1 La acción efectiva invariante de gauge

Para teorías de gauge no abelianas, la ecuación de Zinn-Justin se vuelve extremadamente compleja. Para demostrar la renormalizabilidad de la teoría, sin embargo, existe la posibilidad dee xplotar el hecho de que con una elección conveniente del fijado de gauge es posible construir una acción efectiva que es explícitamente invariante de gauge.

Vamos a considerar un grupo de gauge con generadores T_A y constantes de estructura

$$[T_A, T_B] = iC^C_{AB} T_C \tag{1}$$

Siguiendo a Weinberg, vamos a asumir que las constantes de estructura son completamente antisimétricas.

En la representación fundamental (que mencionamos sólo para fijar la notación) una transformación de gauge infinitesimal es

$$\psi \to \psi' = \psi - i\epsilon^A T_A \psi \tag{2}$$

Por lo tanto la derivada usual

$$\partial_\mu \psi \to \partial_\mu \psi' = \partial_\mu \psi - i\epsilon^A T_A \partial_\mu \psi - i\left(\partial_\mu \epsilon^A\right) T_A \psi \tag{3}$$

Para construir una acción invariante de gauge introducimos un campo de gauge A^A_μ y definimos la derivada covariante

$$D^{(A)}_\mu \psi = \partial_\mu \psi - igA^B_\mu T_B \psi \tag{4}$$

De tal manera que ante una transformación de gauge

$$D^{(A)}_\mu \psi \to \left(D^{(A)}_\mu \psi\right)' = D^{(A)}_\mu \psi - i\epsilon^A T_A D^{(A)}_\mu \psi \tag{5}$$

Efectivamente

$$\begin{aligned}
&\left(D^{(A)}_\mu \psi\right)' = \partial_\mu \psi - i\epsilon^A T_A \partial_\mu \psi - i\left(\partial_\mu \epsilon^A\right) T_A \psi - igA'^B_\mu T_B \psi - gA^B_\mu T_B \epsilon^A T_A \psi \\
= \;& D^{(A)}_\mu \psi - i\epsilon^A T_A D^{(A)}_\mu \psi - i\left(\partial_\mu \epsilon^A\right) T_A \psi - ig\left(A'^B_\mu - A^B_\mu\right) T_B \psi - gA^B_\mu \epsilon^A \left[T_B, T_A\right] \psi \\
= \;& D^{(A)}_\mu \psi - i\epsilon^A T_A D^{(A)}_\mu \psi - i\left(\partial_\mu \epsilon^B\right) T_B \psi - ig\left(A'^B_\mu - A^B_\mu\right) T_B \psi - igA^C_\mu \epsilon^D C^B_{CD} T_B \psi
\end{aligned} \tag{6}$$

La transformación requerida es

$$A'^B_\mu = A^B_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^B + \epsilon^D C^B_{DC} A^C_\mu \tag{7}$$

que podemos reescribir como

$$A'^B_\mu = A^B_\mu - \frac{1}{g}\left(D^{(A)}_\mu \epsilon\right)^B \tag{8}$$

donde

$$\left(D^{(A)}_\mu \epsilon\right)^B = \partial_\mu \epsilon^B + gA^C_\mu C^B_{CD} \epsilon^D \tag{9}$$

es la derivada covariante en la representación adjunta.

El conmutador de dos derivadas covariantes es

$$\left[D^{(A)}_\mu, D^{(A)}_\nu\right] \psi = -igF^B_{\mu\nu} T_B \psi \tag{10}$$

donde

$$F^B_{\mu\nu} = \partial_\mu A^B_\nu - \partial_\nu A^B_\mu + gA^C_\mu A^D_\nu C^B_{CD} \tag{11}$$

