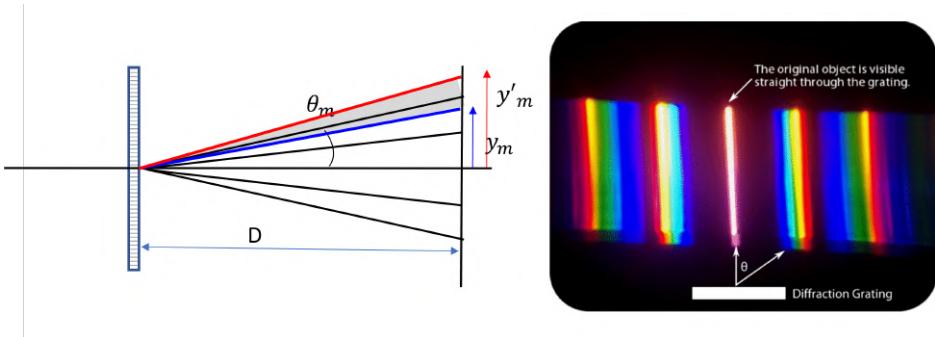


Figura 9.6: izquierda: Esquema de la difracción en un orden particular, mostrando posiciones y'_m y y_m que corresponden a longitudes de onda diferentes en el mismo orden. Derecha: Esquema de la difracción de una fuente de luz blanca.

intensidad (recordar que la intensidad disminuye con el aumento del orden porque la intensidad está modulada por la campana de difracción).

Observemos además que el rango del longitudes de onda que vamos a poder medir, va a estar determinado por el tamaño del orden en el plano de detección (que a su vez está determinado por la densidad de líneas, el número de orden y la distancia a la pantalla), respecto al tamaño del detector. Si el detector es más chico que la expansión del orden, vamos a poder medir un rangopectral menor.

Entonces para diseñar el espectrómetro, necesitamos conocer cuál es la dispersión que introduce la red, para saber también qué distancia a la pantalla elegir, o como está limitado lo que puedo medir según el tamaño del detector que tenga.

Dispersión angular

Podemos analizar cuál es la capacidad de dispersar de una red angularmente, diferenciando la Eq. 9.5 para obtener

$$\frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta_m} \quad (9.6)$$

Vemos que la dispersión aumenta con la disminución del período (mayor densidad de líneas) y el número de orden. Esto significa que voy a tener mayor resolución con ordenes mayores y con redes de mayor densidad de líneas.

Dispersión lineal

La dispersión lineal o dispersión reciproca de la red es cuanto se dispersa la longitudes de onda por unidad de longitud en el detector. Para simplificar cuentas vamos a suponer que los ángulos de difracción son pequeños de manera que $\theta_m \sim y_m/D$ (Nota, si usáramos

una lente para producir la condición de Franhofer, en lugar de D usaríamos la distancia focal). Entonces, a partir de la Eq. 9.6 obtenemos

$$\frac{dy_m}{d\lambda} = \frac{mD}{d \cos \theta_m} \quad (9.7)$$

Luego, invirtiendo esta relación encontramos

$$\frac{d\lambda}{dy_m} = \frac{\cos \theta_m}{dmD} \quad (9.8)$$

que representa la diferencia de longitud de onda por unidad de distancia en el detector. En particular, si consideramos que el detector esta compuesto por pixeles de tamaño W_p (o usamos una rendija a la salida del espectrómetro y un detector puntual, entonces consideraríamos el tamaño de la rendija W_s), encontramos a partir de la Eq 9.8, una expresión para la resolución multiplicando la dispersión reciproca por el tamaño del píxel.

$$R = W_p \frac{d\lambda}{dy_m} = W_p \frac{\cos \theta_m}{dmD} \quad (9.9)$$

Rango de longitudes de onda (bandpass)

Supongamos que el tamaño del detector mide y_D , el rango de longitudes de onda que es posible medir se puede estimar como

$$\Delta\lambda = \lambda_{max} - \lambda_{min} = y_D \frac{mD}{d \cos \theta_m} \quad (9.10)$$

observando que este depende del tamaño del detector, el orden de difracción y del período de la red. A menor período d (mayor densidad de líneas), la red dispersa más, pero el rango de longitudes de onda que puedo medir en un área definida disminuye.

A menor período (más densidad de líneas):

- La resolución aumenta
- La dispersión aumenta
- El rango de longitudes de onda (en el detector o rendija de salida) disminuye

9.5. Resolución

La resolución espectral es la mínima separación $\Delta\lambda$ en longitudes de onda entre dos líneas espectrales que el instrumento puede resolver. Generalmente se expresa como

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (9.11)$$

Por ejemplo, si $R = 10000$, significa que la mínima separación en λ que se puede medir es $\Delta\lambda = 0,0001\lambda$. También podríamos intentar estimar cual es el poder resolvente que necesitamos para poder resolver dos líneas espectrales cercanas. Por ejemplo, tomemos el caso del doblete del sodio cuyas líneas espectrales se encuentran en 589.00 nm and 589.59 nm. Resolver estas líneas significa que tengo que tener una red cuyo poder resolvente sea como mínimo

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589\text{nm}}{0,59 \text{ nm}} = 1000$$

Para caracterizar la resolución, se puede hacer un experimento tipo respuesta impulsiva: se usan fuentes con líneas espectrales muy angostas (más angostas que la resolución normal de los espectrómetros), por ejemplo, láseres muy monocromáticos, lámparas atómicas. Por ejemplo, en la Fig.9.7 se muestra el espectro del mercurio gaseoso, cuyas líneas espectrales son más angostas que ~ 1 nm. Luego se mide cual es el ancho de la línea espectral adoptando algún criterio (por ejemplo el ancho mitad altura).

