Estudio del caos en el goteo de una canilla

Francisco Aguirre, Diego Arroyo, Tomás Gold

Laboratorio 4B - Departamento de Física, FCEyN, UBA - 2025

¿Cómo gotea una canilla?

“Una queja común entre quienes sufren de **insomnio** es una **canilla que gotea**. No importa que tan fuerte se cierre la llave, el agua logra filtrarse, y el **sonido constante y regular** de las gotas al caer suele ser lo suficientemente fuerte como para impedir el sueño. Cuanto **mayor es la fuga**, el **golpeteo** de las gotas se vuelve más **rápido e irregular**.” – *Robert Shaw* (1984)

Robert Shaw, *The Dripping Faucet as a Model Chaotic System* (1984).

¿Por qué estudiamos este problema?

$$\text{Sistema físico} \xrightarrow{\text{Modelo}} \boxed{\textbf{Ecuaciones diferenciales}}$$

¿Por qué estudiamos este problema?

Sistema físico $\xrightarrow{\text{Modelo}}$ **Ecuaciones diferenciales** → Lineales

- Analíticamente **tratables**
- **Ej:** Circuito RC, osc. armónico

¿Por qué estudiamos este problema?

Sistema físico $\xrightarrow{\text{Modelo}}$ **Ecuaciones diferenciales**

- **Lineales**
  - Analíticamente **tratables**
  - **Ej:** Circuito RC, osc. armónico
- **No lineales**
  - Comportamientos **no triviales**
  - **Ej:** reacciones químicas, atmósfera, cantos de aves

Imagen: Laboratorio de Sistemas Dinámicos, Depto. de Física, FCEN-UBA

¿Por qué estudiamos este problema?

Sistema físico $\xrightarrow{\text{Modelo}}$ **Ecuaciones diferenciales**

- Lineales
  - Analíticamente **tratables**
  - **Ej:** Circuito RC, osc. armónico
- No lineales
  - Comportamientos **no triviales**
  - **Ej:** reacciones químicas, atmósfera, cantos de aves

Goteo de una canilla

↓

Típico comportamiento
no lineal

Imagen: Laboratorio de Sistemas Dinámicos, Depto. de Física, FCEN-UBA

¿Por qué estudiamos este problema?

Sistema físico $\xrightarrow{\text{Modelo}}$ **Ecuaciones diferenciales**

- **Lineales**
  - Analíticamente **tratables**
  - **Ej:** Circuito RC, osc. armónico
- **No lineales**
  - Comportamientos **no triviales**
  - **Ej:** reacciones químicas, atmósfera, cantos de aves

Goteo de una canilla

↓

Típico comportamiento
no lineal

↓

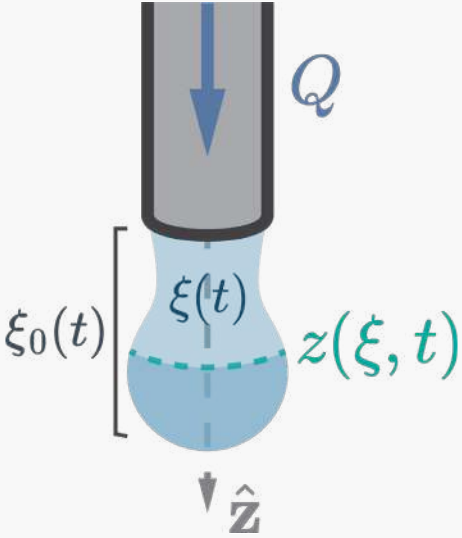
Modelo de referencia para
sistemas **no lineales**

Imagen: Laboratorio de Sistemas Dinámicos, Depto. de Física, FCEN-UBA

Modelo Físico del problema

Modelo Físico del problema

Modelo hidrodinámico completo

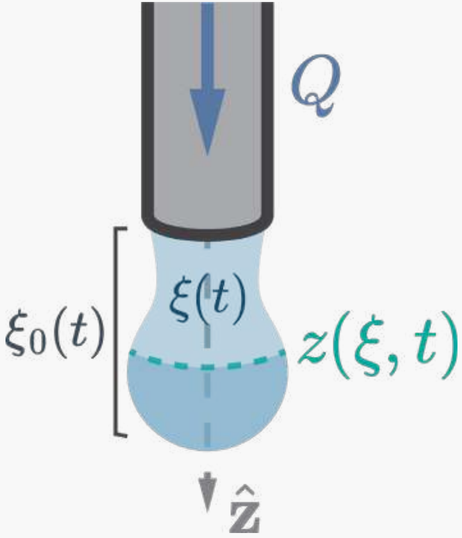


$$\frac{d\xi_0(t)}{dt} = Q \quad \boxed{cte}$$

$\xi_0(t)$: volumen total de la gota
Q : flujo de agua

Modelo Físico del problema

Modelo hidrodinámico completo



$$\frac{d\xi_0(t)}{dt} = Q \ \boxed{cte}$$

$\xi_0(t)$: volumen total de la gota
Q : flujo de agua

Descripción lagrangiana

El **lagrangiano** resulta: $\mathcal{L} = E_{\text{kin}} \underbrace{- U_g - U_s}_{}$

Energía **gravitatoria** y de **tensión superficial**

Las ecuaciones de **Euler-Lagrange** se pueden resolver numéricamente para cada elemento del fluido

Ref.: Fuchikami, N., Ishioka, S., & Kiyono, K. *Simulation of a dripping faucet* (1999).

Modelo reducido

En las soluciones numéricas se encuentran dos “**modos**” **dominantes**, a partir de las cuales se definen nuevas **variables de estado**:

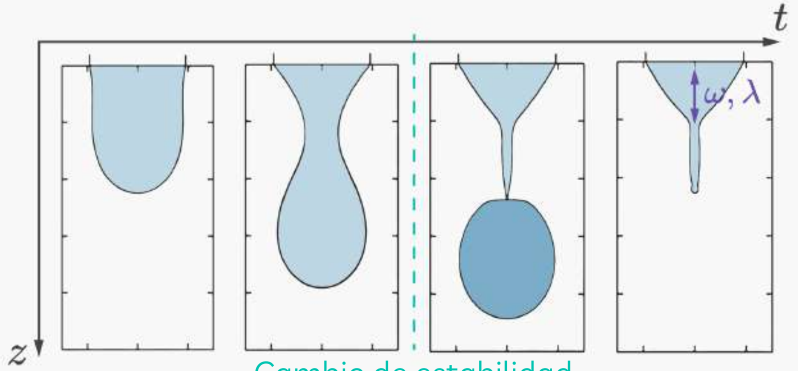
Modelo reducido

En las soluciones numéricas se encuentran dos “**modos**” **dominantes**, a partir de las cuales se definen nuevas **variables de estado**:

$\begin{cases} Z(t) \\ U(t) = X(t) + iY(t) \end{cases}$

$Z(t)$ Modo **saddle-node** ↔ **cambio de estabilidad** en la superficie de la gota

$U(t) = X(t) + iY(t)$ Modo **oscilatorio amortiguado** ↔ **oscilación** de la gota residual

