Práctica 1: Teorías de gauge a nivel clásico

The Dirac field equations for ψ, together with the Maxwell equations for the four potentials of of the electromagnetic field, have an invariance property that is formally the same as the one that I referred to as gauge invariance in my theory of gravitation and electricity from 1918.

Hermann Weyl, Elektron und Gravitation. I (1929)

1 Teorías clásicas de gauge abelianas

1. Considere el lagrangiano de un campo de Klein-Gordon complejo:

$$L = (\partial^\mu \phi)^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

   (a) Verifique que el lagrangiano no queda invariante ante la transformación $\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi$, siendo α una función arbitraria del espacio-tiempo. Es decir, verifique que este lagrangiano no tiene *invariancia local* ante $U(1)$.

   (b) Considere ahora una modificación del caso anterior, en el que el campo escalar interactúa con otro campo cuadrivectorial A_μ :

$$L_{gauge} = D^*_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + ...$$

   donde los punto suspensivos denota un términos cinéticos en A_μ, que en breve se introducirá a fin de darle dinámica a este campo. D_μ es la llamada *derivada covariante* $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$, con g una constante. Halle la forma en que debe transformar A_μ (transformación de gauge) para que el primer término de este lagrangiano quede invariante para todo α cuando $\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi$.

   (c) Repita los pasos anteriores para el caso del lagrangiano de Dirac. Compare la corriente que es fuente para el campo de Maxwell con el caso anterior.

(d) Muestre que el tensor $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ resulta ser invariante ante la transformación de A_μ hallada en el punto anterior. Esto permite proponer un término cinético para A_μ de la forma $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, *invariante de gauge*. ¿Porqué este término no describe interacciones para el campo A_μ.

(e) Halle las ecuaciones de movimiento del lagrangiano completo así obtenido, invariante ante $U(1)$-local:

$$L_{gauge} = D^*_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

2. Verifique que un término de masa para el fotón (la partícula asociada a la cuantización de A_μ)

$$m^2 A_\mu A^\mu$$

rompe la invariancia local considerada en el ejercicio anterior.

3. El lagrangiano:

$$L_{gauge} = D^*_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

con D_μ la derivada covariante introducida anteriormente, es invariante de gauge también. Sin embargo, en este lagrangiano A_μ no tiene ningun término cinético que le de dinámica. ´?Como cuadra esto con el relato oficial de que la invariancia local lleva a introducir las interacciones? '? Que sistema describiría este lagrangiano?

4. Como preparación para el ejercicio próximo, tengamos presente la noción de corrientes conservadas triviales o leyes triviales de conservación. Se dice que j^μ (función de los campos y derivadas) cumpliendo la ecuación de conservación $\partial_\mu j^\mu \approx 0 \approx$ significa que la igualdad se da cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento) es trivial si

$$j^\mu \approx \partial_\rho f^{\rho\mu}$$

con $f^{\rho\mu}$ una expresión en los campos y sus derivadas anti-simétrica. El nombre *trivial* sugiere que la ley de conservación no da ninguna información sobre la dinámica.

A fin de entender el concepto, considere un lagrangiano con dos campos escalares reales ϕ_1 y ϕ_2, que satisfacen las ecuaciones de Euler $P_1(\phi_1, \phi_2) = 0$ y $P_1(\phi_1, \phi_2) = 0$ (siendo $P_{1/2}$ expresiones en los campos y sus derivadas de ninguna relevancia ahora). Definamos la corriente:

$$j^\mu \equiv \partial^2\phi_1 \partial^\mu \phi_2 - \partial^2 \phi_2 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\nu \phi_1 \partial^{\mu\nu} \phi_2 - \partial_\nu \phi_2 \partial^{\mu\nu} \phi_1 + \alpha \partial^\mu \phi_1 P_1 + \beta \partial^\mu \phi_2 \, P_2$$

siendo $\partial^2 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$

(a) Muestre que es una corriente trivial en el sentido anterior.

(b) Reflexione sobre la nula información que da su ley de conservación y concluya que la denominación *trivial* está bien puesta.

5. La invariancia local del lagrangiano de Dirac/Klein Gordon acoplado a A_μ sugiere que habría una cantidad infinita de corrientes conservadas, dado que el parámetro de la transformación de simetría es una función arbitraria.

   (a) Muestre que para la elección $\alpha = constante$ la corriente de Noether obtenida es trivial en el sentido anterior.

   (b) Muestre que ocurre lo mismo para α arbitrario

6. La trivialidad de las corrientes de Noether y el concepto de simetría de gauge como redundancia puede verse en un ejemplo de campos en $0+1$. Tal es el caso de la partícula relativista cuya acción es:

$$S = -m \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu}$$

   (a) Verifique que esta acción es invariante local en el sentido que la acción queda invariante ante $q^\mu(\tau) \to q^\mu(f(\tau))$ con f una función arbitraria.