Comentario: en los tubos de luz, se genera una descarga eléctrica ionizando átomos de mercurio. Luego de la ionización suceden diversos fenómenos como el decaimiento de electrones a niveles de menor energía o la recombinación de los iones con electrones libres, que generan luz con líneas espectrales muy angostas en el visible y el UV. El material de las paredes del tubo absorbe la luz UV excitando a sus átomos. Estos átomos, al decaer a su estado fundamental, emiten luz visible en un rango amplio de longitudes de onda cuya superposición se observa como luz blanca. De este modo, el espectro de emisión de los tubos de luz está compuesto por algunas líneas espectrales muy angostas correspondientes a la emisión de iones de mercurio, superpuesto con un fondo continuo en el visible que corresponde a la emisión del material de la superficie del tubo.

Recordando que medir es convolucionar, aquí podemos pensar que la señal medida

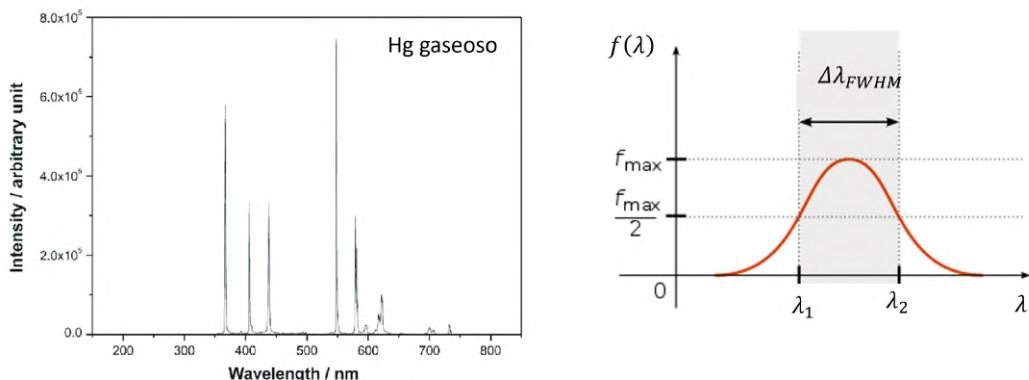


Figura 9.7: Espectro de emisión del mercurio gaseoso. La linea espectral se verá ensanchada si la resolución del espectrómetro es menor, por lo que se puede caracterizar la resolución midiendo el ancho de la linea.

$S_M(\lambda)$, resulta de la convolución entre la respuesta del espectrómetro $R(\lambda)$ y lo que queremos medir $S_o(\lambda)$, es decir

$$S_M(\lambda) = S_o(\lambda) * R(\lambda). \quad (9.12)$$

De este modo, si lo que queremos medir es una “delta” (la línea espectral muy angosta) en el sentido que es mucho más angosto en longitudes de onda que la función respuesta del espectrómetro, el resultado de la medición es la función resolución.

Nota: ustedes ya midieron el espectro del láser que usaron en el experimento de difracción, por lo que ya están en condiciones de determinar la resolución espectral del espectrómetro de thorlabs.

Entre los factores que limitan la performance de los espectrómetros podemos encontrar

- La red de difracción: rango de longitudes de onda y (en parte) la resolución.
- La rendija de entrada: recorte nítido del haz incidente, throughput y resolución.
- El sistema óptico: la magnificación (tamaño de la imagen en el detector, resolución), las aberraciones (imagen nítida de la fuente en el detector, resolución)
- El detector: su tamaño (rango de longitudes de onda), muestreo (tamaño del píxel, resolución en λ) y digitalización (resolución en intensidad).

9.5.1. La red de difracción: resolución límite o resolución limitada por difracción o poder resolvente cromático

La resolución limitada por difracción es aquella determinada por la red de difracción. Podemos usar el criterio de Rayleigh para calcular poder resolvente de la red, esto es: se pueden resolver dos longitudes de onda si el máximo de la figura de difracción para una coincide con el mínimo de la figura de difracción de la otra. Usando la Fig. 9.8 en donde se muestra el criterio de Raighleigh para dos longitudes de onda separadas en $\Delta\lambda$, se puede observar que la distancia entre los dos máximos es igual a la distancia de un máximo al primer mínimo.

Recordemos que para una dada longitud de onda λ (ver sección 9.3) la distancia del máximo principal m al primer mínimo cumple que $d \sin(\theta) = \lambda/N$. De esta manera la distancia entre máximos es $m\Delta\lambda = \lambda/N$, lo que resulta en

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN} \quad (9.13)$$

Se observa que la resolución aumenta con el orden de difracción y con el número de rendijas iluminadas.

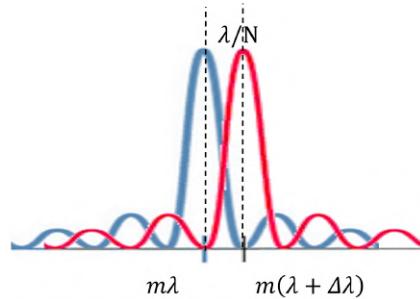


Figura 9.8: Esquema de aplicación del criterio de Raighleigh para dos ondas cuyas longitudes de onda son λ y $\lambda + \Delta\lambda$, que se difractan en la red de difracción.

Esto es consistente con la resolución teórica limitada por transformada que dice que la unidad más chica posible de resolver de cualquier transformada es inversamente proporcional al número de muestras.