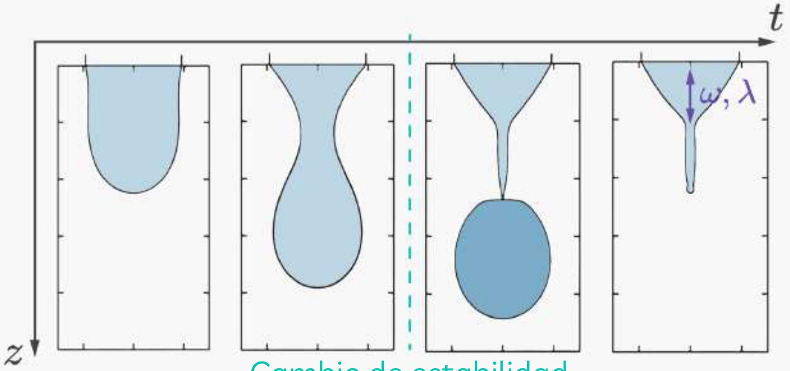


Cambio de estabilidad

Modelo reducido

En las soluciones numéricas se encuentran dos "**modos**" **dominantes**, a partir de las cuales se definen nuevas **variables de estado**:

$$\begin{cases} Z(t) & \text{Modo \textbf{saddle-node}} \quad \leftrightarrow \quad \textbf{cambio de estabilidad} \text{ en la superficie de la gota} \\ U(t) = X(t) + iY(t) & \text{Modo \textbf{oscilatorio amortiguado}} \quad \leftrightarrow \quad \textbf{oscilación} \text{ de la gota residual} \end{cases}$$



Cambio de estabilidad

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{U} = (i\omega - \lambda)U \\ \dot{Z} = Q + Z^2 \end{cases}$$

¿Cómo se relacionan (X, Y, Z) con las magnitudes físicas?

¿Cómo se relacionan (X, Y, Z) con las magnitudes físicas?

Evolución del **sistema** de goteo ≡ evolución de los **tiempos entre gotas** consecutivas (t_n)

⟶ **Mapa de retorno** $\boxed{t_{n+1} = f(t_n)}$ para un dado flujo Q

¿Cómo se relacionan (X, Y, Z) con las magnitudes físicas?

Evolución del **sistema** de goteo $\equiv$ evolución de los **tiempos entre gotas** consecutivas (t_n)

$\longrightarrow$ **Mapa de retorno** $\boxed{t_{n+1} = f(t_n)}$ para un dado flujo Q

$$\Rightarrow \begin{cases} t_n = \left(\arctan(\frac{B}{\sqrt{Q}}) - \arctan(\frac{Z_n}{\sqrt{Q}})\right) \frac{F}{\sqrt{Q}} \\ X_{n+1} = (X_n \cos \omega t_n - A \sin \omega t_n) e^{-\lambda t_n} \\ Z_{n+1} = (X_n \cos \omega t_n + A \sin \omega t_n) e^{-\lambda t_n} \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones recursivas acopladas para el **mapa de retorno**

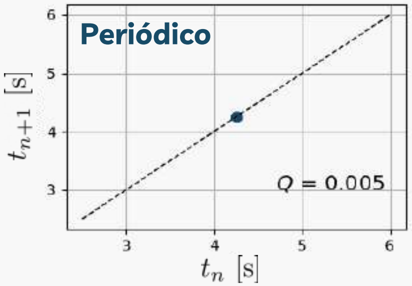
¿Cómo se relacionan (X, Y, Z) con las magnitudes físicas?

Evolución del **sistema** de goteo ≡ evolución de los **tiempos entre gotas** consecutivas (t_n)

⟶ **Mapa de retorno** $\boxed{t_{n+1} = f(t_n)}$ para un dado flujo Q

$$\Rightarrow \begin{cases} t_n = \left(\arctan\left(\frac{B}{\sqrt{Q}}\right) - \arctan\left(\frac{Z_n}{\sqrt{Q}}\right)\right) \frac{F}{\sqrt{Q}} \\ X_{n+1} = (X_n \cos \omega t_n - A \sin \omega t_n) e^{-\lambda t_n} \\ Z_{n+1} = (X_n \cos \omega t_n + A \sin \omega t_n) e^{-\lambda t_n} \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones recursivas acopladas para el **mapa de retorno**



Q

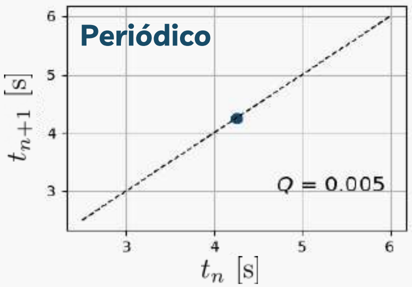
¿Cómo se relacionan (X, Y, Z) con las magnitudes físicas?

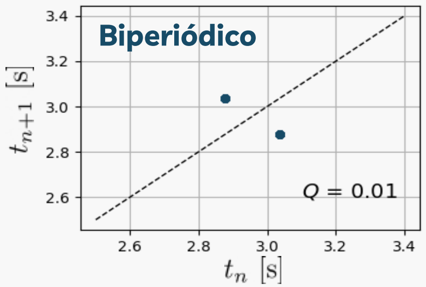
Evolución del **sistema** de goteo ≡ evolución de los **tiempos entre gotas** consecutivas (t_n)

→ **Mapa de retorno** $\boxed{t_{n+1} = f(t_n)}$ para un dado flujo Q

$$\Rightarrow \begin{cases} t_n = \left(\arctan\left(\frac{B}{\sqrt{Q}}\right) - \arctan\left(\frac{Z_n}{\sqrt{Q}}\right)\right) \frac{F}{\sqrt{Q}} \\ X_{n+1} = (X_n \cos \omega t_n - A \sin \omega t_n) e^{-\lambda t_n} \\ Z_{n+1} = (X_n \cos \omega t_n + A \sin \omega t_n) e^{-\lambda t_n} \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones recursivas acopladas para el **mapa de retorno**





Q

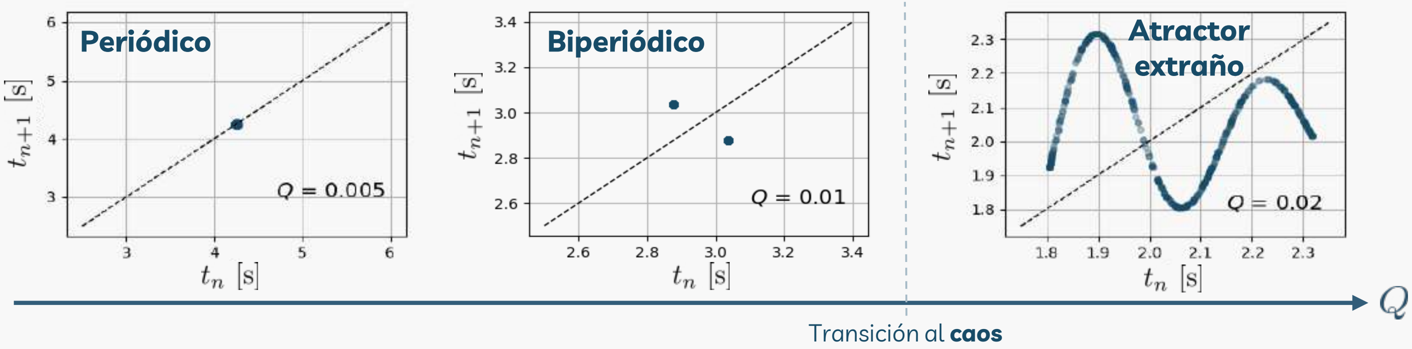
¿Cómo se relacionan (X, Y, Z) con las magnitudes físicas?

