Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2025

Guía 7: *Formulación Hamiltoniana.*

Ecuaciones de Hamilton y diagramas de fase

1. Para una partícula en presencia de un potencial $V(\mathbf{r})$ que no depende de las velocidades, exprese el vector momento $\mathbf{p}$ en términos de los momentos canónicos conjugados p_i de cada coordenada generalizada q_i. Hágalo en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Muestre que en los dos últimos casos $L_z = p_\varphi$, con φ el ángulo azimutal.

2. Escriba el Hamiltoniano, las ecuaciones de Hamilton y construya los diagramas de fases indicando con flechas su evolución temporal para:

   a) Un oscilador armónico tridimensional isótropo. Hágalo en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas aprovechando el resultado del ejercicio anterior.

   b) Una partícula en un potencial central $V(r)$. Halle constantes de movimiento. Para el diagrama de fase, suponga $V(r) = -k/r$ y discuta las órbitas posibles.

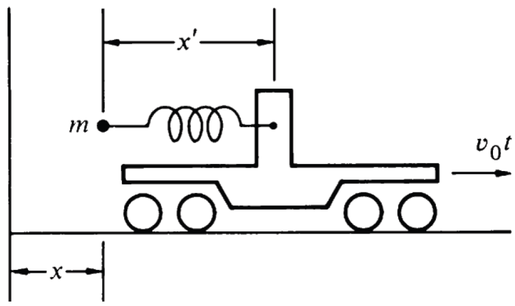
   c) Un trompo simétrico que se mueve libremente (sin gravedad).

   d) Un trompo simétrico con un punto fijo en un campo gravitatorio uniforme.

   e) Una máquina de Atwood. Considere los casos en que la polea es ideal, o tiene masa M y radio R.

3. Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el Hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta las cantidades conservadas. ¿Es el Hamiltoniano igual a la energía mecánica?

4. Una masa m se encuentra unida a un resorte de constante elástica k y longitud natural nula, cuyo otro extremo está fijo en un auto que es movido por un motor externo a velocidad constante v_0. Escriba el Hamiltoniano desde un sistema S fijo al espacio, y desde un sistema S' que se mueve con la velocidad del auto v_0 respecto a S. Analice en cada sistema: ¿Es el Hamiltoniano la energía total? ¿Se conserva?



5. Considere una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia del potencial $V = \frac{a(b+\dot{r}^2)}{r}$, donde r es la distancia al origen y $a,\ b$ son constantes positivas. Encuentre los momentos generalizados p_r y p_θ, y el Hamiltoniano. Obtenga las ecuaciones canónicas y muestre que el impulso angular se conserva. ¿Se conserva $\mathcal{H}$? ¿Es $\mathcal{H} = E$? Reduzca el problema para r a una ecuación diferencial de primer orden.

6. Una partícula cargada se mueve en presencia de un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Recuerde que el potencial generalizado es $U = -q\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$.

   a) Encuentre el momento conjugado para un potencial vector $\mathbf{A}$ genérico y muestre que depende del gauge elegido. Llámelo $\mathbf{P}$ para distinguir este momento *canónico* del momento *mecánico* usual $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

   b) Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton en el gauge de Landau $\mathbf{A} = Bx\hat{y}$.

   c) Resuelva de nuevo el problema eligiendo ahora el gauge simétrico $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{B}\times\mathbf{r}}{2}$. Hágalo en coordenadas cartesianas y luego en cilíndricas. Preste atención a las cantidades conservadas halladas y compárelas con las obtenidas en el gauge de Landau.

Transformaciones Canónicas

7. Dado un par de variables conjugadas q y p (con dimensiones apropiadas), considere la transformación $Q = \ln\left(\frac{\operatorname{sen} p}{q}\right)$ y $P = q\cot p$.

   a) Sin integrar aún, exprese explícitamente las ecuaciones que le permitirían hallar cada una de las 4 generatrices posibles.

   b) Para el caso que considere más sencillo, integre para encontrar la generatriz correspondiente.

   c) A partir de la generatriz hallada, determine las otras tres. ¿Las generatrices son únicas?

8. Sea la siguiente transformación

$$Q_1 = q_1^2\ , \quad Q_2 = q_2^\gamma\ , \quad P_2 = p_2 + \alpha q_2$$

   Deduzca cómo debe ser P_1 y qué condiciones deben satisfacer las constantes α y γ para que la generatriz $F_2(q, P, t)$ exista y la transformación sea canónica. ¿Hubiese sido posible encontrar $F_1(q, Q, t)$?

