1 Integrales de camino sobre estados coherentes

(ver [1, 2, 3])

Ya vimos que la cuantificación mediante integrales de camino usando la "trotterización" del Hamiltoniano no podía aplicarse de una manera directa a campos fermiónicos. Por suerte, existe otra manera de introducir integrales de camino, usando las propiedades de los *estados coherentes*.

Supongamos un sistema donde la única variable es el número de partículas, es decir, tengo una *base de Fock* donde el estado $|n\rangle$ indica la presencia de n partículas. Entonces puedo definir el *operador de destrucción*

$$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{1}$$

y el *operador de creación*

$$a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{2}$$

Obviamente

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1 \tag{3}$$

Vamos a asumir que el hamiltoniano es alguna función $H\left[a^\dagger, a\right]$ de estos dos operadores y que está *ordenado normalmente*, es decir, que los operadores de creación siempre aparecen a la izquierda de los de destrucción.

Un estado coherente es un autoestado del operador de destrucción

$$a\,|z\rangle = z\,|z\rangle \tag{4}$$

Como a no es hermítico, z en general es complejo. Desarrollando

$$|z\rangle = \sum_n c_n\,|n\rangle \tag{5}$$

es fácil ver que

$$c_n = \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \tag{6}$$

donde hemos adoptado la normalización $c_0 = \langle 0|z\rangle = 1$. El operador de creación no tiene autovectores (esto se puede demostrar inductivamente: si $a^\dagger\,|w\rangle = w\,|w\rangle$ y $w \neq 0$ entonces $\langle 0|w\rangle = 0$, y si $\langle n|w\rangle = 0$, entonces $w\,\langle n+1|w\rangle = 0$). En cambio

$$a^\dagger\,|z\rangle = \frac{d}{dz}\,|z\rangle \tag{7}$$

Entonces, si tengo dos estados coherentes,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\,\langle z'|z\rangle &= \left\langle z'|a^\dagger|z\right\rangle \\ &= z'^*\,\langle z'|z\rangle \end{aligned} \tag{8}$$

de modo que

$$\langle z'|z\rangle = e^{z'^* z} \tag{9}$$

(que se verifica fácilmente usando los desarrollos 5 con los coeficientes 6 para cada estado). Aunque los estados coherentes no son ortogonales, sí son completos, en el sentido de que todo estado se puede escribir como una superposición de estados coherentes. Para ver esto, es suficiente mostrar que existe una representación de la identidad

$$\int \frac{dz^* dz}{2\pi i}\,e^{-z^* z}\,|z\rangle\,\langle z| = \mathbf{1} \tag{10}$$

En esta fórmula $dz^* dz$ representa la medida de integración habitual en el plano complejo. Si parametrizamos $z = \rho e^{i\theta}$, entonces $dz^* dz = 2i\rho d\rho d\theta$. Entonces, lo que queremos demostrar es que

$$\int_0^\infty 2\rho d\rho\,e^{-\rho^2} \int \frac{d\theta}{2\pi}\;\langle n|z\rangle\,\langle z|m\rangle = \delta_{nm} \tag{11}$$

donde para los brackets usamos los coeficientes 6

$$\int_0^\infty 2\rho d\rho\, e^{-\rho^2}\rho^{n+m}\int \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{i(n-m)\theta} = \delta_{nm}\sqrt{n!m!} \tag{12}$$

que se verifica sabiendo que

$$\int_0^\infty dt\, t^n e^{-t} = \Gamma\left[n+1\right] = n! \tag{13}$$

Ahora vamos a usar todo esto para encontrar las amplitudes de transición entre estados coherentes

$$\left\langle z_{N+1}|e^{-iTH/\hbar}|z_0\right\rangle \tag{14}$$

Consideramos N tiempos intermedios $t_j = jdt$, con $dt = T/N$, y en cada uno de estos tiempos introducimos una representación de la identidad. Entonces

$$\left\langle z_{N+1}|e^{-iTH/\hbar}|z_0\right\rangle = \prod_{j=1}^{N}\int \frac{dz_j^* dz_j}{2\pi i}\ \left\langle z_{N+1}|e^{-idtH/\hbar}|z_N\right\rangle \left\{\prod_{j=1}^{N} e^{-z_j^* z_j}\left\langle z_j|e^{-idtH/\hbar}|z_{j-1}\right\rangle\right\} \tag{15}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\left\langle z_j|e^{-idtH/\hbar}|z_{j-1}\right\rangle &\approx \langle z_j|\left[\mathbf{1} - idtH/\hbar\right]|z_{j-1}\rangle \\ &= \left[\mathbf{1} - idtH\left[z_j^*, z_{j-1}\right]/\hbar\right]\langle z_j|z_{j-1}\rangle \\ &\approx e^{-idtH\left[z_j^*, z_{j-1}\right]/\hbar} e^{z_j^* z_{j-1}}\end{aligned} \tag{16}$$

y entonces

$$\left\langle z_{N+1}|e^{-iTH/\hbar}|z_0\right\rangle = \prod_{j=1}^{N}\int \frac{dz_j^* dz_j}{2\pi i}\ e^{-idtH\left[z_{N+1}^*, z_N\right]/\hbar} e^{z_{N+1}^* z_N} e^{i\sum_j dt\left[iz_j^*(z_j - z_{j-1})/dt - H\left[z_j^*, z_{j-1}\right]\right]} \tag{17}$$

que en el límite en que $N \to \infty$ se convierte en

$$\left\langle z_{N+1}|e^{-iTH/\hbar}|z_0\right\rangle = \int Dz^* Dz\ e^{z_{N+1}^* z_{N+1}} e^{iS} \tag{18}$$

con

$$S = \int dt\ \left[p\dot{z} - H\right] \tag{19}$$

donde hemos identificado

$$p = iz^* \tag{20}$$

2 Estados coherentes fermiónicos

Ahora queremos aplicar estas ideas para cuantificar mediantee stados coherentes un sistema efrmiónico, es decir, uno en el que vale el Principio de Pauli, de manera que la base de Fock se reduce a sólo dos estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

El pequeño escollo que tenemos que superar es que un sistema fermiónico no admitee stados coherentes. Manteniendo la normalización $\langle 0|z\rangle = 1$, un estado coherente sería

$$|z\rangle = |0\rangle + \beta\,|1\rangle \tag{21}$$

y entonces la ecuación $a\,|z\rangle = z\,|z\rangle$ se convierte en

$$\begin{aligned} z &= \beta \\ z^2 &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

o sea que el único estado coherente es el estado de vacío.

