

1 Rompimiento parcial de simetrías

(ver [1])

La clase pasada vimos que el rompimiento espontáneo de una simetría global produce un estado de equilibrio que es un punto dentro de un continuo de estados todos con la misma energía. Como moverse dentro de esta variedad de vacíos no cuesta energía, las fluctuaciones del campo que no me sacan de la variedad aparecen como campos no masivos, los bosones de Goldstone. pero si la simetría que se rompe es local, entonces puedo elegir un gauge “unitario” donde los bosones de Goldstone desaparecen y en cambio los campos de gauge devienen campos masivos con tres grados de libertad, es decir, incluyendo un grado de libertad longitudinal. Decimos que los campos de gauge se “comen” a los bosones de Goldstone.

Ahora en la Naturaleza observamos tanto campos de gauge masivos, como el W_{\pm} y el Z de la teoría electrodébil, como no masivos, como el fotón y los gluones (la interacción fuerte es de corto alcance por un mecanismo completamente distinto, el confinamiento de cargas de color). Por lo tanto, debe existir un mecanismo selectivo que al romperse una simetría da masa a algunos campos de gauge pero no a otros.

Esencialmente, lo que sucede es que cuando el sistema “elige” un estado dentro de la variedad de vacíos, todavía subsiste un subgrupo del grupo de gauge formado por las transformaciones de gauge que dejan invariante ese estado. Es decir, la simetría de gauge original se reduce a la simetría de gauge del grupo de invariancia del estado de vacío, pero ésta sigue siendo una simetría de gauge y los campos de gauge correspondientes no adquieren masa.

Como ejemplo, supongamos una teoría de tres campos escalares reales, invariante frente a rotaciones en el espacio interno. La acción (antes de pedir invariancia de gauge) es

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \Phi^a \partial^{\mu} \Phi^a + \frac{1}{2} m^2 \Phi^a \Phi^a - \frac{1}{4} \lambda (\Phi^a \Phi^a)^2 \right\} \quad (1)$$

que efectivamente admite mínimos no triviales; la variedad de vacíos es la esfera

$$\Phi^a \Phi^a = \frac{m^2}{\lambda} \quad (2)$$

Por ejemplo, supongamos que el sistema cae en el vacío

$$\Phi^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \end{pmatrix} \quad (3)$$

con $\phi = m/\sqrt{\lambda}$. Para estudiar las “pequeñas oscilaciones” del sistema alrededor de este estado, escribimos

$$\Phi^a = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \phi + \varphi^3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

y expandemos a segundo orden en las fluctuaciones

$$\Phi^a \Phi^a = \phi^2 + 2\phi\varphi^3 + \varphi^a \varphi^a \quad (5)$$

$$(\Phi^a \Phi^a)^2 \approx \phi^4 + 4\phi^3 \varphi^3 + 2\phi^a \varphi^a \varphi^a + 4\phi^2 \varphi^3{}^2 + \dots \quad (6)$$

de modo que

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi^1 \partial^{\mu} \varphi^1 - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi^2 \partial^{\mu} \varphi^2 - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi^3 \partial^{\mu} \varphi^3 - m^2 \varphi^3{}^2 \right\} \quad (7)$$

El campo φ^3 adquiere una masa $2m^2$ mientras que φ^1 y φ^2 son los bosones de Goldstone.

Ahora vamos a gaugear las rotaciones en el espacio interno. Una rotación infinitesimal es

$$\Phi^a \rightarrow \Phi'^a = \Phi^a + \epsilon^{abc} \omega_b \Phi_c \quad (8)$$

Queremos escribir esto como el resultado de “generadores” actuando sobre el vector de campos

$$\Phi^a \rightarrow \Phi'^a = \Phi^a - i\omega_b T_b^a \Phi_c \quad (9)$$

Por lo tanto los generadores deben ser

$$T_b|^{ac} = i\epsilon^{abc} \quad (10)$$

o, desarrollando,

$$T_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; T_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; T_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Para que la teoría sea invariante de gauge, debemos reemplazar las derivadas ordinarias en la acción por derivadas covariantes

$$\partial_\mu \Phi^a \rightarrow D_\mu \Phi^a = \partial_\mu \Phi^a - igW_\mu^b T_b|^{ac} \Phi_c \quad (12)$$

El potencial ya es invariante local, por lo cual no es necesario modificarlo. Se deduce que la variedad de mínimos es la misma, es decir, campos escalares constantes con $\phi^a \phi^a = m^2/\lambda$ y $W_\mu^a = 0$.