   (b) Considere el caso que que f es un traslación en τ. Halle la corriente de Noether (el hamilitoniano) y muestre que es trivial (en este caso de una forma mucho mas evidente).

7. El lagrangiano de Klein-Gordon complejo puede re-escribirse en términos de combinaciones de los campos ϕ y A_μ invariantes de gauge. En esta formulación se trivializa la invariancia de gauge. Para ver ello, considere la escritura de $\phi = \rho(x) e^{i\beta(x)}$.

   (a) Halle la transformación de gauge que lleva a ϕ a tener fase 0, es decir, a tomar un valor real.

   (b) Escriba el campo A_μ en ese gauge. Denominemos B_μ a dicha expresión.

   (c) Reescriba el lagrangiano en términos de ρ, β, B y muestre que desaparece β

   (d) Vea que los campos ρ y B_μ son trivialmente invariantes de gauge, viendo como fueron definidos.

8. A fin de ver que la invariancia local nos lleva a considerar Observables solo a aquellas combinaciones invariantes de gauge, considere el lagrangiano de Maxwell. Muestre que para dos condiciones iniciales para A_μ la evolución de A_μ no está determinada univocamente. ?'Como se relaciona esto con la necesidad de cocientar por las transformaciones de gauge?

2 Caso no-abeliano

9. Considere el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}_G = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi$$

donde Φ es un doblete $\begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix}$ de campos escalares complejos [1] . Este Lagrangiano es invariante ante transformaciones de $U(2)$:

$$\Phi(x) \longrightarrow e^{-i(\beta \mathbf{1} + \alpha^a \cdot \frac{\sigma_a}{2})} \Phi(x)$$

donde β y los α^a $(a = 1, 2, 3)$ son 4 constantes arbitrarias (reales). $\mathbf{1}$ es la matriz identidad de 2×2.

   (a) A fin de asegurarse de que entiende que significa esta transformación, halle explícitamente como transforman los ϕ_A y ϕ_B en el doblete en los casos en que la única constante no nula es a) β b) α^3 c) α^2.

   (b) Considere ahora que quiere *gaugear*[2] el subgrupo $SU(2)$ que se obtiene fijando $\beta = 0$, es decir, que quiere obtener un lagrangiano nuevo, acoplando Φ a nuevos campos tales que el nuevo lagrangiano sea invariante ante $SU(2)$ pero con los α_a ahora funciones arbitrarias del espacio-tiempo. Para ello, la receta estándar comienza con sustituir ∂_μ en el término cinético del lagrangiano por $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA^a_\mu T_a$ $(T_a \equiv \frac{\sigma_a}{2})$ y g una constante. Halle como deben transformar los A^a_μ para que $D_\mu\Phi$ transforme igual que Φ, es decir, para que

$$D_\mu\Phi \to e^{-i\alpha^a(x)\cdot\frac{\sigma_a}{2}} D_\mu\Phi$$

   de forma tal que $(D_\mu\Phi)^\dagger (D^\mu\Phi)$ quede invariante. Note que en este punto y lo que sigue en el próximo ejercicio no es necesario usar nada del caso $SU(2)$, el cuál fue elegido solo para fijar ideas. Observación: Puede ser útil pensar esa propiedad de transformación de $D_\mu\Phi$ como una propiedad de transformación del operador D_μ en si mismo: $D_\mu \to \Omega(x) D_\mu \Omega^{-1}(x)$ siendo $\Omega(x) \equiv e^{-i\alpha^a(x)\cdot\frac{\sigma_a}{2}}$).

10. A fin de construir el término que dará dinámica a los campos de gauge A^a_μ, necesitaremos un análogo al $F_{\mu\nu}$ del campo de Maxwell.

   (a) Muestre que el conmutador $G_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{ig}(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)$ es una combinación de los generadores del álgebra $(G_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu} T_a)$ y que $G_{\mu\nu}$ transforma como $G_{\mu\nu} \to \Omega^{-1}(x) G_{\mu\nu} \Omega(x)$.

[1] no hay modificación substancial si se usa un Lagrangiano para un doblete de espinores

[2] Verbo de dudosa aceptación en la RAE que denota el acto de transformar un lagrangiano invariante ante transformaciones determinado por ciertos parámetros constantes en otro en que esas constantes pasan a ser funciones arbitrarias del espacio-tiempo

(b) Halle la forma explicita de $G_{\mu\nu}$ en términos de los campos A^a_μ y las constantes de estructura.