Vamos a considerar un campo de gauge sin campos de materia. La acción (euclídea)

$$S = \frac{1}{4}\int d^d x \; F^B_{\mu\nu} F^{B\mu\nu} \tag{12}$$

Para usar esta acción en una integral de camino necesitamos incluír un término de fijado de gauge

$$S = \int d^d x \, \left\{ \frac{1}{4} F^B_{\mu\nu} F^{B\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} f^B f^B \right\} \tag{13}$$

La medida de integración incluye el determinante del operador

$$L^B_C = -g \frac{\delta f^B}{\delta \epsilon^C} = \frac{\delta f^B}{\delta A^D_\mu} \left[\partial_\mu \delta^D_C + g A^D_\mu C^B_{DC} \right] \tag{14}$$

Exponenciamos este determinante introduciendo campos fantasma, de modo que

$$S = \int d^d x \, \left\{ \frac{1}{4} F^B_{\mu\nu} F^{B\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} f^B f^B + i\xi_B L^B_C \eta^C \right\} \tag{15}$$

Si asumimos que los campos fantasma pertenecen a la representación adjunta, entonces

$$L^B_C \eta^C = \frac{\delta f^B}{\delta A^D_\mu} \left(D^{(A)}_\mu \eta \right)^D \tag{16}$$

El gauge del campo de fondo se basa en la observación de que la *diferencia* entre dos campos de gauge pertenece a la representación adjunta. Entonces podemos introducir un campo de gauge auxiliar W^C_ρ y definir

$$f^B = \left(D^{(W)}_\mu (A - W)^\mu \right)^B \tag{17}$$

f^B transforma como un elemento de la representación adjunta ante una transformación de gauge *simultánea* de A^B_μ y W^B_μ, pero ante una transformación de A^B_μ *solamente* funciona como un fijado de gauge. Tenemos que

$$\frac{\delta f^B}{\delta A^{D\mu}} = \partial_\mu \delta^B_D + g W^C_\mu C^B_{CD} \tag{18}$$

y por lo tanto la acción de los campos fantasma

$$S_{gh} = \int d^d x \; i\xi_B \left[\partial_\mu \delta^B_D + g W^C_\mu C^B_{CD} \right] \left(D^{(A)}_\mu \eta \right)^D \tag{19}$$

Nótese que si vale la antisimetría de las constantes de estructura entonces las derivadas covariantes se pueden integrar por partes, de manera que

$$S_{gh} = \int d^d x \; (-i) \left(D^{(W)\mu} \xi \right)^D \left(D^{(A)}_\mu \eta \right)^D \tag{20}$$

El resultado es que la acción de Fadeev-Popov es invariante frente a una transformación de gauge simultánea de A^B_μ, W^B_μ, ξ^B y η^B, con los fantasmas asignados a la representación adjunta.

Ahora podemos definir el funcional generador

$$e^{-W[J,W]} = \int DAD\xi D\eta \; e^{-S[A,\xi,\eta;W] - \int J^\mu_B A^B_\mu} \tag{21}$$

y la acción efectiva

$$\Gamma[V, W] = W[J, W] - \int J^\mu_B V^B_\mu \tag{22}$$

Para calcular la acción efectiva, escribimos

$$A^B_\mu = V^B_\mu + a^B_\mu \tag{23}$$

y entonces

$$e^{-\Gamma[V,W]} = \int DaD\xi D\eta \; e^{-S[V+a,\xi,\eta;W] - \int J^\mu_B a^B_\mu} \tag{24}$$

donde

$$J = J[V,W] = \frac{\delta\Gamma[V,W]}{\delta V} \tag{25}$$

Ahora asumimos que ante una transformación de gauge V_μ^B se transforma efectivamente como un campo, mientras que la fluctuación a_μ^B se transforma de manera homogénea

$$a_\mu^B \to a_\mu'^B = a_\mu^B + \epsilon^D C_{DC}^B a_\mu^C \tag{26}$$

Es obvio que $S[V+a,\xi,\eta;W]$ es invariante ante la transformación simultánea de todos los campos, pero entonces