Más allá de la teoría, apliquemos este criterio en algunos ejemplos:

- Una red de 300 l/mm, iluminando 20 mm de red, en el primer orden de difracción

$$R = mN = 1 \times 300 \text{ l/mm} \times 20 \text{ mm} = 6000$$

- Una red de 600 l/mm, de iguales características, en el segundo orden de difracción

$$R = mN = 2 \times 600 \text{ l/mm} \times 20 \text{ mm} = 24000$$

En general el poder resolvente de la red es mucho más grande que el poder resolvente del espectrómetro por lo que otros factores determinan la resolución del espectrómetro: rendijas, aberraciones ópticas, tamaño del detector, pixeles en el detector

9.5.2. La rendija de entrada

Recordemos que una forma de pensar al espectrómetro es como un sistema óptico que forma imágenes de la rendija en el plano del detector, desplazadas según la longitud de onda. La rendija es clave para el buen funcionamiento del espectrómetro: determina la cantidad de luz que pasa y llega al detector (throughput o transmisión) y la resoluciónpectral cuando el espectrómetro no funciona al límite de difracción. En general, cuanto más chica la rendija mejor resolución pero menor transmisión. Se puede ver como ejemplo, las mediciones de la Fig. 9.9 en donde se observan mediciones adquiridas con tamaños de rendijas diferentes, mejorando la resolución en el caso de la rendija más chica. Sin embargo, lo que importa es la imagen de la rendija en el plano de detección, por lo que, usando un sistema óptico adecuado nos la podemos ingeniar para tener una transmisión alta, con una imagen pequeña en el plano de detección.

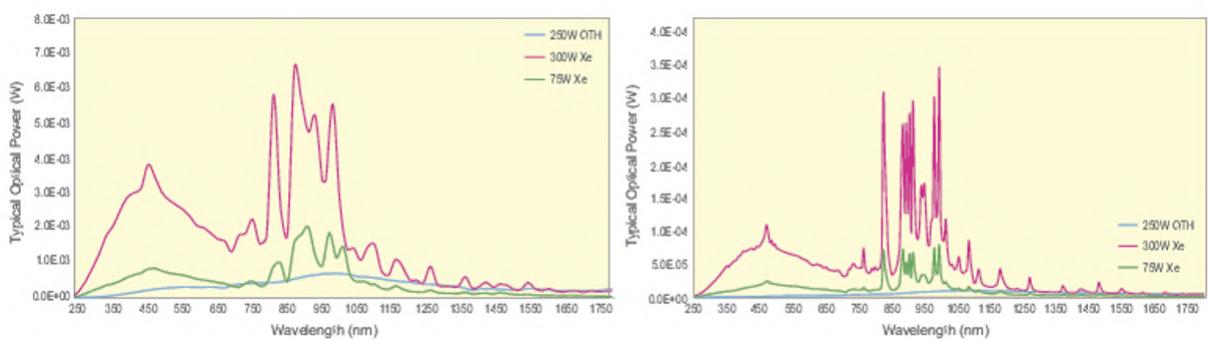


Figura 9.9: Ejemplos de mediciones para tamaños de rendijas diferentes.

La rendija también define la apertura angular de los haces que ingresan al espectrómetro. Típicamente la luz de la fuente se enfoca en la rendija con una lente cuya apertura

numérica es igual a la del especlarómetro. Eso garantiza iluminar óptimamente a la red, es decir, iluminar la mayor cantidad de líneas de la red posibles (recordar que cuanto más líneas ilumino, más finitos son los ordenes de difracción, y mayor es la resolución de la red). Si se ilumina con una apertura numérica menor a la óptima, se iluminan menos líneas, los ordenes se ensanchan (ver 9.3). Si se ilumina con mayor apertura que la óptima, se pierde intensidad a la salida.

Además, la rendija define un recorte nítido de la fuente de iluminación. El tamaño de la rendija ($W_s \times H_s$) es uno de los factores principales que definen el throughput del especlarómetro (cuanto más grande la rendija más luz entra).

El ancho de la imagen de la rendija en el plano del detector (W_i), es crítico para determinar la resolución. Además normalmente se desea que $W_i > W_p$, con W_p ancho del píxel del detector. El ancho de la imagen de la rendija de entrada W_i se puede estimar como $W_i = (M^2 W_s^2 + W_o^2)^{1/2}$, donde W_o es un ensanchamiento de la imagen que se puede producir por los distintos elementos ópticos (por ejemplo por aberraciones) y M es la demagnificación del sistema óptico. Reducir W_i por debajo de W_p no ayuda a aumentar la resolución del especlarómetro.

Si el requerimiento en resolución se satisface, el ancho de la rendija debe ser lo más grande posible para aumentar la transmisión del especlarómetro.

Idealmente quisieramos trabajar en el límite permitido por la difracción. Si el ancho proyectado de la rendija en el detector es mucho menor que la resolución limitada por difracción del especlarómetro, no habrá pérdida de resolución. Sin embargo, si se ensancha la rendija de modo que el ancho de su imagen en el espectro supera la resolución límite, será el ancho de la rendija el que definirá la resolución del espectro, no la difracción. Este punto se ilustra en la Fig. 9.10, que muestra la resoluciónpectral limitada por la difracción y por el ancho de la rendija, respectivamente.

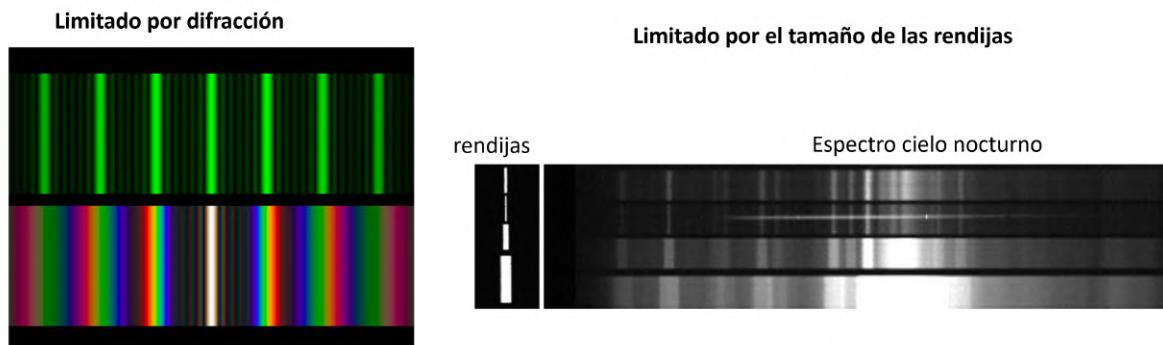


Figura 9.10: Ejemplos de figuras de difracción limitadas por difracción y limitadas por tamaño de la rendija.