(c) Muestre que $-\frac{1}{2}tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})$ es invariante de gauge y es igual a $-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a$ (aquí la posición distinta de los indices a en $G_{\mu\nu}$ no implica ningún cambio de signo).

Note que lo que está dentro de la traza no es invariante de gauge. El Lagrangiano completo, invariante de gauge, es entonces:

$$L = (D^\mu\Phi)^\dagger D_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \frac{1}{2}TrG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$$

Esencialmente, esta fue la forma en que C.N. Yang y R. Mills hallaron un lagrangiano invariante ante una simetría $SU(2)$ denominada *isotopic invariance*. Ver *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, C. N. Yang and R. L. Mills Phys. Rev. 96, 191 (1954)

11. Halle la expresión de la transformación de gauge de los campos A^a_μ a primer orden en los parámetros α^a de la transformación

12. * Halle la expresión de $G_{\mu\nu}$ en el caso de $SU(2)$ y encuentre la forma explicita de la transformación de gauge de los campos A^a_μ utilizando la expresión cerrada de las exponenciales de matrices de Pauli.

13. Este ejercicio tiene la finalidad de permitir el contacto con una notación habitual en la bibliografía y en particular en el paper de Yang y Mills. En el caso en que el grupo de gauge es $SU(2)$, las expresiones anteriores (tanto los campos de gauge como G) pueden reescribirse en términos de componentes de un vector tridimensional. Organizando los tres campos de gauge, que llamaremos W^a_μ,en un vector $\vec{W}_\mu \equiv (W^1_\mu, W^2_\mu, W^3_\mu)$ muestre que

(a) Cada componente de $G_{\mu\nu}$ puede leerse de las componentes del vector:

$$\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{W}_\nu - \partial_\nu\vec{W}_\mu + g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu$$

(puede que halla un signo incorrecto en el segundo término)

(b) Usando la forma de la transformación de $G_{\mu\nu}$ verifique que $\vec{G}_{\mu\nu}$ transforma como lo hace un vector ante una rotación. (ayuda: necesitara usar la expresión de $e^{i\alpha^a\sigma_a}\sigma_b e^{-i\alpha^a\sigma_a}$)

(c) El término $-\frac{1}{2}$ Tr‘ $G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ se puede reescribir como $-\frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}.\vec{G}^{\mu\nu}$.

La utilidad de esta reformulación está en que, en este ejemplo particular, la invariancia del término cinético del campo de gauge se puede ver como la invariancia más familiar ante rotaciones espaciales de un producto escalar.

14. Considere la descripción geométrica de la derivada covariante y reproduzca la idea de que $G_{\mu\nu}\Phi$ da cuenta de la diferencia obtenida al trasladar paralelamente a Φ por un camino cerrado.

15. * A fin de tener en cuenta que el lagrangiano de YM es solo un caso particular de una construcción invariante de gauge, considere este otro ejemplo de una teoría de campos en dimensión 3:

$$L = \epsilon^{\mu\nu\rho} Tr\left(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \lambda A_\mu A_\nu A_\rho\right)$$

siendo $A_\mu = A_\mu^a T_a$, con T_a matrices en una representación general de un algebra de Lie.

(a) Halle el valor de λ para el cuál este lagrangiano es invariante de gauge. Basta para ello con considerar la transformación de gauge a primer orden.

(b) Para el valor de λ hallado, encuentre las ecuaciones de movimiento.

El lagrangiano corresponde a las teoría de *Chern-Simons*.

16. En la forma finita de la transformación de gauge de A_μ^a aparece la expresión $\Omega^{-1}(x)\partial_\mu\Omega(x)$ siendo Ω la exponencial de algún elemento del algebra. Calcular dicha expresión en términos de los elementos del algebra en el exponente es algo engorroso. Para ello, es útil la siguiente formula:

$$\frac{de^{A(t)}}{dt} = e^{A(t)} \frac{1 - ad_{A(t)}}{ad_{A(t)}} \left(\frac{A(t)}{dt}\right)$$

donde ad_A significa la acción de conmutar con A: $ad_A(B) \equiv [A, B]$

(a) Verifique esta expresión en el desarrollo de $\frac{1-ad_{A(t)}}{ad_{A(t)}}$ a orden 1 y 2 en en potencias de $A(t)$

(b) Verifiquelo en algun caso particular de $SU(2)$ en el cual tiene una expresión cerrada para la exponencial.

(c) Vea en que difiere la expresión correcta de esta otra (**incorrecta!**) que alguien en un descuido podría considerar:

$$e^{-A(t)} \frac{de^{-A(t)}}{dt} = e^{-A(t)} \frac{dA(t)}{dt} e^{-A(t)}$$