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma[V',W']} &= \int Da' D\xi' D\eta' \; e^{-S[V'+a',\xi',\eta';W'] - \int J_B^\mu [V',W'] a_\mu'^B} \\ &= \int Da' D\xi' D\eta' \; e^{-S[V'+a',\xi',\eta';W'] - \int J_B^\mu a_\mu^B + [J_{,V}\delta V + J_{,W}\delta W + J\epsilon C]a} \end{aligned} \tag{27}$$

y como $\langle a \rangle = 0$, obtenemos que Γ es invariante frente a la transformación conjunta de V y W. Finalmente, definimos la acción efectiva invariante de gauge como

$$\Gamma_{GIEA}[V] = \Gamma[V,V] \tag{28}$$

La invariancia de gauge implica una enorme simplificación de la renormalización. Como ya sabemos, los infinitos pueden aparecer solamente en términos cuadráticos o cuárticos. El único término invariante de gauge que podemos formar con esas dimensiones es $F_{\mu\nu}^B F^{B\mu\nu}$. Por lo tanto la teoría se puede renormalizar con una única renormalización

$$F_{\mu\nu}^B\big|_{bare} = Z F_{\mu\nu}^B \tag{29}$$

que implica una renormalización del campo de gauge

$$V_\mu^B\big|_{bare} = Z V_\mu^B \tag{30}$$

y de la constante de acoplamiento

$$g_{bare} = Z^{-1} g \tag{31}$$

A un lazo sólo necesitamos los términos cuadráticos en las fluctuaciones en la acción de Fadeev-Popov. Desarrollamos

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^B &= \bar{F}_{\mu\nu}^B + \partial_\mu a_\nu^B - \partial_\nu a_\mu^B + g\left(V_\mu^C a_\nu^D + a_\mu^C V_\nu^D\right) C_{CD}^B + g a_\mu^C a_\nu^D C_{CD}^B \\ &= \bar{F}_{\mu\nu}^B + D_\mu a_\nu^B - D_\nu a_\mu^B + g a_\mu^C a_\nu^D C_{CD}^B \end{aligned} \tag{32}$$

Entonces, adoptando el gauge de Feynman

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} D_\mu a_\nu^B D_\mu a_\nu^B + \frac{1}{2} \bar{F}_{\mu\nu}^B g a_\mu^C a_\nu^D C_{CD}^B - i D_\mu \xi^B D^\mu \eta^B \right\} \tag{33}$$

El cálculo de la renormalización del campo de gauge se puede ver en el Weinberg. El resultado es

$$V_{bare}^{B\mu} = \left[1 + \frac{z}{\epsilon} g^2\right] V^{B\mu} \tag{34}$$

con $z > 0$ (esta cuenta asume que $C_{CD}^B C_{CD}^E = C_1 \delta^{BE}$ con C_1 positivo; para un grupo $SU(N)$, $C_1 = N$).

Entonces también tenemos que renormalizar la carga

$$g_{bare} = \mu^{\epsilon/2} g \left[1 - \frac{z}{\epsilon} g^2\right] \tag{35}$$

de modo que

$$0 = \frac{\epsilon}{2} g \left[1 - \frac{z}{\epsilon} g^2\right] + \beta[g] \left[1 - 3\frac{z}{\epsilon} g^2\right] \tag{36}$$

$$\beta[g] = -\frac{\epsilon}{2} g \left[1 + 2\frac{z}{\epsilon} g^2\right] \tag{37}$$

y en 4 dimensiones $\beta < 0$. Esto hace que la constante de acoplamiento efectiva disminuya con la escala (por ejemplo, el momento transferido en una colisión), de modo que a altas energías la teoría se comporta como una teoría libre. Este es el fenómeno de *libertad asintótica*.

Los loops de fermiones contribuyen a z con un término negativo, por lo cual para que haya libertad asintótica no debe haber demasiados fermiones. El modelo standard tiene libertad asintótica.