Práctica 4: Elementos para la cuantización de teorías con fermiones y teorías de gauge

Las variables de Grassmann introducidas en el siglo XIX recibieron algunos aportes posteriores a mediados de siglo XX principalmente por Berezin y se convirtieron en una herramienta útil en teoría cuántica de campos para poder describir valores de expectación en teorías con fermiones y/o campos de gauge en una forma que se asemeja en la forma a una integral funcional. En una primera sección nos familiarizaremos con las variables de Grassmann y en una segunda con su uso en el procedimiento de de Faddev-Popov para tratar las redundancias en sistemas con invariancia de gauge.

1 Variables de Grassmann

1. Considere un espacio vectorial de dimensión N (en $\mathbb{C}$ para fijar ideas), con ciertos generadores $\theta_i (i = 1..N)$, con un producto antisimétrico y asociativo con las propiedades usuales para garantizar que sea un álgebra. Este álgebra de dimensión 2^N es el *álgebra de Grassmann*. Es conveniente definir el grado ($Grad$) de una expresión como el número de variables multiplicadas que contiene. Asi, $Grad(\alpha) = 0$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) mientras que $Grad(\theta_i) = 1$ por ejemplo.

   Sobre este algebra pueden definirse ciertas funcionales que comparten algunas propiedades similares a la derivación. Se define $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ por su acción sobre un monomio g de *grado cero* en θ_j (dependiente del resto de las variables) y sobre un monomio de grado 1: $\theta_j g(\theta_1..\theta_n)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(\theta_1..\theta_n) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_i}(\theta_j g(\theta_1..\theta_n)) &= g(\theta_1...\theta_n) \end{aligned}$$

   (a) Muestre que las derivadas anti-conmutan: $\frac{\partial}{\partial \theta_i}\frac{\partial}{\partial \theta_j} = -\frac{\partial}{\partial \theta_j}\frac{\partial}{\partial \theta_i}$

(b) Muestre que esta funcional cumple la regla de Leibnitz modificada en el sentido que $\frac{\partial}{\partial_{\theta_i}}(fg) = \frac{\partial f}{\partial_{\theta_i}} g + (-1)^{Grad(f)} f \frac{\partial g}{\partial_{\theta_i}}$

(c) Muestre que vale la regla de la cadena. Es decir, si $\tilde{\theta_j} = g_j(\theta_1, ...\theta_N)$ con las g_j una colección de funciones, entonces:

$$\frac{\partial fog}{\partial_{\theta_i}}(\theta) = \frac{\partial f}{\partial_{\theta_j}}(\tilde{\theta}) \frac{\partial g_j}{\partial_{\theta_i}}(\theta)$$

2. La "integral" de Berezin, denotada por $\int d\theta_j$, se define [1] de modo similar a la derivada por su acción sobre una función f como $\int d\theta_j f = \frac{\partial f}{\partial \theta_j}$ Muestre que

$$\int \int .. \int d\theta_N ... d\theta_1 \;\; \theta_1 ... \theta_N = 1$$

y que

$$\int \int .. \int d\theta_N ... d\theta_1 \;\; \theta_N ... \theta_1 = (-1)^{\frac{(N-1)N}{2}}$$

3. **Cambio de variables en integración**. Muestre que para respetar la regla $d\theta\theta = 1$, ante el cambio de variables $\tilde{\theta} = \alpha\theta$ debe ocurrir que:

$$d\tilde{\theta} = \frac{1}{\alpha} d\theta$$

4. Muestre que si tiene N variables θ_i (empaquetadas en una N-upla θ, y las nuevas variables se relacionan con la anterior mediante : $\tilde{\theta} = M\theta$, con M una matriz cualquiera, la formula de cambio de variables anterior se generaliza a:

$$d\tilde{\theta} = (\det(M))^{-1} d\theta$$

5. Una aplicación importante de lo anterior es el caso de la siguiente transformación de dos variables de Grassmann θ_1 y θ_2 y unas nuevas definidas como:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + i\theta_2) \\ \bar{\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - i\theta_2) \end{aligned} \tag{1}$$

Muestre que θ y $\bar{\theta}$ forman otra base de variables anti-conmutantes y verifica que:

[1] No es la forma habitual de definir integrales de Berezin pero esta presentada aquí es una forma equivalente

$$\int d\bar{\theta}d\theta = \int d\theta_1 d\theta_2$$

aplicando ambas expresiones a alguna función de las θ_1, θ_2

6. Considere una matriz M de $N \times N$ y un algebra de Grassmann generada por $\theta_1 ... \theta_{2N}$. Puede pensar en $N = 2$ para fijar ideas. Llamemos η_i a las primeras N variables y θ a las restantes. Muestre que, para una matriz M cualquiera vale:

$$\int \prod_{i=1}^{N} d\eta_i d\theta_i e^{-\eta^T M \theta} = det\,(M)$$

De aquí en más denotaremos como $\int D\eta \;\; D\theta$ a $\int \prod_{i=1}^{N} d\eta_i d\theta_i$ cuando aparezca este tipo de integral con dos juegos de variables η y θ.

Observación: Aunque esta relación vale para cualquier M, la M debe ser invertible en el caso relevante para calcular valores de expectación.

7. Usando un argumento similar aunque ligeramente más complicado, muestre que:

$$\int D\theta \; e^{-\frac{1}{2}\theta^T M \theta} = pf\,(M)$$

con M antisimétrica siendo pf el *Pffafiano* (busque la definición) y vea lo que da en casos simples de matrices de 2×2 o 4×4.