9. Demuestre que la transformación

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\left(\sqrt{2P_x}\sin Q_x + P_y\right) \quad , \quad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}\left(+\sqrt{2P_x}\cos Q_x - Q_y\right)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\left(\sqrt{2P_x}\cos Q_x + Q_y\right) \quad , \quad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}\left(-\sqrt{2P_x}\sin Q_x + P_y\right)$$

   donde $\omega = qB/mc$, es canónica, y úsela para encontrar una solución alternativa del problema 6.c (gauge simétrico). *Ayuda: conviene elegir una generatriz que dependa de Q_x... ¿por qué?*

10. Considere un oscilador bidimensional isótropo acoplado con Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(p,q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + 2\alpha\, x\, p_y$$

Muestre que la transformación

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_Y \sin\lambda}{m\omega} \quad , \quad p_x = -m\omega\, Y \sin\lambda + P_X \cos\lambda$$

$$y = Y\cos\lambda + \frac{P_X \sin\lambda}{m\omega} \quad , \quad p_y = -m\omega\, X \sin\lambda + P_Y \cos\lambda$$

es canónica y halle el nuevo Hamiltoniano $\mathcal{K}(P,Q)$. Elija λ tal que el sistema se desacople en las nuevas coordenadas y resuelva las correspondientes ecuaciones de Hamilton. Para $\alpha = 0$, describa el movimiento cuando $Y = P_Y = 0$ en $t = 0$.

Corchetes de Poisson

11. Demuestre las siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo f, g, h funciones arbitrarias de p_i, q_i; $F(f)$ es una función de f y c es una constante.

$$\begin{cases} [f,c] = 0 = [f,f]\,, \\ [f,F(f)] = 0\,, \\ [g,F(f)] = F'(f)[g,f]\,, \\ [f,g] + [g,f] = 0\,, \\ [f+g,h] = [f,h] + [g,h]\,, \\ [fg,h] = f[g,h] + [f,h]g\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0 \text{ (id. de Jacobi)}, \\ \frac{\partial}{\partial t}[f,g] = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}]\,, \\ [f,q_i] = -\frac{\partial f}{\partial p_i}\,, \\ [f,p_i] = \frac{\partial f}{\partial q_i}\,, \\ [f,g^n] = ng^{n-1}[f,g]\,, \\ [q_i,q_j] = [p_i,p_j] = 0;\ [q_i,p_j] = \delta_{ij} \text{ (corchetes fundamentales)}. \end{cases}$$

12. Demuestre que $\frac{df}{dt} = [f,\mathcal{H}] + \frac{\partial f}{\partial t}$. ¿Qué obtiene para $f = q_i$ y $f = p_i$? ¿Y si $f = \mathcal{H}$? Como corolario, note que si f no depende explícitamente del tiempo, f es constante si y sólo si $[f,\mathcal{H}] = 0$. A partir de ello y la identidad de Jacobi muestre que, si f y g son constantes, también lo es $[f,g]$.

13. Muestre que las transformaciones de los ejercicios anteriores (8,9,10,11) son canónicas mediante el cálculo de corchetes fundamentales de Poisson.

14. Un par de variables se dicen canónicas (no necesariamente conjugadas entre sí) si el corchete de Poisson entre ellas se anula. Con esto en mente:

    a) Para una partícula, calcule (en componentes cartesianas) $[r_i, L_j]$ y $[p_i, L_j]$, donde $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Además calcule $[L_x, L_y]$, $[L_y, L_z]$ y $[L_x, L^2]$, donde $L^2 = |\mathbf{L}|^2$.

    b) Muestre que si dos componentes de $\mathbf{L}$ se conservan, entonces se conserva la tercera.

    c) ¿Pueden ser L_x y L_y simultáneamente variables canónicas? Ídem para L_x y L^2.

d) Muestre que para una partícula sometida a un potencial con simetría cilíndrica alrededor del eje z, L_z es una constante de movimiento, mientras que si el potencial es central, entonces $\mathbf{L}$ es constante.
Ayuda: exprese L_x, L_y, L_z en términos de las coordenadas y momentos angulares.

15. Una transformación canónica infinitesimal puede escribirse entonces como $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{P} + \epsilon\, G(\mathbf{q}, \mathbf{P})$: se suele decir que G *genera* la transformación canónica.

    a) Muestre que $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{P}$ es la generatriz de una transformación identidad.

    b) Muestre que si el Hamiltoniano se mantiene invariante frente a alguna transformación de simetría, entonces el generador de la simetría G se conserva (asuma que G no depende explícitamente del tiempo para simplificar).

    c) Para ejemplificar analice los casos: i) $G = p_i$; ii) $G = L_i$; iii) $G = \mathcal{H}$. Interprete a qué transformación corresponde cada caso identificando quién es ϵ.