Para maximizar la resolución espectral, por lo tanto, parece obvio que el ancho de la rendija siempre debería mantenerse más pequeño que la resolución límite. Desafortunadamente, esto es raramente posible, ya que la rendija sería tan estrecha que muy poca luz pasaría al espectrómetro.

9.5.3. Los píxeles en el detector

Según el criterio de Nyquist, la frecuencia de muestreo debe ser por lo menos el doble de la frecuencia máxima contenida en la señal. El tamaño de la menor estructura en el espectro (determinado por el espectro de una línea atómica o un láser) contiene la mayor cantidad de frecuencias espaciales en el detector (sería el análogo al impulso en el experimento de piezoelectrónicos), es del orden $\Delta\lambda_{FWHM}$. Según Nyquist, por lo menos necesitaríamos una frecuencia de muestreo del doble: $2/\Delta\lambda_{FWHM}$. La condición de mínima para que los píxeles no limiten la resolución, es poder detectar la resolución adecuadamente. Esto se logra si al menos medimos la función resolución con 3 píxeles en el $\Delta\lambda_{FWHM}$.

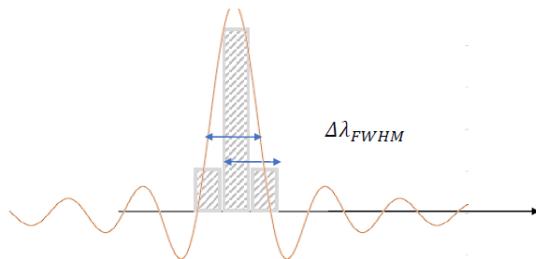


Figura 9.11: Muestreo de la función de resolución

9.6. Estimación de la resolución

Según lo visto, podemos estimar a la resolución como

$$R = \frac{d\lambda}{dy_m} \times W_i \quad (9.14)$$

siendo W_i tamaño de la imagen de la rendija y la dispersión lineal $d\lambda/dy_m$ que mencionamos en las secciones anteriores.

Podemos hacer una estimación de la siguiente manera. Consideraremos la dispersión por pixel (DP) como

$$DP = \frac{\text{ancho de banda (nm)}}{\text{número de píxeles}} \quad (9.15)$$

Por otro lado, calculamos el tamaño de la rendija proyectada (o sea de la imagen de la rendija) en píxeles (pixel slit projection- PSP)

$$PSP = \frac{\text{tamaño de la imagen proyectada } W_i(\mu\text{m})}{\text{tamaño del píxel } (\mu\text{m})} (\text{pixels}) \quad (9.16)$$

Estimamos entonces a la resolución como

$$R = DP \times PSP \quad (9.17)$$

Veamos un ejemplo: Usando una red de 300 l/mm, queremos medir longitudes de onda entre 200 nm y 1100 nm (ancho de banda de 900 nm)en un área del detector que tiene 2048 píxeles. La imagen de la rendija tiene 25 μm y el tamaño de los píxeles es 14 μm .

$$R = DP \times PSP = \frac{900\text{nm}}{2048\text{pixels}} \times \frac{25\mu\text{m}}{14\mu\text{m}} \text{pixels} = \frac{0,43\text{nm}}{\text{pixels}} \times 2\text{pixels} = 0,9\text{nm} \quad (9.18)$$

9.7. Medición de absorbancia

El espectrómetro más sencillo es aquel que mide la absorbancia, es decir cuanta luz fue absorbida por una muestra translúcida. Supongamos que tenemos una muestra translúcida, que permite transmitir parte de la luz incidente, como se esquematiza en la Fig. 9.12.

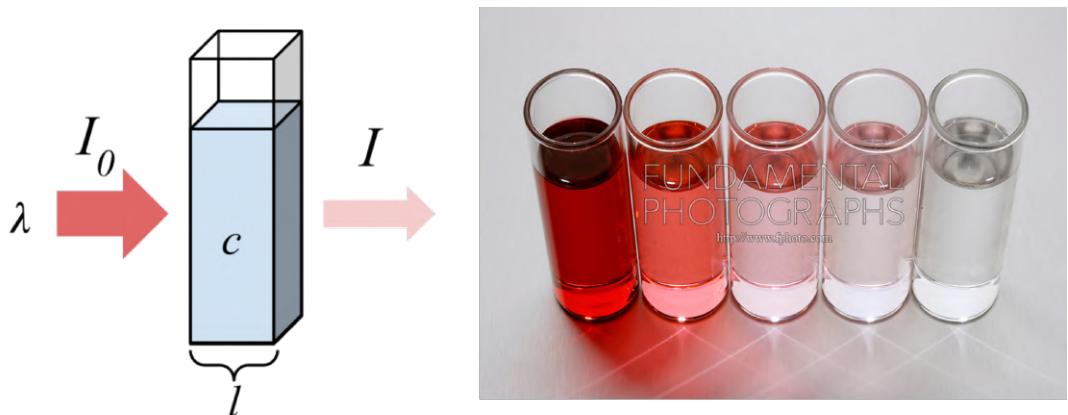


Figura 9.12: Esquema de un haz atravesando una muestra translúcida. Ejemplos de muestras con distintas concentraciones

Luego de atravesar una distancia l podemos escribir al campo como

$$E = E_o e^{i(kl - \omega t)} \quad (9.19)$$

en donde k es el número de onda en el material. El número de onda en el material es $k = k_o n(\bar{\lambda})$ con $k_o = 2\pi/\lambda$, siendo λ la longitud de onda en el vacío y $n(\bar{\lambda})$ el índice de refracción complejo $n(\bar{\lambda}) = n(\lambda) + i\kappa(\lambda)$. Sustituyendo en la expresión anterior obtenemos

$$E = E_o e^{i(k_o \bar{n}(\lambda) l - \omega t)} = E_o e^{i(k_o n(\lambda) l - \omega t + i\kappa(\lambda) l)} = E_o e^{i(k_o n(\lambda) l - \omega t)} e^{-\kappa(\lambda) l} \quad (9.20)$$