8. Finalmente, una de las relaciones más importantes. Considere el valor de expectación de dos variables:

$$\langle \psi_i \bar{\psi}_j \rangle \equiv \frac{\int D\bar{\psi} D\psi \; \psi_i \bar{\psi}_j e^{-\bar{\psi} M \Psi}}{\int D\bar{\psi} D\psi \; e^{-\bar{\psi} M \Psi}}$$

   (a) Muestre que
   $$\langle \psi_i \bar{\psi}_j \rangle = \left(M^{-1}\right)_{ij}$$

   (b) Compruebe que el valor de expectación puede obtenerse a partir de la función generatriz:
   $$Z[\bar{\eta}, \eta] = \int D\bar{\psi} D\psi \; \psi_i \bar{\psi}_j e^{-\bar{\psi} M \Psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta}$$
   .

   (c) Halle la forma cerrada de Z como función de $\bar{\eta}$ y η realizando la integral en ψ y $\bar{\psi}$. Sugerencia: complete cuadrados en el exponente del integrando.

2 Procedimiento de Faddev-Popov y fantasmas

9. Revise y justifique cada uno de los pasos del 1 al 5 del procedimiento de Faddev-Popov (FP) esquematizado al final. Hay un paso crítico que es el de la factorización de la integral sobre el grupo de gauge. Analice este paso y convénzace de que es correcto identificando las suposiciones necesarias sobre la medida de integración y la acción original.

10. Ejemplifique los pasos 1 y 2 del procedimiento de FP dándole sentido a la siguiente integral:

$$I = \int dxdye^{-(x-y)^2}$$

eligiendo distintas condiciones de "fijado de gauge", como por ejemplo $x+y-c=0$ o $e^x+e^y=c$ (con $c>0$ en el último caso. Muestre que estas condiciones de fijado son accesibles y haga una diagrama de las orbitas del "grupo de gauge" y las curvas de fijado.

11. Repita el análisis para los casos

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^2} F(x^2+y^2)dxdy$$

y

$$I_2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} F(x/y)dxdy$$

.

En estos casos, identifique los grupos de gauge y proponga alguna condición de fijado de gauge. En el primer caso en el que la integral puede tener sentido (eligiendo alguna función F adecuada) , vea como la versión de la integral con la introducción de la δ de Dirac reproduce el resultado original.

12. * Considere el caso de la teoría de Maxwell pura y la condición de fijado de gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$.

    (a) Halle la forma del determinante de FP.

    (b) Escriba ese determinante como una integral funcional sobre campos fantasmas y verifique que es independiente de A.

    (c) ¿Cambia algo del procedimiento si en vez de $\partial_\mu A^\mu = 0$ se impone el gauge $\partial_\mu A^\mu = c(x)$ siendo c una función arbitaria del espacio-tiempo (independiente del campo)?

    (d) Integrando sobre el campo auxiliar c con una exponencial halle la forma usual de la acción con los términos de campos fantasmas y fijado de gauge.

13. * Realice lo análogo para el caso de Yang-Mills correspondiente a $SU(2)$ en el gauge de Lorenz. ¿Depende el determinante de A_μ^a en este caso?

Procedimiento de FP esquemáticamente

$$
\begin{aligned}
I = \int DAe^{-S[A]} &\underset{\text{Inserto 1}}{\overset{1}{=}} \int DA \int Dg\Delta^{FP}[A^g]\delta(R[A^g]-c)e^{-S[A]} \\
&\underset{\text{invariancia de gauge}}{\overset{2}{=}} \int DgDA\Delta^{FP}[A]\delta(R[A]-c)e^{-S[A]} \\
&\underset{\text{Grassmann}}{\overset{3}{=}} \left(\int Dg\right)\int DA\delta(R[A]-c)e^{-S[A]-\int dx\bar{\eta}M[A]\eta} \\
&\underset{\text{independencia de c}}{\overset{4}{=}} \left(\int Dg\right) N[\xi] \int Dce^{-\frac{1}{2}\xi c^2}\int DA\delta(R[A]-c)e^{-S[A]-\int dx\bar{\eta}M[A]\eta} \\
&\underset{\text{realizo la integral en } c}{\overset{5}{=}} \left(\int Dg\right) N[\xi]\int DA\ {}^{-S[A]-\int dx\bar{\eta}M[A]\eta-\frac{1}{2}\int dx\xi R[A]^2}
\end{aligned}
$$

- A^g: campo transformado por la acción del elemento g del grupo de gauge.
- $M[A] = \frac{\delta R[A^g]}{\delta g}\,|_{g=1}$. En la practica, se parametriza el grupo por los coeficientes de los generadores del algebra en la exponencial y estas se usan para definir la matriz M
- $\Delta^{FP}[A] = \det\left(M[A]\right)$
- $N[\xi]$: factor irrelevante igual a la integral en c
- $\int Dg$: integral en el grupo de gauge, la cual da naturalmente infinito

Todos los factores irrelevantes desaparecen cuando se calcula el el valor de espectación de un operador invariante de gauge O

$$
\langle O\rangle = \frac{\int DAOe^{-S[A]}}{\int DAe^{-S[A]}} = \frac{\int DAO\ e^{-S[A]-\frac{1}{2}\int dx\bar{\eta}M[A]\eta-\frac{1}{2}\int dx\xi R[A]^2}}{\int DAe^{-S[A]-\frac{1}{2}\int dx\bar{\eta}M[A]\eta-\frac{1}{2}\int dx\xi R[A]^2}}
$$