Evolución del **sistema** de goteo ≡ evolución de los **tiempos entre gotas** consecutivas (t_n)

⟶ **Mapa de retorno** $\boxed{t_{n+1} = f(t_n)}$ para un dado flujo Q

$$\Rightarrow \begin{cases} t_n = \left(\arctan\left(\frac{B}{\sqrt{Q}}\right) - \arctan\left(\frac{Z_n}{\sqrt{Q}}\right)\right) \frac{F}{\sqrt{Q}} \\ X_{n+1} = (X_n \cos \omega t_n - A \sin \omega t_n) e^{-\lambda t_n} \\ Z_{n+1} = (X_n \cos \omega t_n + A \sin \omega t_n) e^{-\lambda t_n} \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones recursivas acopladas para el **mapa de retorno**



¿Cómo armar un dispositivo experimental adecuado?

Necesitamos principalmente:

¿Cómo armar un dispositivo experimental adecuado?

Necesitamos principalmente:

(A)

Flujo de agua **constante** en el tiempo, **regulable** en intensidad

¿Cómo armar un dispositivo experimental adecuado?

Necesitamos principalmente:

(A)
Flujo de agua **constante** en el tiempo, **regulable** en intensidad

(B)
Detectar una a una las **gotas** que caen

(A) Generación de flujo constante

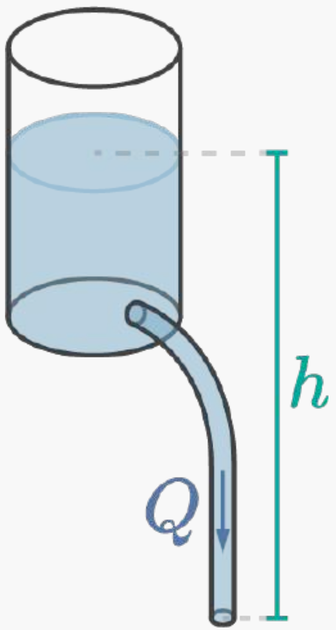
Definición de flujo

+

Ley de Torricelli

(cons. de la energía)

$$\boxed{Q = A \cdot v \propto \sqrt{h}}$$



(A) Generación de flujo constante

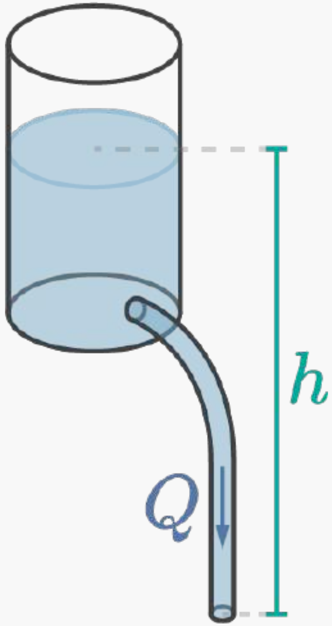
Definición de flujo

+

Ley de Torricelli

(cons. de la energía)

$$\boxed{Q = A \cdot v \propto \sqrt{h}}$$



Pero h disminuye porque se vacía el recipiente. **SOLUCIÓN:**

(A) Generación de flujo constante

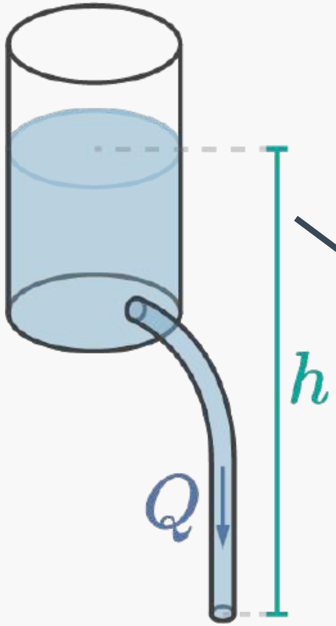
Definición de flujo

+

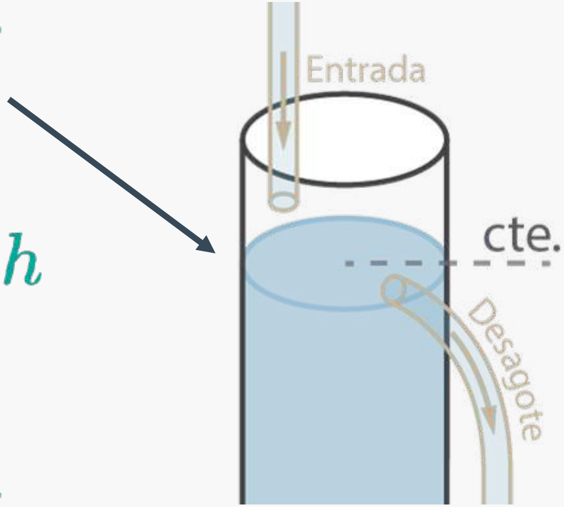
Ley de Torricelli

(cons. de la energía)