Si queremos calcular la intensidad, tomamos módulo cuadrado en la expresión anterior para obtener

$$I(\lambda) = I_o(\lambda) e^{-\kappa(\lambda) l} \quad (9.21)$$

De este modo, la transmisión en función de la longitud de onda resulta

$$T(\lambda) = \frac{I(\lambda)}{I_o(\lambda)} = e^{-\kappa(\lambda) l} \quad (9.22)$$

Se define absorbancia a $\kappa(\lambda)l$, y la podemos obtener calculando el logaritmo de la transmitancia

$$A = \kappa(\lambda) l = -\ln\left(\frac{I(\lambda)}{I_o(\lambda)}\right) \quad (9.23)$$

La ley de Beer-Lambert, es una ley empírica que establece una relación entre la absorbancia y la concentración C de un absorbente, y se expresa como

$$A = C \epsilon(\lambda) l \quad (9.24)$$

donde $\epsilon(\lambda)$ es el coeficiente de absorción molar que depende del material y de la longitud de onda.

9.8. Experimento

Discutir los siguientes dispositivos experimentales sus posibles ventajas y desventajas, que distancias focales considerarían

- Caracterizar la respuesta en intensidad (Malus) y tiempo de exposición de nuestro sensor de luz (cámara)

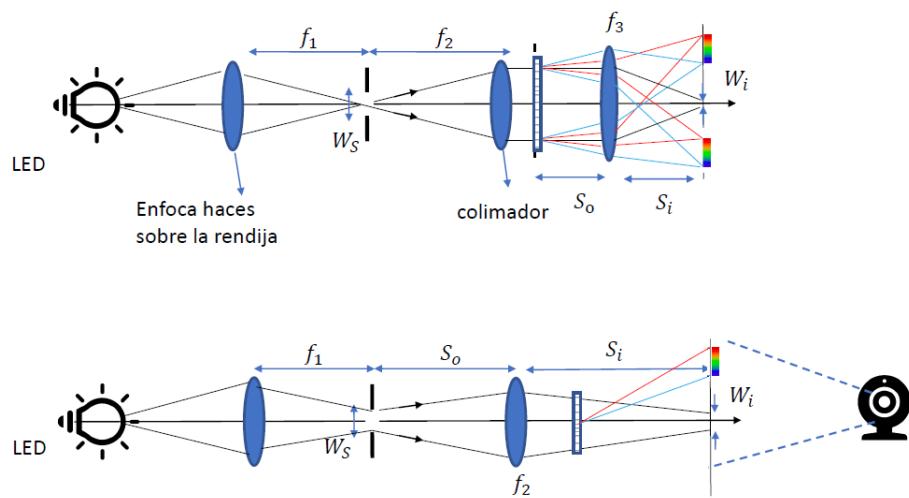


Figura 9.13: Dispositivos propuestos

- Armar y caracterizar el dispositivo experimental (medir todas las distancias, aumento, throughput)
- Comparando con el espectro del LED medido con el especlrómetro Thorlabs, calibrar en longitudes de onda el espectro medido
- Usar el dispositivo experimental para medir absorbancia o espectros de emisión

Capítulo 10

Apéndice

10.1. Transformada de Fourier de la señal del Michelson, alimentación sinusoidal

Queremos hallar la transformada de Fourier de la señal medida en el Michelson cuando se desplaza el piezoelectrónico, que tiene la forma

$$I(t) = 1 + \cos(2kx(t))$$

donde $x(t)$ es la posición en función del tiempo, para la que vamos a suponer que es senoidal periódica $x(t) = A\cos(\omega t)$, de modo que

$$I(t) = 1 + \cos(2kA\cos(\omega t))$$

La transformada de Fourier de la intensidad es

$$\mathcal{F}\{I(t)\}(\omega) = \delta(\omega) + \mathcal{F}\{\cos(2kA\cos(\omega t))\}$$

Afortunadamente, hay una forma sencilla de resolver la transformada del segundo término. En primer lugar, escribamos al coseno como suma de exponenciales

$$\mathcal{F}\{\cos(2kx(t))\}(\omega) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}\{e^{i2kx(t)}\}(\omega) + \mathcal{F}\{e^{-i2kx(t)}\}(\omega))$$

Resolver cada uno de estos términos ahora es más sencillo, tomemos uno de ellos (el otro se resuelve igual, cambiando k por $-k$). Usamos la representación en serie de Fourier para expresar la función exponencial en términos de funciones de Bessel:

$$e^{i2kA\cos(\frac{2\pi}{T}t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(2kA) e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

Donde J_n es la función de Bessel de primera clase de orden n . La transformada de Fourier de $e^{in\frac{2\pi}{T}t}$ es un delta de Dirac centrado en $\frac{2\pi n}{T}$:

$$\mathcal{F}\{e^{in\frac{2\pi}{T}t}\} = \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$$

Entonces, la transformada de Fourier de $e^{i2kA\cos(\frac{2\pi}{T}t)}$ es:

$$\mathcal{F}\left\{e^{i2kA\cos(\frac{2\pi}{T}t)}\right\}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(2kA) \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$$

Es decir, es un peine de deltas, centradas en múltiplos de la frecuencia de excitación, y amplitudes dadas por las J de Bessel. Es decir, la información del desplazamiento, está en las amplitudes y no en las frecuencias.