Ahora, cuando queremos estudiar las pequeñas oscilaciones alrededor de un estado de vacío, por ejemplo $\phi^a = (0, 0, \phi)$, vemos que una configuración del tipo 4 *siempre* se puede llevar mediante una transformación de gauge a la forma

$$\Phi^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi + \varphi \end{pmatrix} \quad (13)$$

de modo que basta considerar el caso en que el campo tiene la forma 13 y los bosones de gauge son arbitrarios, es decir, no necesariamente transversos. Cuando elegimos trabajar de esta forma decimos que adoptamos el *gauge unitario*. Desarrollando el potencial como en el caso global vemos que efectivamente el campo ϕ adquiere una masa real $\sqrt{2}m$. En el término cinético encontramos, a orden lineal,

$$D_\mu \Phi^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_\mu \varphi \end{pmatrix} + g\phi \begin{pmatrix} W_\mu^2 \\ -W_\mu^1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

de manera que la acción cuadrática resulta en

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 - F_a^{\mu\nu} F_{a\mu\nu} - \frac{1}{2} g^2 \phi^2 (W_{1\mu} W_1^\mu + W_{2\mu} W_2^\mu) \right\} \quad (15)$$

Vemos que los campos W_1^μ y W_2^μ adquieren masa pero W_3^μ no. Eso es natural porque W_3^μ está asociado a rotaciones que dejan invariante al vacío que estamos considerando. En otras palabras, la ruptura de $SO(3)$ deja una invariancia residual correspondiente al subgrupo que deja invariante al vacío, es decir, el grupo $U(1)$ de rotaciones alrededor del eje z .

2 Integrales de camino en mecánica cuántica no relativista

(ver [2])

Consideremos la teoría de una partícula cuántica en representación de Schrödinger

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t |\psi\rangle &= H |\psi\rangle \\ H &= K + V \\ V &= V[X] \\ K &= \frac{P^2}{2m} \end{aligned} \quad (16)$$

El operador posición tiene autovectores $|x\rangle$

$$X|x\rangle = x|x\rangle \quad (17)$$

Similarmente el operador momento

$$P|p\rangle = p|P\rangle \quad (18)$$

con

$$\langle x|p\rangle = e^{ipx/\hbar} \quad (19)$$

Un estado inicial $|\psi_i\rangle$ evoluciona según el operador evolución

$$|\psi\rangle(t) = e^{-iHt/\hbar} |\psi_i\rangle \quad (20)$$

Queremos calcular los elementos de matriz del operador evolución en el tiempo T

$$\langle \psi_f | e^{-iHT/\hbar} | \psi_i \rangle \quad (21)$$

El problema es que en general *no* es cierto que

$$e^{-iHT/\hbar} = e^{-iKT/\hbar} e^{-iVT/\hbar} \quad (22)$$

Pero esta fórmula es aproximadamente correcta cuando $T \rightarrow 0$, ya que el error es de orden $(T/\hbar)^2$. Entonces escribimos

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | e^{-iHT/\hbar} | \psi_i \rangle &= \langle \psi_f | \left(e^{-iHT/N\hbar} \right)^N | \psi_i \rangle \\ &\approx \langle \psi_f | \left(e^{-iKT/N\hbar} e^{-iVT/N\hbar} \right)^N | \psi_i \rangle \\ &= \langle \psi_f | \prod_{j=1}^N \left(e^{-iK(t_j-t_{j-1})/\hbar} e^{-iV(t_j-t_{j-1})/\hbar} \right) | \psi_i \rangle \end{aligned} \quad (23)$$

donde $t_0 = 0$ y $t_j = t_{j-1} + T/N$. Insertando identidades escribimos ésto como

