

Práctica 3: Cuestiones elementales de QFT

En esta guía haremos un repaso de algunas nociones de QFT en casos simples como el de un campo escalar real o complejo.

1 Precalentamiento con cuantización canónica de campos libres

1. Considere la cuantización canónica de un campo de Klein-Gordon real de masa m libre.

(a) Usando la expresión $\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik^\mu x_\mu} \right)$, verifique que este operador local (dependiente de un punto del espacio tiempo) cumple la ecuación de Klein Gordon y que el campo es real (es absolutamente trivial, pero es bueno hacer ambas cuentas al menos una vez. Recuerde que el cuadrivector k en las exponenciales tiene como componente temporal a $k_0 = k^0 = \omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$)

(b) Utilizando las relaciones de conmutación entre $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$, obtenga las relaciones de conmutación entre los operadores de creación y destrucción.

2. **Espacio de estados.** A partir del estado de mínima energía (denominado *vacío* por su interpretación como estado desprovisto de partículas y denotado por $|0\rangle$) puede construirse todo el espacio de Hilbert mediante la acción de los operadores de creación. A fin de ver esto:

(a) Muestre que un estado de la forma $\prod_{i=1}^n \hat{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger |0\rangle$ es autoestado del Hamiltoniano y el operador momento con autovalores iguales a $\sum_{i=1}^n \omega_{\mathbf{k}_i}$ y $\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i$ respectivamente.

(b) Verifique que el estado anterior es autoestado del operador *número* definido como $\hat{N} = \int d^3\mathbf{k} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$ con autovalor n .

3. Un estado de la forma $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ puede considerarse como el estado de una partícula de cuádrimomento definido $(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$. Este tipo de estado no está en el espacio de Hilbert, como puede verse al calcular formalmente su

norma. Esto es análogo a lo que ocurre en mecánica cuántica no relativista (ausencia de estados con momento definido; estos están fuera del Hilbert). Sin embargo, *suavizando* la expresión anterior con una función de los momentos espaciales que decaiga suficientemente rápido para momentos grandes, puede obtenerse un estado del espacio de Hilbert.

- (a) Considere ahora dos funciones de \mathbb{R}^3 f_1 y f_2 (pensadas como funciones de los momentos espaciales). Halle el producto interno entre los estados: $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} f_1(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ y $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} f_2(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$. Expresé el resultado como una integral que involucre a f_1 y f_2 . (el factor $1/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$ podría absorberse en la definición de f pero se escribió así por razones que quedarán claras en el inciso siguiente)
- (b) Muestre que este producto es invariante de Lorentz. Es decir, que la integral anterior no se altera si se usa en vez de f una función compuesta con una transformación de Lorentz (ayuda: escriba la integral en los momentos espaciales como una integral en el cuadrimento pesado con una δ que imponga la condición de *capa de masa*: $k^2 = m^2$).

Observación: pensado como una teoría de partículas, el producto interno en el Hilbert de n partículas (espacio de Fock) es análogo al de la mecánica cuántica no relativista, pero modificando la medida de integración $d^3\mathbf{k}$ por $\frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}}$.

4. **Condición de microcausalidad.** Considere un campo de Klein Gordon real libre. Muestre que el conmutador $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ es un número complejo (es decir, un múltiplo del operador identidad) y por tanto es igual a su valor de expectación en vacío (o cualquier estado). A partir de esta observación y los resultados anteriores, muestre que el conmutador es cero para x e y espacialmente separados, es decir para $(x - y)^2 < 0$. ¿Por qué no puede decir lo mismo cuando están temporalmente separados? En este ejercicio no necesita la forma explícita del conmutador en términos de x e y Observación: note que para el caso del campo escalar complejo, los conmutadores entre $\hat{\phi}$ y $\hat{\phi}^\dagger$ serán idénticamente cero.

2 Funciones de n-puntos y propagadores

5. Muestre que el valor de expectación de vacío de un campo escalar (real o complejo) o incluso un campo de cualquier espín es una constante. Para el caso de un campo libre es cero, como puede mostrarse inmediatamente.
6. El hecho de que el vacío es un estado no trivial se manifiesta en que el valor de expectación en vacío de productos de campos, evaluados en n puntos del espacio-tiempo diferentes $\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) | 0 \rangle$, es no nulo. A estos valores de expectación se los denomina *funciones de n-puntos*, siendo

funciones de los n-puntos del espacio-tiempo x_1, \dots, x_n . Estas funciones de n-puntos (para n par) se pueden descomponer en productos de funciones de dos puntos (en teorías libres). Verifique la invariancia de Poincaré de la función de dos puntos para dos puntos x e y arbitrarios.