10.2. Transformada de Fourier de la señal del Michelson, alimentación triangular

Queremos hallar la transformada de Fourier de la señal medida en el Michelson cuando se desplaza el piezoelectrónico, que tiene la forma

$$I(t) = 1 + \cos(kx(t))$$

donde $x(t)$ es la posición en función del tiempo, para la que vamos a suponer que es triangular periódica. Una onda triangular con período T y amplitud 1 se puede representar como:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{4}{T}t - 1 & \text{para } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -\frac{4}{T}t + 3 & \text{para } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

Como es periódica podemos expresarla como una serie de Fourier de la forma

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}$$

con

$$c_n = x_o \frac{8}{\pi^2} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2}$$

De modo que

$$x(t) = x_o \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1, \text{ impar}}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

Transformada de Fourier de $1 + \cos(kx(t))$:

1. Transformada de Fourier del Término Constante 1

Usamos que la transformada de Fourier de una función constante c está dada por:

$$\mathcal{F}\{c\}(\omega) = c\delta(\omega)$$

Para $c = 1$:

$$\mathcal{F}\{1\}(\omega) = \delta(\omega)$$

Esto significa que vas a tener señal en la transformada para frecuencia $\omega = 0$

2. Transformada de Fourier de $\cos(kx(t))$

Necesitamos calcular:

$$\mathcal{F}\{\cos(kx(t))\}(\omega) = \mathcal{F} \left\{ \cos \left(k \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x} \right) \right\}$$

donde los c_n son los que se dieron previamente. Para calcular esta transformada, vamos a escribir el coseno en término de exponentiales y luego calcular la transformada de exponentiales de la siguiente manera

$$\mathcal{F}\{\cos(kx(t))\}(\omega) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}\{e^{ikx(t)}\}(\omega) + \mathcal{F}\{e^{-ikx(t)}\}(\omega))$$

Enfoquémonos en uno solo de los términos, por ejemplo en $\mathcal{F}\{e^{ikx(t)}\}(\omega)$ porque calculando uno, el resultado del otro se obtienen cambiando k por $-k$. Tenemos que usar la propiedad que la exponencial de una sumatoria, es el producto de exponentiales, es decir:

$$e^{ikx(t)} = e^{ik \sum_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} t}} = \prod_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} e^{ik c_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)}$$

Ahora, podemos calcular la transformada de un producto de exponenciales, para lo que vamos a usar que la transformada de un producto es la convolución de las transformadas. Es decir, vamos a usar que

$$\mathcal{F}\{f \cdot g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) * \mathcal{F}\{g\}(\omega)$$

Entonces nos queda,

$$\mathcal{F}\{e^{ikx(t)}\}(\omega) = \mathcal{F}\{e^{ikc_1 \cos(\frac{2\pi}{T}t)}\} * \mathcal{F}\{e^{ikc_3 \cos(\frac{2\pi}{T}t)}\} * \dots * \mathcal{F}\{e^{ikc_n \cos(\frac{2\pi}{T}t)}\} * \dots \quad (10.1)$$

Es decir, que si resolvemos la transformada de Fourier de un término genérico alcanza, porque todos tienen la misma forma. La transformada de un término genérico la conocemos y vale (ver más abajo el cálculo)

$$\mathcal{F}\left\{e^{ikc_s \cos(\frac{2\pi s}{T}t)}\right\}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kc_s) \delta\left(\omega - \frac{2\pi n s}{T}\right) \quad (10.2)$$

en donde J_n son funciones de Bessel de primer tipo de orden n .

Lo que viene ahora sería reemplazar cada uno de los términos en la ecuación 10.1, es bastante lio, pero lo importante es darse cuenta que cada uno de los términos de la productoria tiene una δ en frecuencias que son únicamente múltiplos de la frecuencia de la alimentación, y por lo tanto, en principio, no deberían aparecer frecuencias que tengan que ver con el desplazamiento del piezo. En cambio, la información del desplazamiento del piezo está en las amplitudes, es decir, en las $J_n(kc_s)$. Más abajo hay una cuenta de dos exponenciales, pero con esta justificación en principio quedaría demostrado, que no hay info en las frecuencias sobre el desplazamiento de los piezos.

10.2.1. Transformada de Fourier del producto de dos exponenciales

Para encontrar la transformada de Fourier del producto de las dos funciones, realizamos la convolución de las transformadas de Fourier individuales:

$$\mathcal{F}\left\{e^{ikc_s \cos(\frac{2\pi s}{T}t)}\right\} * \mathcal{F}\left\{e^{ikc_k \cos(\frac{2\pi k}{T}t)}\right\}$$

La convolución de dos deltas de Dirac $\delta(\omega - \omega_1)$ y $\delta(\omega - \omega_2)$ se realiza de la siguiente manera:

$$(\delta(\omega - \omega_1) * \delta(\omega - \omega_2))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega' - \omega_1) \delta(\omega - \omega' - \omega_2) d\omega' = \delta(\omega - (\omega_1 + \omega_2))$$

Aplicando esto a nuestras series de funciones de Bessel, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kc_s) \delta\left(\omega - \frac{2\pi ns}{T}\right) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kc_k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi mk}{T}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^n i^m J_n(kc_s) J_m(kc_k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi(ns + mk)}{T}\right) \end{aligned}$$

La transformada de Fourier del producto de las dos funciones es:

$$\mathcal{F} \left\{ e^{ikc_s \cos\left(\frac{2\pi s}{T}t\right)} e^{ikc_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)} \right\} (\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{n+m} J_n(kc_s) J_m(kc_k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi(ns + mk)}{T}\right)$$

10.2.2. Todas las frecuencias

Para calcular la transformada de Fourier del producto infinito de exponenciales de cosenos, es útil recordar que cada exponencial de un coseno se puede expresar en términos de una serie de funciones de Bessel. Usaremos la propiedad de que la transformada de Fourier de un producto de funciones en el dominio del tiempo corresponde a la convolución de sus respectivas transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia.

