

1. Teorías de gauge sobre grupos generales

Un grupo es un conjunto de objetos $\mathcal{G} = \{g\}$ entre los cuales existe una operación (es decir, una función de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ en \mathcal{G} que a) posee un elemento neutro (existe un elemento e tal que $ge = eg = g$ para todo $g \in \mathcal{G}$; b) posee elemento simétrico (para todo g existe un elemento g^{-1} tal que $g^{-1}g = e$; y c) es asociativa $g(g'g'') = (gg')g''$. Si además $gg' = g'g$ para cualquier par, decimos que el grupo es conmutativo o “Abeliano”.

Dado un espacio vectorial H , una representación unitaria de \mathcal{G} es un mapa de \mathcal{G} en un conjunto de matrices unitarias que es consistente con el producto del grupo, $U(g)U(g') = U(gg')$, donde el lado izquierdo representa la composición habitual de matrices. No todos los grupos admiten representaciones unitarias; nosotros vamos a asumir que nuestro grupo las admite. Obviamente $U(e) = \mathbf{1}$ y $U(g^{-1}) = (U(g))^{-1}$.

Un “grupo de Lie” es un grupo que además es una variedad. Eso quiere decir que cada elemento del grupo posee un entorno que se puede mapear a un subconjunto de un \mathbf{R}^n . Decimos que ese entorno es el plano tangente a la variedad en ese elemento. Además, la estructura de la variedad es consistente con la operación del grupo, en el sentido de que gg' depende continuamente de g y de g' . Por eso el plano tangente en g se puede mapear sobre el plano tangente en e operando con g^{-1} . Una consecuencia es que todos los planos tangentes tienen la misma dimensionalidad. Además, cada plano tangente hereda la estructura vectorial de \mathbf{R}^n .

Vamos a identificar al grupo con alguna de sus representaciones (por ejemplo, identificamos a $SU(2)$ con el grupo de matrices unitarias de determinante 1 en \mathbf{C}^2). Entonces toda matriz unitaria se puede escribir como

$$U = e^{-iA} \quad (1)$$

con A hermítica. Si U está “cerca” de $\mathbf{1}$ entonces podemos desarrollar

$$U \approx \mathbf{1} - iA \quad (2)$$

La matriz A vive en el plano tangente por $bm1$. Como éste es un espacio vectorial, podemos elegir una base τ_A . Entonces

$$A = a^A \tau_A \quad (3)$$

Decimos que los τ_A son los “generadores” del grupo. Nótese que la dimensión del espacio base H , pongamos d , no es la dimensión del espacio tangente al grupo. Por ejemplo, para $SU(n)$, tomando $H = \mathbf{C}^n$, tendríamos $d = n$ y $n^2 - 1$ generadores (3 para $SU(2)$, 8 para $SU(3)$, etc.).

Si tengo dos matrices, ahora

$$e^{-iA}e^{-iB} = e^{-i[A+B-\frac{1}{2}[A,B]+\dots]} = e^{-iC} \quad (4)$$

Si A y B son combinaciones lineales de generadores, lo mismo vale para $A+B$, pero no necesariamente para C . Para que C permanezca en el plano tangente pedimos que el conmutador de dos elementos del plano tangente también sea una combinación lineal de generadores. Basta con establecer esta propiedad para dos generadores, es decir

$$[\tau_A, \tau_B] = iC_{AB}^C \tau_C \quad (5)$$

Las constantes C_{AB}^C son las “constantes de estructura” del grupo, y codifican la operación del grupo. Cuando valen relaciones de conmutación del tipo 5, la representación $U = e^{-iA}$ vale para cualquier elemento del grupo. Decimos que las matrices A en la cápsula lineal de los generadores forman el “álgebra” del grupo.

El grupo actúa sobre sí mismo mediante la operación, para un U dado

$$U' \rightarrow UU'U^{-1} \quad (6)$$

O sea, si $U = e^{-iA}$ y $U' = e^{-iB}$

$$U' \rightarrow e^{-iUBU^{-1}} \quad (7)$$

Ahora

$$UBU^{-1} = B - i[A, B] + \dots \quad (8)$$

Si $B = b^A \tau_A$ tenemos

$$[A, B] = (a^A iC_{AC}^B b^C) \tau_B \quad (9)$$

De esta manera, encontramos una representación del grupo sobre su propia álgebra. Si insistimos que esta representación debe tener generadores T_A , que son matrices en el plano tangente al grupo, una transformación infinitesimal debería ser

$$b^B \rightarrow b^B - i\alpha^A T_A|_C^B b^C \quad (10)$$

Comparando, vemos que

$$T_A|_C^B = iC_{AC}^B \quad (11)$$

Para que esto sea realmente una representación del grupo, debe ser

$$[T_A, T_B] = iC_{AB}^C T_C \quad (12)$$

o sea

$$C_{AE}^D C_{BC}^E - C_{BE}^D C_{AC}^E = C_{AB}^E C_{EC}^D \quad (13)$$

Esto se deduce de la identidad de Jacobi

$$[\tau_A, [\tau_B, \tau_C]] + [\tau_B, [\tau_C, \tau_A]] + [\tau_C, [\tau_A, \tau_B]] = 0 \quad (14)$$

que se convierte en

$$\{C_{AE}^D C_{BC}^E + C_{BE}^D C_{CA}^E + C_{CE}^D C_{AB}^E\} \tau_D = 0 \quad (15)$$

Decimos que esta representación es la “representación adjunta” del grupo.