- (a) Para un campo escalar real de una teoría genérica, muéstrela usando la forma en que transforman los operadores de campo

$$\hat{\phi}(\Lambda x + a) = U(\Lambda, a)\hat{\phi}(x)U^\dagger(\Lambda, a)$$

y la invariancia del vacío ante una transformación de Poincaré.

- (b) Para el caso del campo escalar libre, muestre la invariancia a partir de la expresión resultante como integral en los momentos espaciales y usando la invariancia de la medida de integración.
- (c) Concluya entonces que la función de dos puntos sólo depende del valor de la distancia Minkowskiana $(x - y)^2$ (y además del signo de $t_2 - t_1$ en el caso en que están temporalmente separados), mostrando comportamientos cualitativamente diferentes según si la distancia es espacial o temporal.
7. Como un simple colorario muestre que la función de dos puntos de un campo escalar (real o complejo) es real para puntos espacialmente separados.
8. La función de n-puntos $W_2(x_n, \dots, x_1)$ puede extenderse analíticamente al plano complejo de las variables temporales, extendiéndose a $t_j - i\tau_j$ en la región $\tau_1 \leq \tau_{n-1} \dots \leq \tau_n$, con τ_j reales. En particular, considerando la región de valores imaginarios puros, podemos definir las funciones de Schwinger como:

$$S_n(z_1, \dots, z_n) = W_n((\vec{x}_1, -i\tau_1), \dots, (\vec{x}_n, -i\tau_n))$$

. siendo $z_n = (\vec{x}_n, \tau_n)$ y $\tau_1 \leq \tau_2 \dots \leq \tau_{n-1} \leq \tau_n$. Es decir, las funciones de Schwinger pueden pensarse como las de Wightman (extendidas como función en los complejos) evaluadas en parte temporal igual a $-it_j$, con los t_j ordenados temporalmente en orden decreciente de izquierda a derecha. Considere el caso particular de la función de dos puntos de un campo escalar real libre masivo (el caso masa cero requiere una cuidado adicional)

- (a) Muestre que esta se puede escribir como:

$$S_2(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int \frac{e^{-ik(z_1 - z_2)}}{k_E^2 + m^2} d^D k \quad (1)$$

siendo k_E^2 la norma euclídea y $k \cdot (z_1 - z_2)$ el producto euclídeo.

- (b) Verifique que la expresión obtenida es invariante ante el grupo euclideo

- (c) Compruebe que también es invariante ante permutaciones de los puntos z_1 y z_2 . Esta propiedad vale para las funciones de n -puntos, por lo cual las funciones de Schwinger de n -puntos se extienden a cualquier conjunto de z_i con cualquier ordenamiento de los índices temporales”

Ayuda: use la siguiente identidad:

$$\frac{e^{-a}}{a} = \frac{1}{\pi} \int \frac{e^{-isa}}{s^2 + a^2} ds$$

para $a > 0$.

9. Considere ahora el caso $2 + 1$ de un campo escalar masivo.

- (a) Usando la continuación euclídea muestre que la función de dos puntos obtenga la expresión de la función de 2-puntos para puntos espacialmente separados en el caso de. Muestre que:

$$W_2(x_1, x_2) \sim \frac{e^{-m\sqrt{-(x_1-x_2)^2}}}{\sqrt{-(x_1-x_2)^2}}$$

donde \sim indica algún factor de proporcionalidad.

- (b) Observe que el resultado es distinto de cero y apreciable para distancias menores que m (al restaurar unidades, esta es longitud de Compton $\frac{\hbar}{mc}$).
- (c) Verifique que la expresión cumple la ecuación de Klein-Gordon en x_1 y en x_2 .
- (d) ¿Puede usarse la derivación anterior para el caso en que los puntos están temporalmente separados? Si no es posible o se complica, halle directamente la función de 2-puntos en ese caso mediante la integración de la expresión original. Ayuda: piense la integral que tiene (sin sentido) como el límite de esta otra:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\omega_0}^{+\infty} e^{i\omega t - \epsilon\omega} d\omega = i \frac{e^{i\omega_0 t}}{t}$$

con $\omega_0 > 0$ y $t \neq 0$. De paso aquí se introduce este tipo de trucos de regularización. ¿Como se justifica la inclusión de ese factor que asegura la convergencia de la integral?.

