Mecánica Clásica - 2c 2025
Máximo Coppola

Sobre los vínculos

Me gustaría hacer una breve aclaración sobre un error que suele aparecer en los parciales. En general en la práctica vamos a tratar con vínculos holónomos y no nos van a interesar las fuerzas de vínculo. Lo que digo a continuación vale para ese caso.

Si tenemos m vínculos holónomos, el número de grados de libertad es $n = 3N - m$, y usamos n coordenadas generalizadas $\{q_1, ..., q_n\}$ para describirlos. Vimos que a partir del principio de D'Alembert uno llegaba a la siguiente expresión

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \right] \delta q_k \;=\; 0 \tag{1}$$

si las fuerzas generalizadas Q_k provienen de fuerzas conservativas. Para derivar las ecuaciones de E-L, es clave utilizar aquí que los q_k son ***independientes***. En ese caso, lo que está dentro del corchete se anula para cada k.

Un error común en esta materia es *no* imponer los vínculos en el Lagrangiano. Eso es un problema porque cada Lagrangiano describe un sistema distinto; si no imponen vínculos van a estar estudiando otro problema físico. Por ejemplo para una masa enganchada a una barra que gira con $\dot{\theta} = \omega$ constante, estaría mal escribir el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) \;=\; \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(\theta) \tag{2}$$

¿Por qué estaría mal? Porque así escrito $\mathcal{L}$ depende de dos coordenadas, $\{q_1, q_2\} = \{r, \theta\}$: habría dos ecuaciones de E-L. Pero ese conjunto de ecuaciones no describe una masa que rota con velocidad angular constante, sino una que gira libremente. Podríamos, desesperadamente, imponer el vínculo en las ecuaciones de E-L... pueden chequear que lo que queda es inconsistente.

La inconsistencia radica en decir que el corchete en la ecuación (1) se anula, siendo que los q_k no son independientes. Para que lo sean, debemos imponer los vínculos en $\mathcal{L}$. En este ejemplo, $\theta = \omega t$ y el Lagrangiano correcto sería

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, t) \;=\; \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) - V(\theta = \omega t) \tag{3}$$

Otro error común suele ser meter la información de una ecuación de E-L en el Lagrangiano. Y luego, partiendo del Lagrangiano modificado, volver a hallar las ecuaciones de E-L (modificadas): es un círculo vicioso. Nuevamente: si cambiamos el Lagrangiano, cambiamos el sistema físico que estamos discutiendo. Prueben con el siguiente ejemplo: en un potencial central

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) \;=\; \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \tag{4}$$

θ es cíclica y se conserva el momento angular. Reemplazando ℓ en la ecuación de r nos queda

$$\begin{cases} \ell = mr^2\dot{\theta} \\ m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - V'(r) = +\dfrac{\ell^2}{mr^3} - V'(r) \end{cases} \tag{5}$$

En cambio si reemplazamos la conservación de ℓ en el lagrangiano

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) \;=\; \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - V(r) \;\Rightarrow\; m\ddot{r} = -\frac{\ell^2}{mr^3} - V'(r) \tag{6}$$

El signo de diferencia es altamente nocivo y modifica completamente la trayectoria.

Traten de imaginar una línea que divide al Lagrangiano de las ecuaciones de E-L. El Lagrangiano estaría en un nivel teórico, más abstracto; allí solo imponemos vínculos. Las ecuaciones estarían en un nivel práctico; podemos combinarlas, reemplazar la info de una en otra, etc.

Plano Teórico - Lagrangiano $\quad \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T - V$

Plano Práctico - Ecuaciones E-L $\quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$

Sobre las coordenadas cíclicas

Si el Lagrangiano no depende de alguna coordenada (por ejemplo ξ), se dice que la coordenada ξ es *cíclica*. En ese caso, de las ecuaciones de E-L existe una cantidad conservada asociada p_ξ, denominada como el *momento conjugado de* ξ

$$Si \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\xi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = cte \tag{7}$$

Ejercicio 19

Tenemos una carga ($q > 0$) en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$. En la teórica vieron que, como la fuerza magnética depende de la velocidad, el potencial también. Sin embargo las ecuaciones de E-L se mantienen si las fuerzas se pueden escribir en función de un potencial de la siguiente forma

$$F_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{8}$$

En particular, la fuerza de Lorentz cumple esta relación, donde

$$\mathbf{F}_L = q\,\mathbf{E} + q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \qquad \mathbf{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \tag{9}$$

El potencial es

$$U = q\phi - q\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \tag{10}$$

Muestren ustedes que de este potencial se llega a la fuerza de Lorentz usando E-L (ej. 15).