$$\boxed{Q = A \cdot v \propto \sqrt{h}}$$



Pero h disminuye porque se vacía el recipiente. **SOLUCIÓN:**

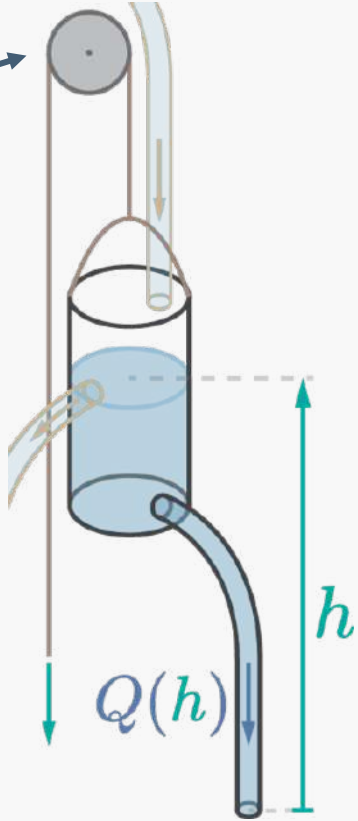


(A) Regulación de flujo

$$\boxed{Q \propto \sqrt{h}}$$

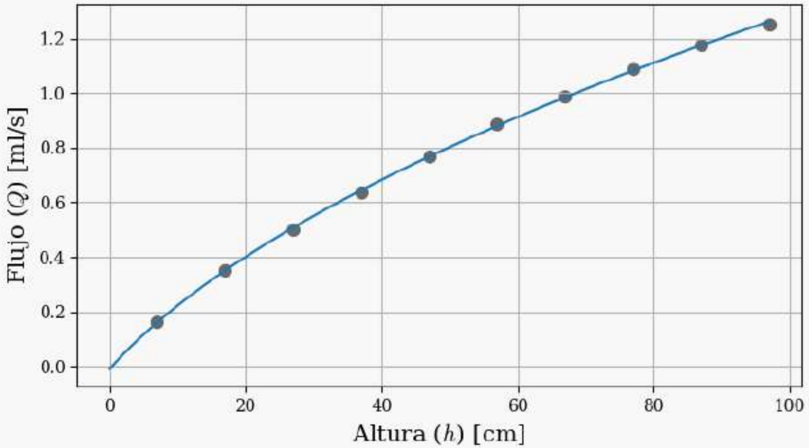
(A) Regulación de flujo

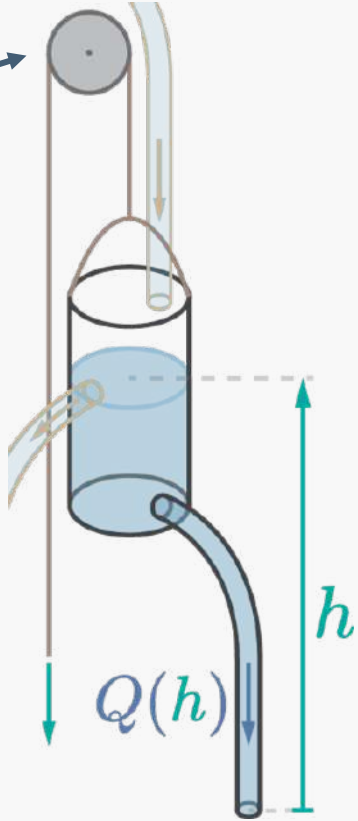
$$\boxed{Q \propto \sqrt{h}}$$



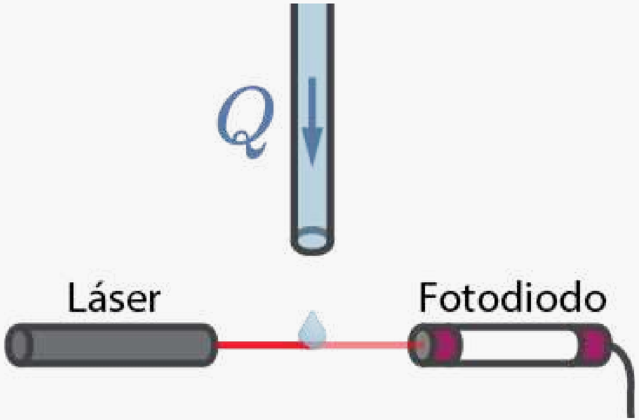
(A) Regulación de flujo

$$\boxed{Q \propto \sqrt{h}}$$

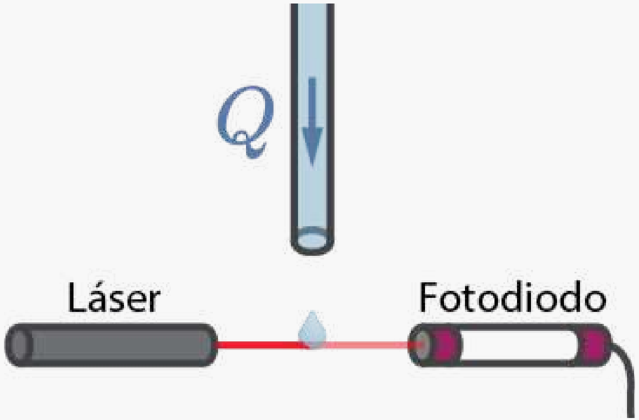


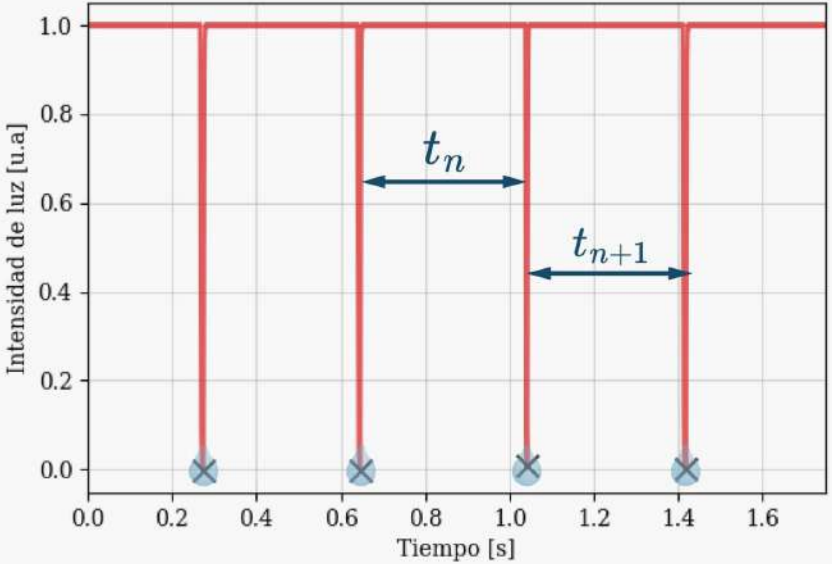


(B) Detección de gotas

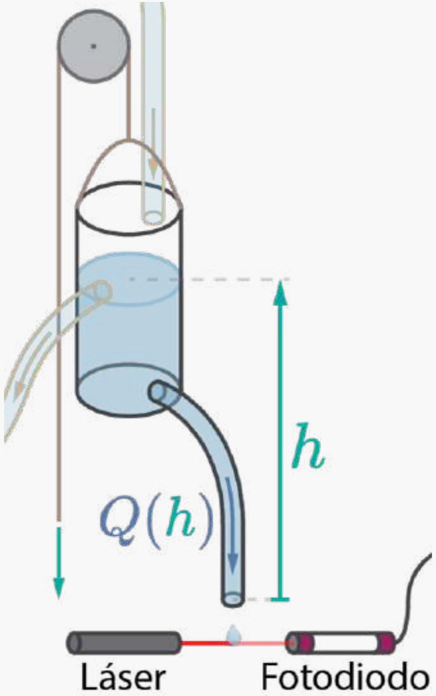


(B) Detección de gotas

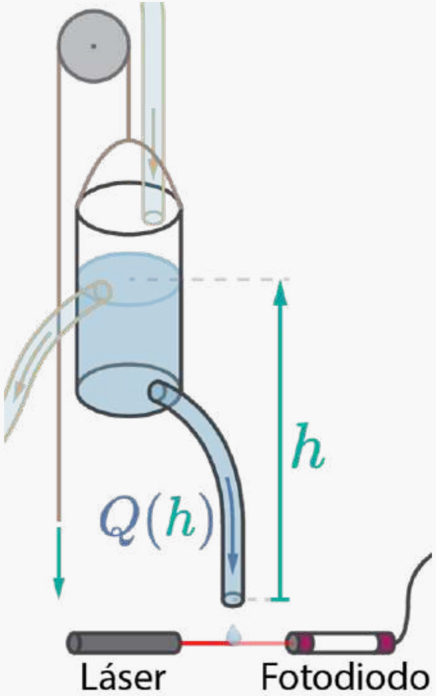




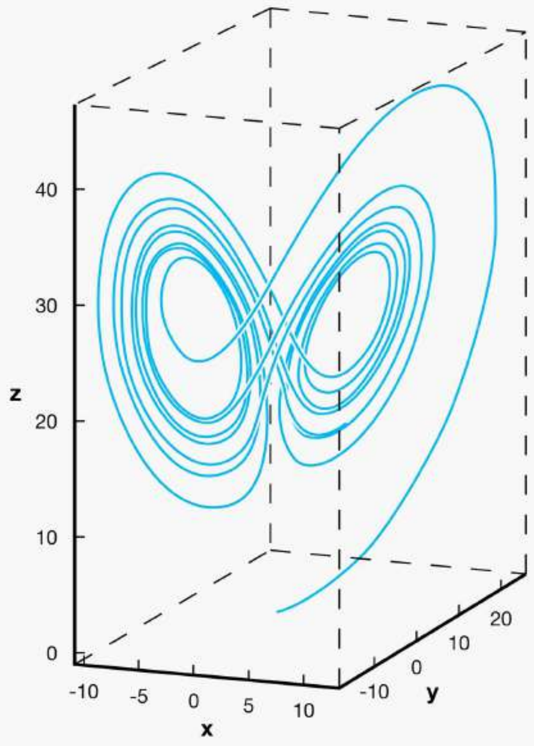
Dispositivo completo y mediciones



Dispositivo completo y mediciones

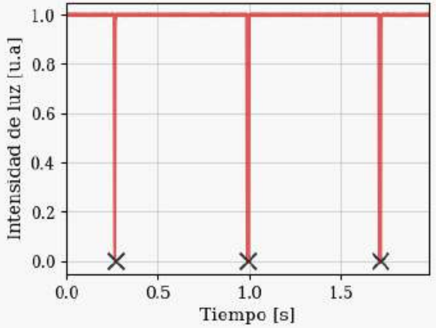


$$\text{Incrementar } h \rightarrow \text{Detectar series de gotas} \rightarrow \text{Incrementar } h$$