Para encontrar la transformada de Fourier del producto de todas estas funciones, realizamos la convolución de todas sus transformadas de Fourier. La convolución de muchas deltas de Dirac resulta en una delta de Dirac centrada en la suma de las posiciones de las deltas individuales. Por lo tanto, la transformada de Fourier del producto infinito será una suma infinita de convoluciones.

$$\begin{aligned} & \mathcal{F} \left\{ \prod_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} e^{ikc_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} \right\} (\omega) = \\ & \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \sum_{m_5=-\infty}^{\infty} \dots \left(\prod_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} i^{m_n} J_{m_n}(kc_n) \right) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T} \sum_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} m_n n\right) \end{aligned} \quad (10.3)$$

Donde la suma se realiza sobre todos los índices m_n correspondientes a los términos impares n .

10.3. Intentemos otra forma más directa

Voy a pensar al problema como si fuera una red de difracción. En cada periodo de la señal, voy a pensar que hay una fuente puntual, de modo que en el plano transformado tengo la interferencia de esas fuentes puntuales, es decir, los “órdenes de difracción” van a estar en los múltiplos enteros de la frecuencia de la señal. La modulación (análogo a la campana de difracción) va a estar dada por la transformada de Fourier de un período. Entonces, hagamos solo para un período:

$$\mathcal{F}\{I(t)\} = \mathcal{F}\{1 + \cos(2kx(t))\}(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T (1 + \cos(2kx(t))) e^{-i\omega t} dt$$

Donde T es el período de la función $x(t)$, y ω es la frecuencia angular.

Recordando que

$$x(t) = A \begin{cases} \frac{4}{T}t - 1 & \text{para } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -\frac{4}{T}t + 3 & \text{para } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

Entonces

$$\mathcal{F}\{I(t)\} = \frac{1}{T} \int_0^T (1 + \cos(2kx(t))) e^{-i\omega t} dt =$$

$$\mathcal{F}\{I(t)\} = \delta(\omega) + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (\cos(2kA(4t/T - 1))) e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (\cos(2kA(-4t/T + 3))) e^{-i\omega t} dt$$

Usando el **resultado parcial 1** obtenemos (ver siguiente sección)

$$\mathcal{F}\{I(t)\} = \delta(\omega) + \frac{2}{T} e^{-i\frac{T\omega}{4}} e^{-i\frac{T\omega}{4}} \cos\left(\omega \frac{T}{4}\right) \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{8kAv}{T}\right) e^{-i\omega v} dv$$

y ahora usando el **resultado parcial 2**

$$\mathcal{F}\{I(t)\} = \delta(\omega) + \frac{1}{2} e^{-i\frac{T\omega}{2}} \cos\left(\omega \frac{T}{4}\right) \left[\operatorname{sinc}\left(\left(\frac{8kA}{T} - \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right) + \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{8kA}{T} + \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right) \right]$$

Aca va un plot para valores arbitrarios, sin tener en cuenta el termino de la frecuencia negativa

Solo ver que el máximo de la función (en azul) no está ni en el máximo de la sinc ni en el del coseno (dibujados en gris clarito)....pero se puede hallar aunque sea numéricamente.

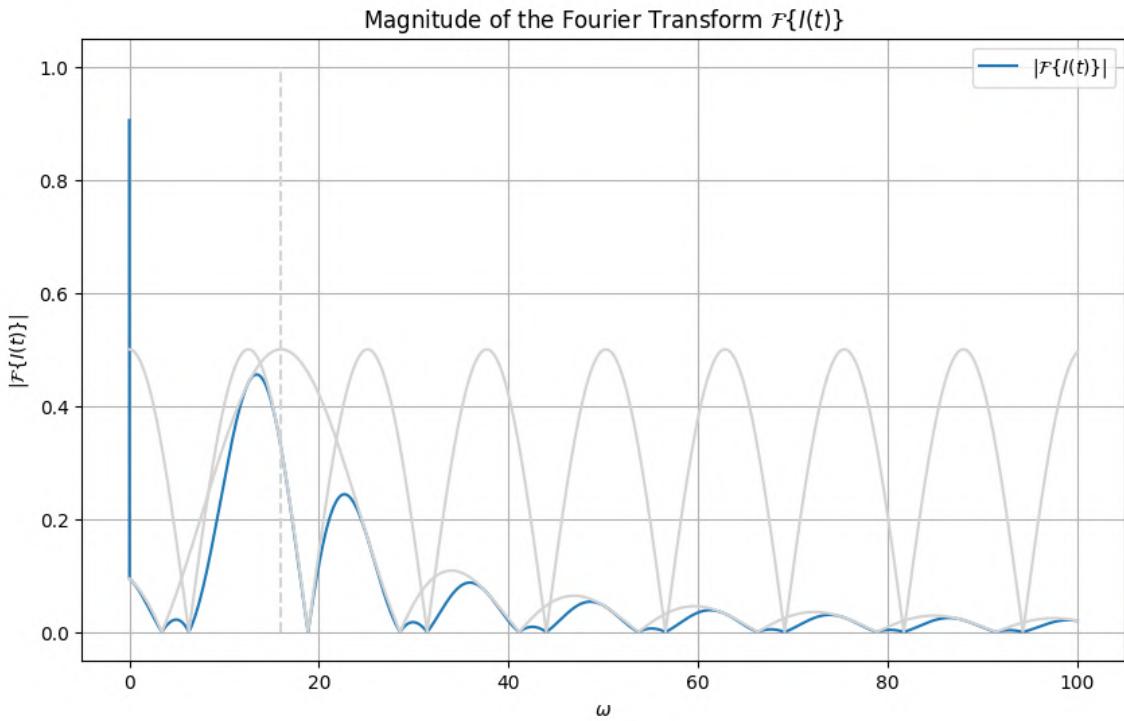


Figura 10.1

10.3.1. Solución de la integral

Resultado parcial 1

En primer lugar usemos las propiedades de cos de la suma:

$$\begin{aligned} \text{Integral} &= \frac{1}{T} \left[\cos(6kA) \int_{T/2}^T \cos\left(\frac{8kAt}{T}\right) e^{-i\omega t} dt + \sin(6kA) \int_{T/2}^T \sin\left(\frac{8kAt}{T}\right) e^{-i\omega t} dt \right] \\ &\quad + \frac{1}{T} \left[\cos(2kA) \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAt}{T}\right) e^{-i\omega t} dt + \sin(2kA) \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{8kAt}{T}\right) e^{-i\omega t} dt \right] \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $u = t - T/2$

$$\begin{aligned} \text{Integral} &= \frac{1}{T} \left[\cos(6kA) e^{-i\omega \frac{T}{2}} \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAu}{T} + 4kA\right) e^{-i\omega u} du \right] + \\ &\quad \frac{1}{T} \left[\sin(6kA) e^{-i\omega \frac{T}{2}} \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{8kAu}{T} + 4kA\right) e^{-i\omega u} du \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{T} \left[\cos(2kA) \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAt}{T}\right) e^{-i\omega t} dt + \sin(2kA) \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{8kAt}{T}\right) e^{-i\omega t} dt \right]$$

Para simplificar aún más, observamos que las integrales tienen formas similares y podemos combinar términos:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{T} \left\{ e^{-i\omega \frac{T}{2}} \int_0^{T/2} \left[\cos(6kA) \cos\left(\frac{8kAu}{T} + 4kA\right) + \sin(6kA) \sin\left(\frac{8kAu}{T} + 4kA\right) \right] e^{-i\omega u} du \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{T/2} \left[\cos(2kA) \cos\left(\frac{8kAt}{T}\right) + \sin(2kA) \sin\left(\frac{8kAt}{T}\right) \right] e^{-i\omega t} dt \right\} \end{aligned}$$

Luego, usando la identidad de ángulos suma para coseno y seno:

$$\text{Integral} = \frac{1}{T} \left\{ e^{-i\omega \frac{T}{2}} \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAu}{T} + 4kA - 6kA\right) e^{-i\omega u} du + \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAt}{T} - 2kA\right) e^{-i\omega t} dt \right\}$$

Finalmente, simplificando las integrales:

$$\text{Integral} = \frac{1}{T} \left\{ e^{-i\omega \frac{T}{2}} \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAu}{T} - 2kA\right) e^{-i\omega u} du + \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAt}{T} - 2kA\right) e^{-i\omega t} dt \right\}$$

Luego, sacando factor común la integral

$$\text{Integral} = \frac{1}{T} \left\{ (e^{-i\omega \frac{T}{2}} + 1) \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAu}{T} - 2kA\right) e^{-i\omega u} du \right\}$$

o lo que es lo mismo

$$\text{Integral} = \frac{2}{T} e^{-i\frac{T\omega}{4}} \cos\left(\omega \frac{T}{4}\right) \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{8kAu}{T} - 2kA\right) e^{-i\omega u} du$$

Haciendo un nuevo cambio de variables $v = u - T/4$, llegamos al **resultado parcial 1**:

$$\text{Integral} = \frac{2}{T} e^{-i\frac{T\omega}{4}} e^{-i\frac{T\omega}{4}} \cos\left(\omega \frac{T}{4}\right) \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{8kAv}{T}\right) e^{-i\omega v} dv$$

Resultado parcial 2

Queremos ahora resolver la siguiente integral

$$Integral2 = \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{8kAv}{T}\right) e^{-i\omega v} dv,$$

Expresamos coseno como combinación de exponentiales

$$\int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{8kAv}{T}\right) e^{-i\omega v} dv = \int_{-T/4}^{T/4} \frac{e^{i\frac{8kAv}{T}} + e^{-i\frac{8kAv}{T}}}{2} e^{-i\omega v} dv.$$

Esto se puede separar en dos integrales

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-T/4}^{T/4} e^{i(\frac{8kA}{T} - \omega)v} dv + \int_{-T/4}^{T/4} e^{-i(\frac{8kA}{T} + \omega)v} dv \right).$$

La primer integral:

$$\int_{-T/4}^{T/4} e^{i(\frac{8kA}{T} - \omega)v} dv.$$

Llamemos $\alpha = \frac{8kA}{T} - \omega$. Entonces:

$$= \int_{-T/4}^{T/4} e^{i\alpha v} dv = \left[\frac{e^{i\alpha v}}{i\alpha} \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{e^{i\alpha \cdot \frac{T}{4}} - e^{-i\alpha \cdot \frac{T}{4}}}{i\alpha} = \frac{2i \sin\left(\alpha \cdot \frac{T}{4}\right)}{i\alpha} = \frac{2 \sin\left(\alpha \cdot \frac{T}{4}\right)}{\alpha}.$$

Entonces

$$\frac{2 \sin\left(\left(\frac{8kA}{T} - \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right)}{\frac{8kA}{T} - \omega}.$$

La segunda integral

Usando el mismo truco del cambio de variables

$$\int_{-T/4}^{T/4} e^{-i(\frac{8kA}{T} + \omega)v} dv = \frac{2 \sin\left(\left(\frac{8kA}{T} + \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right)}{\frac{8kA}{T} + \omega}.$$

Combinando los resultados se obtiene

$$\int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{8kAv}{T}\right) e^{-i\omega v} dv = \frac{\sin\left(\left(\frac{8kA}{T} - \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right)}{\frac{8kA}{T} - \omega} + \frac{\sin\left(\left(\frac{8kA}{T} + \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right)}{\frac{8kA}{T} + \omega}.$$

$$\int_{-T/4}^{T/4} \cos\left(\frac{8kAv}{T}\right) e^{-i\omega v} dv = \frac{T}{4} \text{sinc}\left(\left(\frac{8kA}{T} - \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right) + \frac{T}{4} \text{sinc}\left(\left(\frac{8kA}{T} + \omega\right) \cdot \frac{T}{4}\right)$$