Invariance de gauge: los potenciales (de gauge) $(\phi, \boldsymbol{A})$ que describen los campos electromagnéticos no son únicos. Los campos $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ (y por lo tanto las ecuaciones de Maxwell) son invariantes ante una *transformación de gauge*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \;&\to\; \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \vec{\nabla}\psi \\ \phi \;&\to\; \phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned} \tag{11}$$

Piensen el potencial gravitatorio; $\boldsymbol{F}_g = -\boldsymbol{\nabla} V_g$ por lo que toda la familia de potenciales $V'_g = V_g + cte$ describe la misma fuerza. $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + cte$ y las ecs de E-L son las mismas.

Antes de ir al Lagrangiano, ¿recuerdan de Física 3 que movimiento hacía una partícula cargada en un $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$?
Spolier*: Ciclotrón. Da círculos en el plano perpendicular a $\mathbf{B}$. La fuerza $\mathbf{F}_B = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{B}$; es radial, como la tensión en una masa atada a una cuerda. Pueden guiarse por la fig. 1.

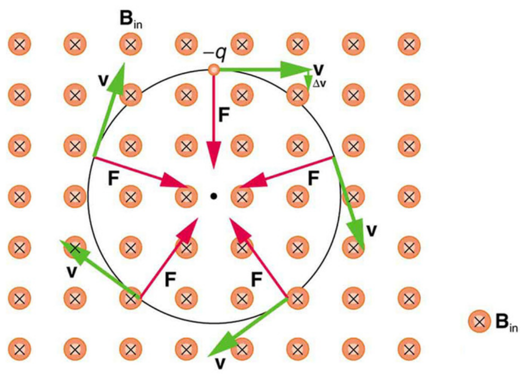

Figura 1: Movimiento circular horario para una partícula con carga negativa en un campo uniforme que apunta hacia abajo (por eso las cruces).

a) Gauge de Landau

El potencial vector es $\mathbf{A}^L = B_0 x\hat{y}$. Como $\phi = 0$ (porque $\mathbf{E} = 0$)

$$\boxed{\mathcal{L}^L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + qB_0 x\dot{y}} \tag{12}$$

Un comentario al margen pero útil. Dijimos que los momentos *canónicos* conjugados de las partículas se definen como

$$P_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} \tag{13}$$

para el caso general. Veremos más sobre momentos conjugados en la guía 6. En presencia de campos magnéticos, el momento mecánico usual $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ se generaliza al momento canónico $\mathbf{P}$ debido a la presencia de fuerzas magnéticas. Notar que $\mathbf{P}$ es dependiente del gauge elegido (depende de $\mathbf{A}$). En el gauge de Landau

$$P_z^L = m\dot{z}\,, \qquad P_x^L = m\dot{x}\,, \qquad P_y^L = m\dot{y} + qB_0 x \tag{14}$$

Continuando, vemos que $\mathcal{L}^L$ es cíclico en y y en z, por lo que las ecuaciones de E-L nos dan

$$\begin{aligned}
&z) \qquad m\dot{z} = P_z^L = m\dot{z}_0 \;\Rightarrow\; z(t) = z_0 + \dot{z}_0\, t \\
&y) \qquad m\dot{y} + qB_0\, x = P_y^L = cte \\
&x) \qquad m\ddot{x} - qB_0\, \dot{y} = 0 = \frac{d}{dt}(m\dot{x} - qB_0\, y) \;\Rightarrow\; \tilde{P}_x = m\dot{x} - qB_0\, y = cte
\end{aligned} \tag{15}$$

En el gauge de Landau aparecen dos constantes de movimiento *triviales* (las coordinadas son cíclicas) P_y^L y P_z^L, junto con una cantidad $\tilde{P}_x$ que se dedujo de las ecuaciones de movimiento.

Para hallar las soluciones resulta más fácil reemplazar la ecuación y) de E-L en la ecuación x). Vamos a llegar a la ecuación del oscilador con frecuencia $\omega = qB_0/m$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2(x - \bar{x}) & \Rightarrow \; x(t) = \quad R\cos(\omega\, t + \phi) + \bar{x} \\ y = \dfrac{m\dot{x} - \tilde{P}_x}{m\omega} & \Rightarrow \; y(t) = -R\sin(\omega\, t + \phi) + \bar{y} \end{cases}, \qquad \bar{x} = \frac{P_y^L}{m\omega}, \quad \bar{y} = -\frac{\tilde{P}_x}{m\omega} \tag{16}$$

La trayectoria viene dada entonces por una helicoidal (círculo que sube: rotación en el plano xy más traslación en z) según la fig. 2. La frecuencia del giro es ω, el centro de la órbita se encuentra en $\bar{\mathbf{R}} = (\bar{x}, \bar{y})$ y el radio desde la órbita viene dado por $R^2 = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2$.

Aprovechando estas expresiones nos vamos al inciso b). Si $\mathbf{v}(0) = 0$ entonces la partícula se queda quieta ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$) porque la fuerza magnética dependiente de la velocidad se anula, $\mathbf{F}_B = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$.