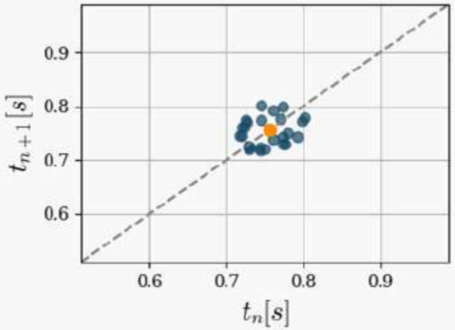


Resultados y análisis

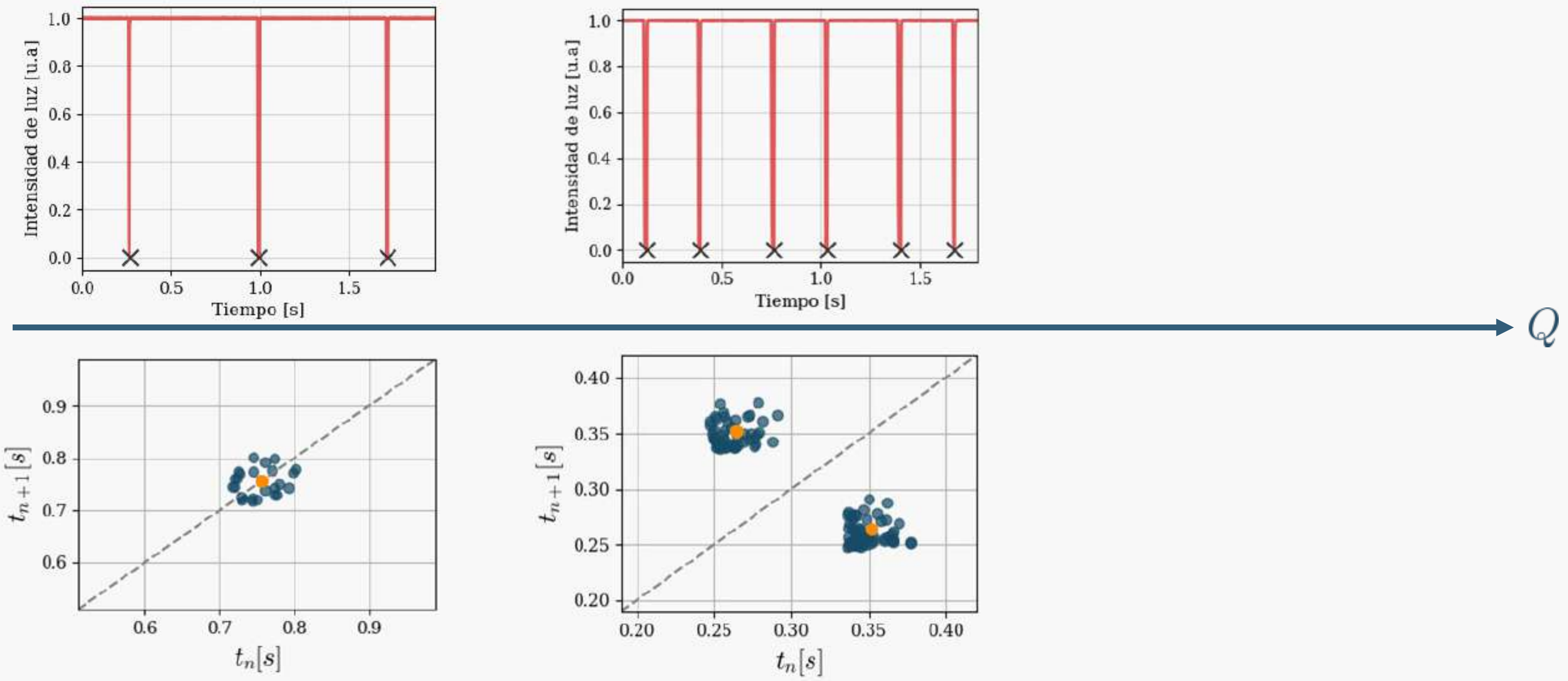
Períodos entre gotas



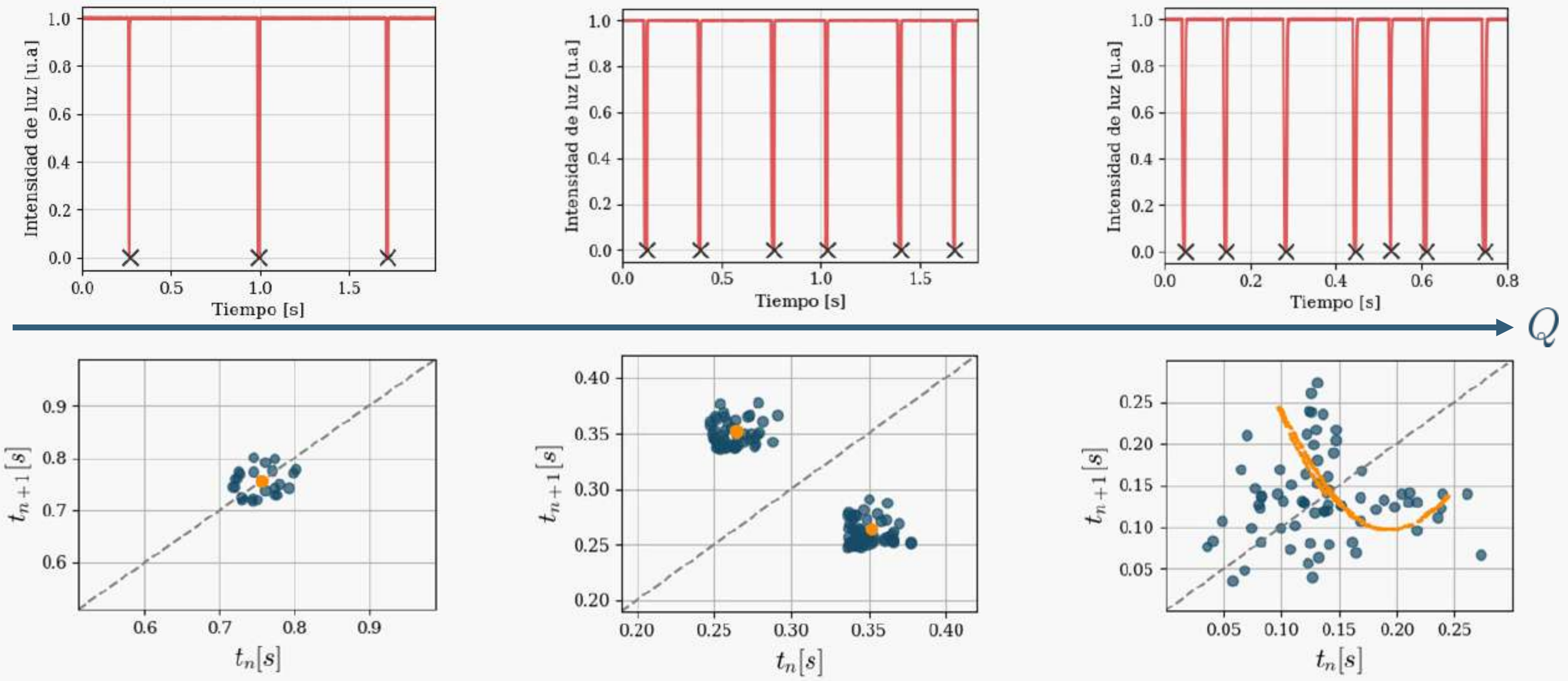
Q



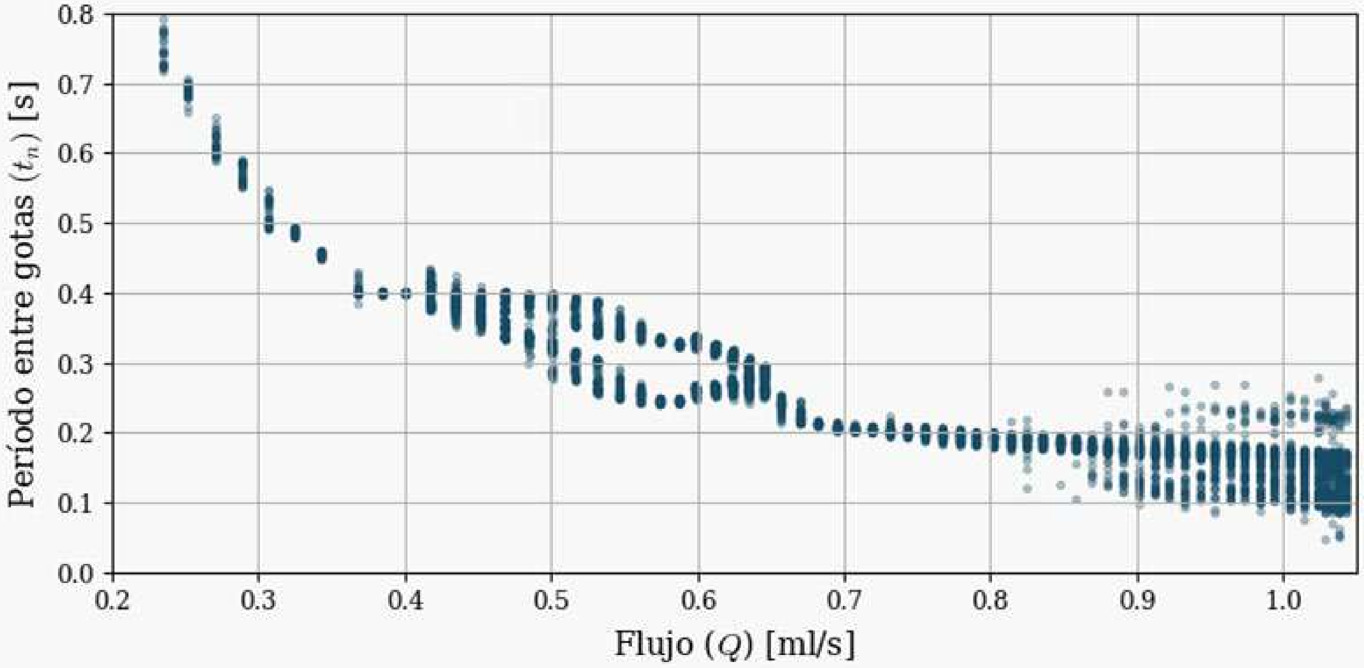
Períodos entre gotas



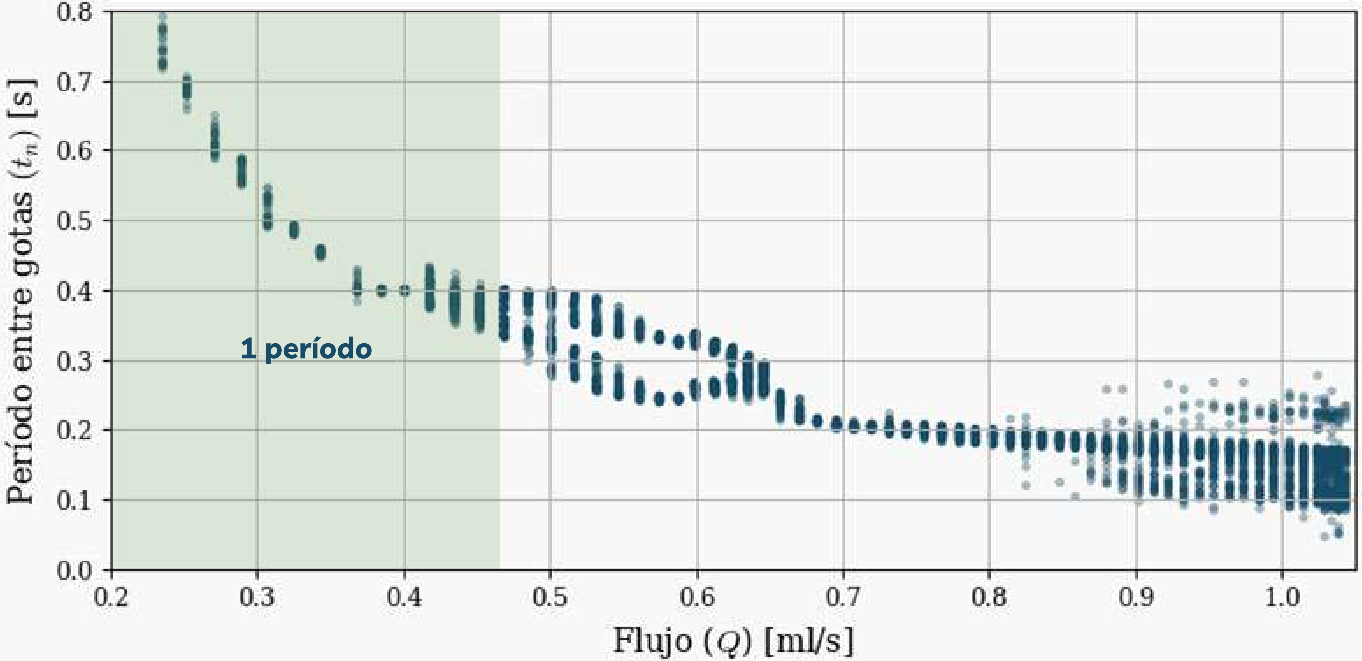
Períodos entre gotas



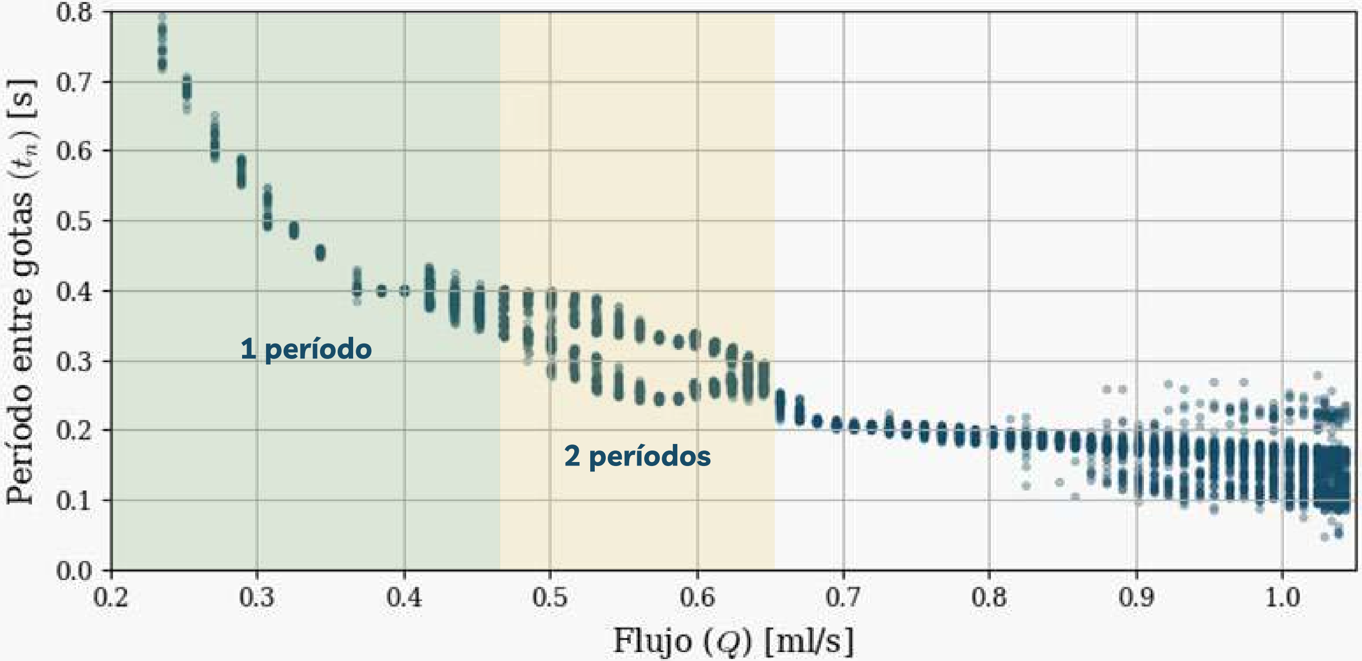
Períodos entre gotas



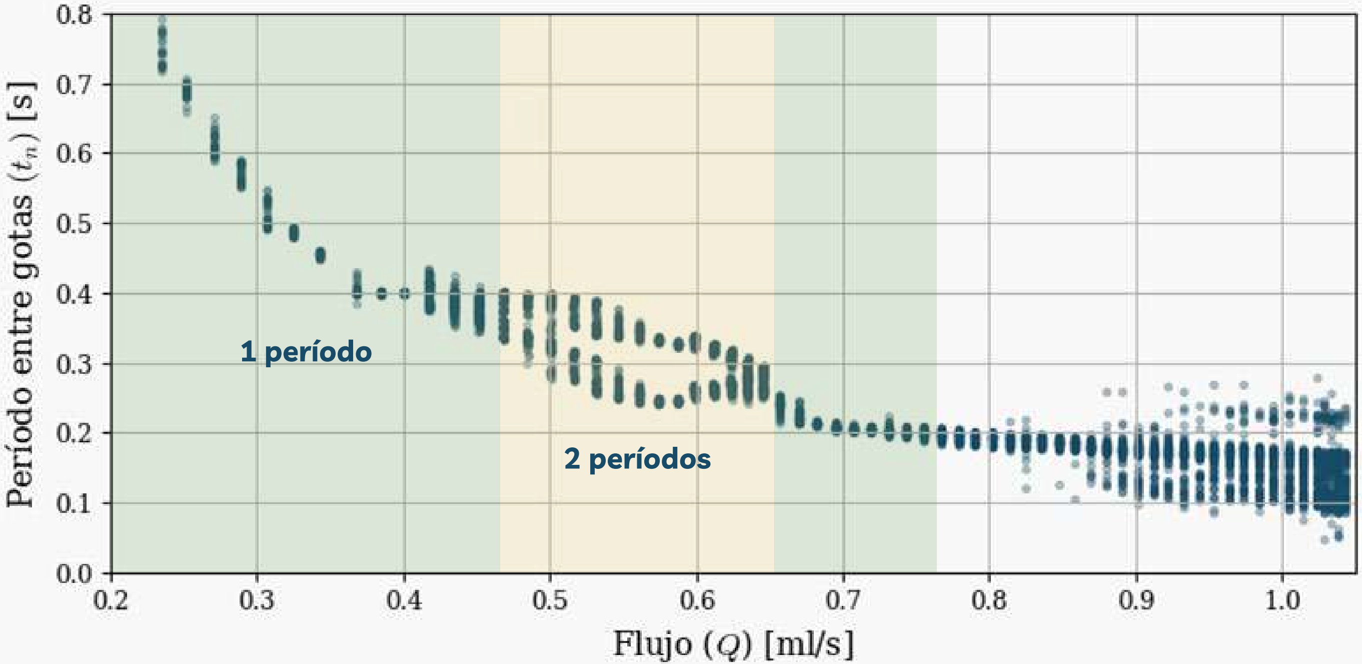
Períodos entre gotas



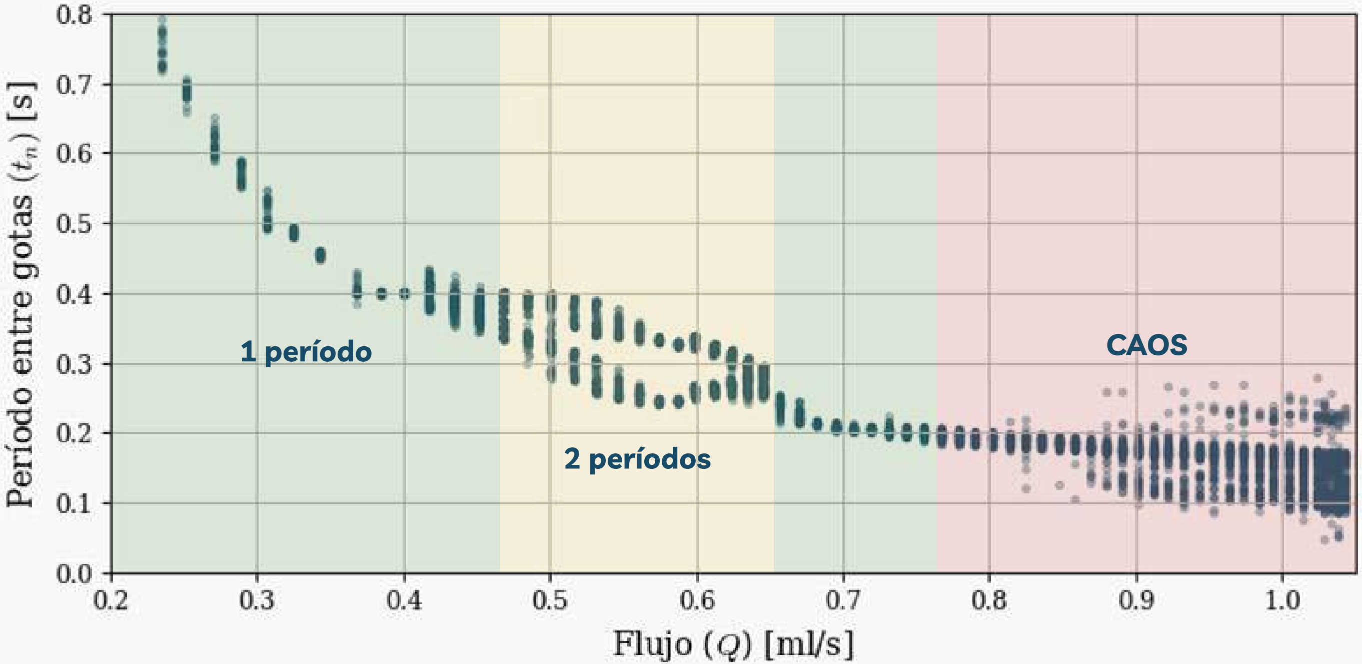
Períodos entre gotas