Una vez que hemos comprendido que junto a la representación original (con generadores τ_A) siempre viene la representación adjunta, toda la construcción de la teoría de gauge del grupo $SU(2)$ que hicimos la vez pasada se puede reproducir para un grupo cualquiera simplemente reemplazando las constantes de estructura de $SU(2)$ ($C_{AB}^C = \epsilon_{ABC}$) por las constantes de estructura en cuestión. Además, aprendemos que el tensor de campos $F_{\mu\nu}^A$ es un elemento de la representación adjunta, y que el símbolo D_μ en las ecuaciones de movimiento efectivamente es la derivada covariante para tal representación, lo que garantiza que

$$D_\nu D_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [D_\nu, D_\mu] F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}] = 0 \quad (16)$$

2. Los campos de gauge son transversos

Sabemos que una onda electromagnética en vacío es necesariamente transversa, es decir, si escribimos una onda plana monocromática como

$$\vec{A} = \vec{\epsilon} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \quad (17)$$

en un gauge en que el potencial escalar se anula, entonces $\vec{k}\vec{\epsilon} = 0$. Por este motivo decimos que la onda tiene dos grados de libertad, que corresponden a dos polarizaciones independientes en el plano perpendicular a la dirección de propagación. Queremos ver si es posible hacer un enunciado similar para teorías de gauge no abelianas.

Para eso vamos a estudiar campos de gauge linealizados, es decir vamos a quedarnos solamente con la parte lineal del tensor de campos

$$F_{\mu\nu}^A \approx \partial_\mu W_\nu^A - \partial_\nu W_\mu^A \quad (18)$$

Bajo esta aproximación construimos la acción cuadrática

$$S = \int d^4x L = \frac{-1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} \quad (19)$$

y escribimos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu W_\nu^A)} \right) = \frac{\partial L}{\partial W_\nu^A} \quad (20)$$

La lógica de las ecuaciones de Euler-Lagrange es que mientras el lado derecho depende de los campos y sus derivadas primeras respecto del tiempo, el lado izquierdo depende de los campos y de sus derivadas primeras y segundas. En otras palabras, las ecuaciones de Euler-Lagrange nos permiten encontrar las aceleraciones en términos de las posiciones y velocidades, y de esa manera determinan la evolución del sistema. En nuestro caso, además, el lado derecho simplemente se anula.

Ahora, es evidente que el lado izquierdo no contiene la derivada segunda respecto del tiempo de W_0^A . Para que eso fuese posible, la densidad lagrangiana debería contener a $W_{0,0}^A$. Pero ésta solamente podría ocurrir en F_{00}^A , que es idénticamente cero por antisimetría.

Una primer conclusión es que las ecuaciones de Euler-Lagrange no determinan la evolución de los campos de gauge. En realidad, era imposible que lo hicieran, ya que uno retiene la libertad de hacer transformaciones de gauge en cualquier momento, variando de esa manera la evolución.

Sin embargo, la ecuación con $\nu = 0$ no es trivial. Si identificamos $F^{Aj0} \equiv E^{Aj}$ como los “campos eléctricos”, en ausencia de carga obtenemos la Ley de Gauss

$$\partial_j E^{Aj} = 0 \quad (21)$$

En un gauge en que $W^{A0} = 0$ obtenemos

$$\partial_j \dot{W}^{Aj} = 0 \quad (22)$$

de manera que el grado de libertad longitudinal no es dinámico. Como su equivalente electromagnético, cada campo de gauge equivale a dos grados de libertad transversos.

3. Rompimiento espontáneo de simetría

Uno de los principales atractivos de las teorías de gauge es que permiten introducir interacciones de una manera sistemática en una teoría, ya que partículas “cargadas” interactúan mediante el intercambio de campos de gauge. Pero tienen la debilidad de que los campos de gauge son necesariamente no masivos, ya que un término de masa en la densidad Lagrangiana, por ejemplo $m^2 W_\mu^A W^{A\mu}$, no es invariante de gauge. En otras palabras, uno sólo podría modelar interacciones de largo alcance, como el electromagnetismo, lo cual contradice la fenomenología de las interacciones débiles.

Sin embargo, existe una forma de darles masa a los campos de gauge, a través del *rompimiento espontáneo de simetrías*. Hacemos notar que las interacciones fuertes son de corto alcance por un mecanismo completamente distinto, el confinamiento de las cargas de color, que no vamos a tratar en este curso.