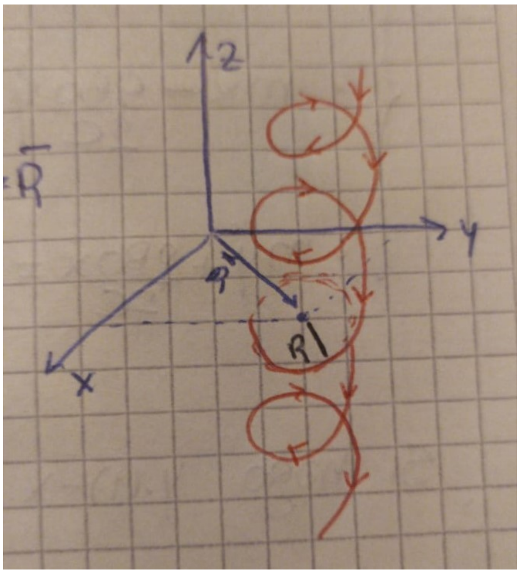

Figura 2: Trayectoria helicoidal de una partícula con carga positiva en un campo $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$.

b) Gauge Simétrico

Ahora usamos $\mathbf{A}^S = (\mathbf{B}\times\mathbf{r})/2 = B_0(x\hat{y} - y\hat{x})/2$. El lagrangiano queda ($\phi = 0$)

$$\boxed{\mathcal{L}^S = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qB_0}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})} \tag{17}$$

Los momentos canónicos son distintos en este gauge

$$P_z^S = m\dot{z}\,, \qquad P_x^S = m\dot{x} - \frac{qB_0}{2}\,y\,, \qquad P_y^S = m\dot{y} + \frac{qB_0}{2}\,x \tag{18}$$

Las ecuaciones de E-L nos dan (solo z es cíclica)

$$\begin{aligned}
&x) \qquad m\ddot{x} - qB_0\dot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{x} - qB_0\,y = \tilde{P}_x = cte\\
&y) \qquad m\ddot{y} + qB_0\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{y} + qB_0\,x = \tilde{P}_y = cte\\
&z) \qquad m\dot{z} = P_z^S = m\dot{z}_0 \quad \Rightarrow \quad z(t) = z_0 + \dot{z}_0\,t
\end{aligned} \tag{19}$$

Pueden chequear que las soluciones son las mismas que en el caso anterior, dadas en la eq. (16). Las cantidades conservadas $\tilde{P}_x$, $\tilde{P}_y = P_y^L$, y $P_z^S = P_z^L$ también son las mismas que antes. La física es la misma, no importa en que gauge la describamos.

Noten que antes y era cíclica... y ahora no lo es. No pudimos leer la conservación de $\tilde{P}_y$ directamente de $\mathcal{L}^S$, tuvimos que deducirlo de las ecuaciones de movimiento. Dicho así, el gauge simétrico parece bastante inútil en comparación al de Landau. Eso es porque en este gauge hay otras coordenadas más ideales para describir el problema: como tiene simetría de rotación, convenía usar polares. Si hacen eso les queda el lagrangiano

$$\mathcal{L}^S = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qB_0}{2}r^2\dot{\varphi} \tag{20}$$

que es cíclico en φ, dando la conservación de L_z. Esta conservación no apareció explícitamente en las ecuaciones de E-L usando coordenadas cartesianas, se nos pasó de largo. Está escondida en las ecuaciones (16) y (19).

Resumen: En $\mathcal{L}$, en vez de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ aparecen los potenciales de gauge ϕ y $\mathbf{A}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}$ depende del gauge. Esto hace que en cada lagrangiano aparezcan distintas cantidades conservadas asociadas a las coordenadas cíclicas. Sin embargo, el problema físico real debe ser independiente del gauge que elijamos usar. Y podemos chequear que en cada gauge las soluciones y las cantidades conservadas (que son varias) son las mismas.

c) Los potenciales vectores del gauge de Landau y simétrico se relacionan por una transformación de gauge tal que $\mathbf{A}^S = \mathbf{A}^L + \vec{\nabla}\psi$. Hallen ψ y prueben que los lagrangianos se relacionan según

$$\mathcal{L}^S = \mathcal{L}^L + \frac{dF}{dt}\ , \qquad F = q\,\psi \tag{21}$$

Existe un resultado general que dice que si dos lagrangianos se relacionan por una derivada total dependiente de las posiciones y el tiempo, entonces las ecuaciones de E-L son las mismas. Podemos demostrar rápidamente que dF/dt cumple las ecuaciones de E-L. Como

$$\dot{F}(\mathbf{q},t) = \frac{dF}{dt}(\mathbf{q},t) = \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{22}$$

entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{F}}{\partial q_k} \tag{23}$$

que no son otra cosa que las ecuaciones de E-L para $\dot{F}$. Luego, si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \dot{F}$ y $\mathcal{L}$ satisface las ecuaciones de E-L, entonces $\mathcal{L}'$ también lo hará ya que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \tag{24}$$

Es decir que la física del problema es la misma porque una transformación de gauge modifica el lagrangiano a menos de una derivada total, obteniendo las mismas ecuaciones de movimiento.