10. *Mediante la obtención de las integrales en el espacio de momentos en el espacio de momentos, halle la función de dos puntos en el caso $3 + 1$ tanto para puntos espacialmente o temporalmente separados. Analice el límite de distancias espaciales grandes. Recorra a las funciones especiales que sean necesarias.

11. **Propagador del oscilador armónico cuántico.** El propagador es una cantidad que será relevante para la expresión de la matriz de Scattering cuando se introduzcan interacciones. Considere la cuantización canónica de un oscilador armónico unidimensional X de frecuencia ω (y masa $m = 1$ por simplicidad).

- (a) Calcule la función de dos variables $\langle 0 | \hat{X}(t_1) \hat{X}(t_2) | 0 \rangle$ siendo \hat{X} el operador posición en la representación de Heisenberg, t_1 y t_2 dos instantes arbitrarios y $|0\rangle$ el estado de vacío.
- (b) Muestre que la función $i \langle 0 | T(\hat{X}(t_1) \hat{X}(t_2)) | 0 \rangle$ (donde $T(\dots)$ significa que los operadores dentro del paréntesis deben estar ordenados temporalmente) es una función de Green del operador diferencial $\partial_t^2 + \omega^2$.

12. **Propagador del campo escalar**

Considere una campo escalar real o complejo, libre.

- (a) Expresé

$$D(x - y) \equiv \langle 0 | T(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y)) | 0 \rangle \quad (2)$$

como una suma de dos funciones de dos puntos pesadas adecuadamente (en el caso del campo neutro, la expresión final es la misma).

- (b) Expresé el resultado como la transformada de Fourier de

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (3)$$

Muestre esto mediante integrales en el plano complejo, en caminos que esquiven los polos dados por ϵ , ubicados en distintos lugares según sea ϵ positivo o negativo.

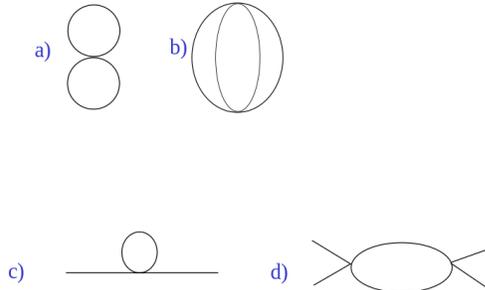
- (c) Muestre que se cumple $(\square_x + m^2)D(x - y) = -i\delta^4(x - y)$.

3 Formulación mediante integral de camino y teoría de perturbaciones

13. Reescriba la expresión del propagador del campo escalar libre como una integral de caminos en el formalismo euclídeo.

14. Considere el lagrangiano de un campo escalar con un término de interacción $\lambda\phi^4$.

- (a) Formule las reglas de Feynman en un el espacio de momentos.
- (b) Escriba la expresión en espacio de momentos de los siguientes diagramas:



indicando el factor de simetría

15. En el caso de la acción con una fuente J , porqué espera que la función de 1-punto no sea necesariamente cero? Halle la expresión de la función de 1-punto en el caso del campo libre.
16. * Considere la función generatriz $Z[J]$ y su logaritmo : $W[J] = -\log(Z[J])$. Vea ejemplos simples en los cuales se verifica que $W[J]$ genera solo diagramas conexos en el caso de diagramas sencillos. Por ejemplo, en el caso de la función de dos puntos.
El resultado general se conoce como el teorema *linked cluster*. Nota: la entrega de este ejercicio requiere algo más que meramente ver un ejemplo. Implica dar una demostración a al menos algún argumento general.
17. Un resultado similar que no debe confundirse es el que los diagramas que contribuyen a la función de n-puntos no contienen nunca diagramas de tipo burbuja desconectados. Vea esto en ejemplos sencillos, para una teoría como $\lambda\Phi^3$. En particular analice esta ecuación diagramática del Peskin para la función de 4-puntos:

$$\begin{aligned}
 & \langle \Omega | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | \Omega \rangle \\
 &= \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \\
 &+ \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \\
 &+ \text{---} + \dots + \text{---} + \dots
 \end{aligned}$$

Observe que aquí hay diagramas desconectados pero ninguno en los que un propagador no se una a uno de los puntos de la función de correlación.