Un caso simple de rompimiento espontáneo de simetría es la teoría de Landau-Ginzburg de la transición de fase ferromagnética. Landau y Ginzburg suponen que al menos cerca de la temperatura crítica el estado del sistema se puede describir mediante un “parámetro de orden”, en este caso la densidad de magnetización \vec{M} . $\vec{M} = 0$ por encima de la temperatura crítica, pero $\neq 0$ por debajo. Como de todas maneras es pequeño si no nos alejamos mucho de la temperatura crítica, y el sistema es invariante frente a rotaciones, la energía libre debe tomar la forma

$$\Gamma[\vec{M}] = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} M_{j,k} M_{j,k} + \frac{1}{2} a \vec{M}^2 + \frac{1}{4} \lambda (\vec{M}^2)^2 + \dots \right\} \quad (23)$$

donde los términos que siguen son despreciables cerca de la temperatura crítica (salvo λ sea cero). Los puntos de equilibrio son los mínimos homogéneos de la energía libre, lo cual lleva a

$$a + \lambda \vec{M}^2 = 0 \quad (24)$$

Claramente, si a y λ son positivos, la única solución es $\vec{M} = 0$. Landau y Ginzburg suponen que esta es la situación por encima de la temperatura crítica, pero mientras que λ permanece positivo, a se anula a la temperatura crítica y se vuelve negativa por debajo

$$a \approx \alpha \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right) \quad (25)$$

Entonces, por debajo de la temperatura crítica aparecen soluciones no triviales con

$$\vec{M}^2 = \frac{|a|}{\lambda} \quad (26)$$

Nótese que ésto no determina el punto de equilibrio. Hay una “variedad de mínimos”, en este caso la esfera de radio $\sqrt{|a|/\lambda}$, que corresponden a estados con la misma energía libre. Se supone que el material se las ingenia para elegir a uno de éstos (porque siempre hay un capo externo remanente, o simplemente al azar), pero cualquiera sería una elección viable.

Otro caso un poco más simple es la teoría de Landau-Ginzburg de la transición de fase superconductor. En este caso, el parámetro de orden es un campo escalar complejo, que representa el condensado de pares de Cooper, y la acción es

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ -\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{2} \lambda (\phi^* \phi)^2 \right\} \quad (27)$$

donde ya asumimos que estamos por debajo de la temperatura crítica. Asumiendo que la configuración de equilibrio es homogénea, encontramos

$$m^2 - \lambda \phi^* \phi = 0 \quad (28)$$

Ahora nos preguntamos por las pequeñas oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que el equilibrio corresponde a $\phi_0 = \sqrt{m^2/\lambda}$. Entonces podemos parametrizar una pequeña desviación del equilibrio como

$$\phi = \phi_0 + \xi + i\eta \quad (29)$$

de manera que, reteniendo sólo términos cuadráticos en ξ y η

$$\begin{aligned} \phi^* \phi &= \phi_0^2 + 2\phi_0 \xi + \xi^2 + \eta^2 \\ (\phi^* \phi)^2 &= \phi_0^4 + 4\phi_0^3 \xi + 2\phi_0^2 (3\xi^2 + \eta^2) \end{aligned} \quad (30)$$

Reemplazando en la acción encontramos

$$S = \int d^4x \left\{ -\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - 2m^2 \xi^2 - \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta \right\} \quad (31)$$

Vemos que el campo ξ ha adquirido una masa (con el signo correcto) mientras que η permanece no masivo. En realidad esto es natural. En este caso la variedad de mínimos es el círculo de radio ϕ_0 . Moverme en la dirección de ξ me saca de la variedad de mínimos, por lo tanto cuesta energía y convoca una fuerza restitutiva, tratando de llevar la fluctuación nuevamente al mínimo de energía. En cambio, si me muevo en la dirección de η permanezco en la variedad de mínimos, por lo cual no pierdo energía, y η no adquiere masa. Decimos que η es el “bosón de Goldstone”.

Por supuesto la existencia de un bosón de Goldstone es independiente de cómo parametrize los campos. Por ejemplo, si yo parametrizo

$$\phi = e^{-i\theta} [\phi_0 + \varphi] \quad (32)$$

es fácil ver que θ es el bosón de Goldstone y φ adquiere una masa $2m^2$.

Ahora, si en vez de una invariancia $U(1)$ global fuese una invariancia de gauge

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ -(\partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{2} \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \quad (33)$$

Uno puede eliminar la fase θ completamente mediante una transformación de gauge. Por lo tanto, cuando estudiamos las pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio, sólo encontramos al campo escalar real masivo φ y al campo vectorial A_μ , que adquiere una masa $e^2 \phi_0^2$.

¿Qué pasó con el bosón de Goldstone?

Lo que pasó es que al hacer la transformación de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - e^{-1} \partial_\mu \theta \quad (34)$$

el campo de gauge adquirió un grado de libertad longitudinal. El campo vectorial masivo contiene 3 grados de libertad, no 2 como un campo de gauge ordinario. Entonces en la fase simétrica teníamos 4 grados de libertad (2 en ϕ y 2 en A_μ) y luego de romper la simetría también, ahora es 1 en φ y 3 en A_μ . Decimos que el campo de gauge “se comió” al bosón de Goldstone [1].

Referencias

- [1] T. Lancaster y S. Blundell, *Quantum Field Theory for the gifted amateur*, Oxford (2014).