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | e^{-iHT/\hbar} | \psi_i \rangle &= \int \prod_{j=0}^{N-1} dx_j \langle \psi_f | \prod_{j=1}^N \left(e^{-iK(t_j-t_{j-1})/\hbar} e^{-iV(t_j-t_{j-1})/\hbar} |x_{j-1}\rangle \langle x_{j-1}| \right) | \psi_i \rangle \\ &= \int \prod_{j=0}^{N-1} dx_j e^{-i \sum_{j=0}^{N-1} V(x_j)(t_j-t_{j-1})/\hbar} \langle \psi_f | \prod_{j=1}^N \left(e^{-iK(t_j-t_{j-1})/\hbar} |x_{j-1}\rangle \langle x_{j-1}| \right) | \psi_i \rangle \end{aligned} \quad (24)$$

Insertamos una nueva serie de identidades

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | e^{-iHT/\hbar} | \psi_i \rangle &= \int \prod_{j=0}^{N-1} dx_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{-i \sum_{j=0}^{N-1} V(x_j)(t_j-t_{j-1})/\hbar} \\ &\quad \langle \psi_f | \prod_{j=1}^N \left(e^{-iK(t_j-t_{j-1})/\hbar} |p_{j-1}\rangle \langle p_{j-1}|x_{j-1}\rangle \langle x_{j-1}| \right) | \psi_i \rangle \\ &= \int \prod_{j=0}^N dx_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{-i \sum_{j=0}^{N-1} [(p_j^2/2m) + V(x_j)](t_j-t_{j-1})/\hbar} e^{i \sum_{j=0}^{N-1} p_j(x_{j+1}-x_j)/\hbar} \langle \psi_f | x_N \rangle \langle x_0 | \psi_i \rangle \end{aligned} \quad (25)$$

Pasando al límite $N \rightarrow \infty$, la poligonal que pasa por los puntos (t_j, x_j) deviene una trayectoria continua que interpola entre x_i en $t = 0$ y x_f en $t = T$, y vemos que

$$\langle x_f | e^{-iHT/\hbar} | x_i \rangle = \int_{x(0)=x_i, x(T)=x_f} Dx Dp e^{iS/\hbar} \quad (26)$$

donde S es la acción

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^T dt L \\
L &= p\dot{x} - H
\end{aligned}
\tag{27}$$

Las integrales gaussianas sobre los impulsos se pueden hacer explícitamente, por lo que podemos escribir de manera equivalente

$$\begin{aligned}
\langle x_f | e^{-iHT/\hbar} | x_i \rangle &= \int_{x(0)=x_i, x(T)=x_f} Dx e^{iS/\hbar} \\
L &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V[x]
\end{aligned}
\tag{28}$$

Nótese que todas las trayectorias que estamos considerando son continuas y tienen la *propiedad heracliteana* de que no vuelven para atrás en el tiempo.

Es posible verificar que el error cometido al usar la fórmula 22 desaparece en el límite $N \rightarrow \infty$.

En el límite $\hbar \rightarrow 0$, la integral está dominada por la trayectoria que hace estacionaria a la acción, que por supuesto es la trayectoria clásica.

Esta construcción se generaliza trivialmente al caso en que tenemos varios operadores de posición. Las dos hipótesis fundamentales han sido que estos operadores eran simultáneamente diagonalizables y que el Hamiltoniano era cuadrático en los impulsos, de manera de poder eliminar a éstos mediante una integración Gaussiana. Ambas hipótesis rigen para una teoría de campos escalares, reemplazando a los operadores “de posición” por los operadores de campo, supuestos observables, y sus impulsos conjugados - los operadores de campo efectivamente conmutan a tiempos iguales, por las relaciones de conmutación canónicas. Por lo tanto, la generalización de esta construcción para obtener amplitudes de transición en una teoría de campos escalares es inmediata.

En la teoría del campo de Dirac, ni los operadores de campo son hermíticos, ni el Hamiltoniano es cuadrático en los impulsos. Por lo tanto, no podemos simplemente utilizar esta construcción para justificar la cuantificación del campo de Dirac mediante integrales de camino, que es el próximo tema.

References

- [1] T. Lancaster y S. Blundell, *Quantum Field Theory for the gifted amateur*, Oxford (2014).
- [2] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, John Wiley & sons, 1981.