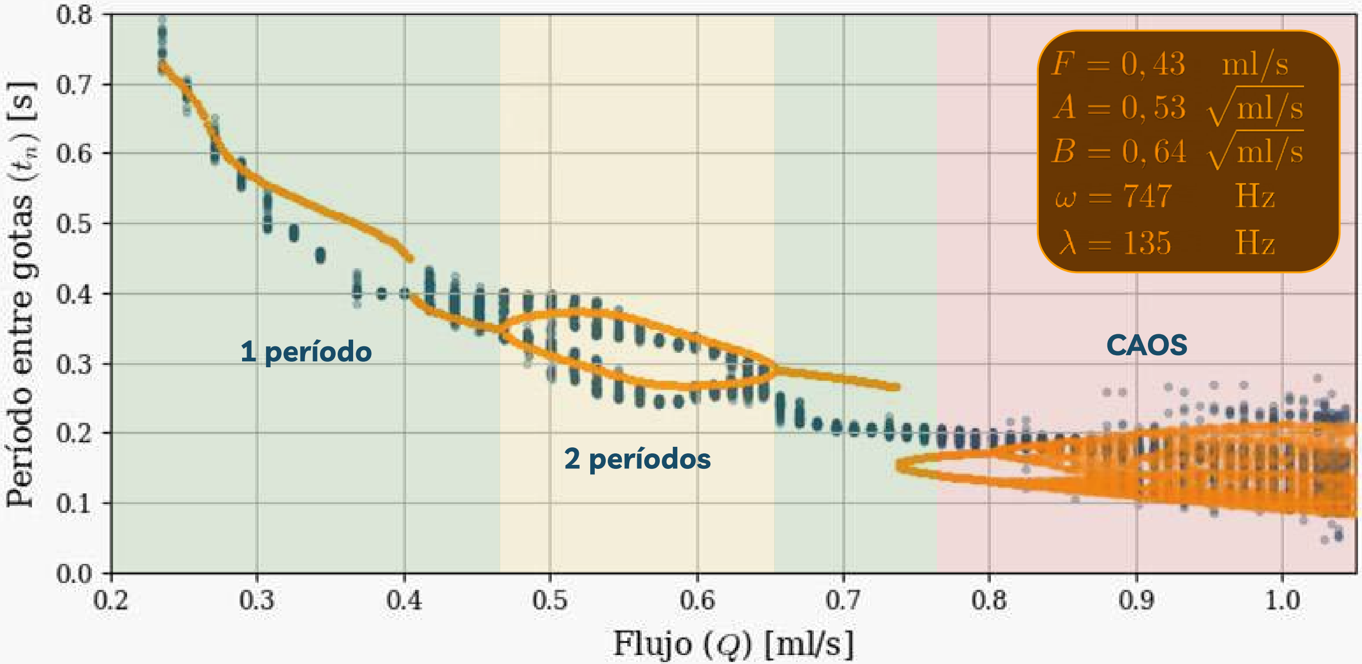
Períodos entre gotas



Períodos entre gotas



Períodos entre gotas



Entropía del sistema

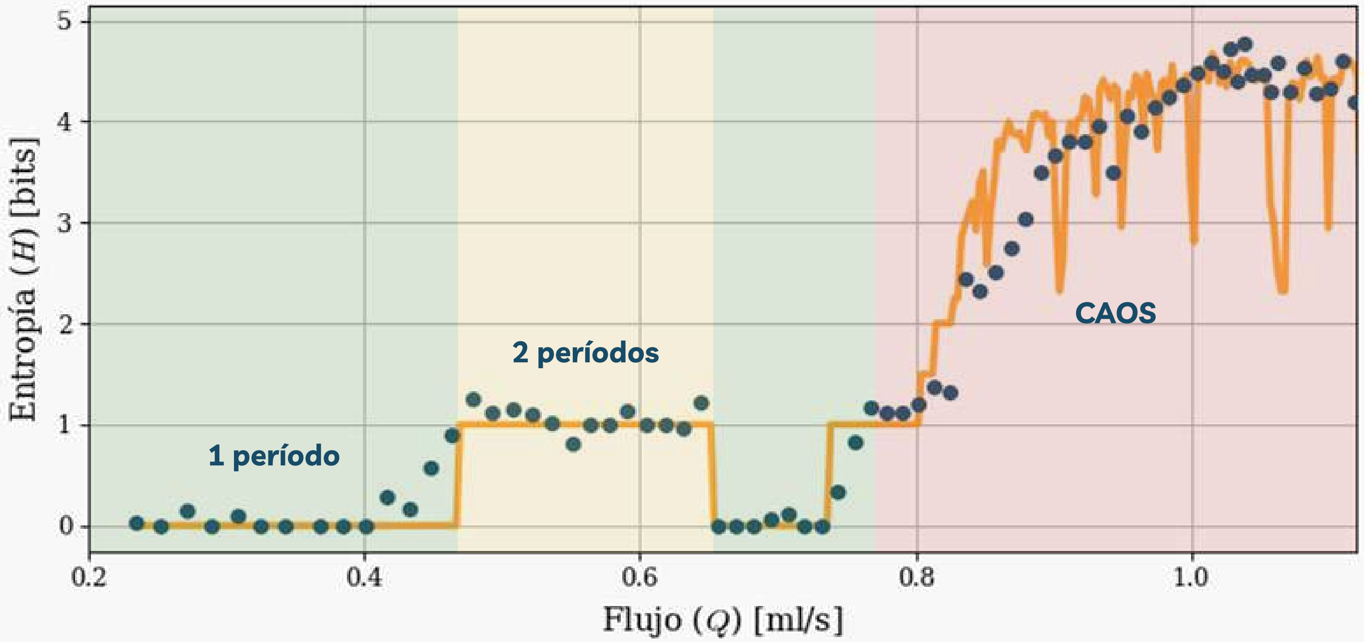
$$H = -\sum_{n=1}^{N} P(t_n) \log_2(P(t_n))$$

probabilidad de un t_n

Entropía del sistema

$$H = -\sum_{n=1}^{N} P(t_n) \log_2(P(t_n))$$

probabilidad de un t_n



Conclusiones

Conclusiones

Se logró construir un **dispositivo experimental** capaz de **generar y detectar gotas** individuales con **control sobre el flujo**

Conclusiones

Se logró construir un **dispositivo experimental** capaz de **generar y detectar gotas** individuales con **control sobre el flujo**

Se observaron regímenes **periódicos, biperiódicos y caóticos** en función del flujo de agua, en concordancia con lo esperado para **sistemas no lineales**

El **modelo teórico capturó los comportamientos** medidos

Conclusiones

Se logró construir un **dispositivo experimental** capaz de **generar y detectar gotas** individuales con **control sobre el flujo**

Se observaron regímenes **periódicos, biperiódicos y caóticos** en función del flujo de agua, en concordancia con lo esperado para **sistemas no lineales**

El **modelo teórico capturó los comportamientos** medidos

El sistema demostró ser un **ejemplo accesible** para explorar herramientas de **análisis de la dinámica no lineal**

Gracias.

¿Preguntas?

CONTACTO:

fran.aguirre.ramos24@gmail.com
diegoarroyo.uba@gmail.com
tomasgold.uba@gmail.com