Para superar este inconveniente vamos a asumir que existe un nuevo tipo de número θ, las *variables de Grassmann*, con la propiedad de que $\theta^2 = 0$ (si hay varias variables θ_j, pedimos que $\{\theta_j, \theta_k\} = 0$). Entonces un estado coherente fermiónico es un estado de la forma

$$|\theta\rangle = |0\rangle + \theta\,|1\rangle \tag{23}$$

donde θ es una variable de Grassmann, y $a\,|\theta\rangle = \theta\,|\theta\rangle$.

Habiendo aceptado la existencia de variables de Grassmann, tenemos que aprender a hacer análisis con ellas. Asumimos que las variables de Grassmann se pueden sumar y multiplicar por númros complejos o por otras variables de Grassmann, y que el prducto es distributivo respecto de la suma.

Una función analítica de una variable de Grassmann es necesariamente lineal

$$f(\theta) = f_0 + f_1\theta \tag{24}$$

Definimos la derivación como

$$\frac{df}{d\theta} = f_1 \tag{25}$$

La derivación anticonmuta con variables de Grassmann. Para definir la integración sobre variables de Grassmann basta definir las dos integrales

$$\int d\theta\ 1 \quad y \quad \int d\theta\ \theta \tag{26}$$

Para orientarnos, pedimos que valga el "Teorema de Gauss"

$$\int d\theta\ \frac{df}{d\theta} = 0 \tag{27}$$

O sea, las variables de Grassmann viven en una variedad sin bordes. Como la derivada es una constante, esto requiere

$$\int d\theta\ 1 = 0 \tag{28}$$

Y para que la integración no sea trivial pedimos

$$\int d\theta\ \theta = 1 \tag{29}$$

Nótese que la integración es invariante frente a traslaciones

$$\int d\theta\ f(\theta + \theta_0) = f_1 = \int d\theta\ f(\theta) \tag{30}$$

Como ejercicio de integración sobre variables de Grassmann, veamos cómo son las integrales gaussianas. Una integral gaussiana sobre variables reales toma la forma

$$\int d^N x\ e^{-x_j M^j_k x^k} \propto (\det M)^{-1/2} \tag{31}$$

En el caso de una variable de Grassmann tenemos

$$\int d\theta d\theta^\dagger\ e^{\theta^\dagger K\theta} = K \tag{32}$$

En el caso de varias variables, tendríamos

$$\int \prod_j d\theta_j d\theta_j^\dagger\ e^{\theta_j^\dagger K^j_k \theta^k} \tag{33}$$

Asumiendo que la matriz K se puede diagonalizar y que valen las reglas de cambio de variables usuales, podemos llevar ésto a

$$\int \prod_j d\theta_j d\theta_j^\dagger\ e^{\sum_j \theta_j^\dagger K_j \theta^j} = \prod_j K_j = \det K \tag{34}$$

El paso siguiente es calcular el funcional generador de una variable de Grassmann. En el caso normal, tenemos

$$e^{-W[J]} = \int d^N x \; e^{-\frac{1}{2} x_j M^j_k x^k - J_k x^k} \propto (\det M)^{-1/2} \, e^{\frac{1}{2} J^j \left(M^{-1}\right)^k_j J_k} \tag{35}$$

En el caso de variables de Grassmann encontramos

$$\begin{aligned} e^{W\left[J, J^\dagger\right]} &= \int \prod_j d\theta_j d\theta^\dagger_j \; e^{\theta^\dagger_j K^j_k \theta^k + J^\dagger_k \theta^k + \theta^\dagger_k J^k} \\ &= \int \prod_j d\theta_j d\theta^\dagger_j \; e^{\left(\theta^\dagger_j + J^\dagger_l K^{-1l}_j\right) K^j_k \left(\theta^k + K^{-1k}_m J^m\right) - J^\dagger_l K^{-1l}_m J^m} \\ &= (\det K) \, e^{-J^\dagger_l K^{-1l}_m J^m} \end{aligned} \tag{36}$$

Ahora volvemos al problema de escribir los elementos de matriz del operador de evolución como una integral de camnio sobre estados coherentes. Lo único que necesitamos saber es que las únicas propiedades de estados coherentes que hemos usaso son el bracket 9 y la representación de la identidad 10. De modo que sólo necesitamos verificar que ambas relaciones valen para estados coherentes fermiónicos.

Efectivamente

$$\langle \vartheta | \theta \rangle = 1 + \vartheta^\dagger \theta = e^{\vartheta^\dagger \theta} \tag{37}$$

y

$$\int d\theta^\dagger d\theta \; e^{-\theta^\dagger \theta} \left(|0\rangle + \theta \, |1\rangle\right) \left(\langle 0| + \theta^\dagger \, \langle 1|\right) = |0\rangle \, \langle 0| + |1\rangle \, \langle 1| = \mathbf{1} \tag{38}$$

de manera que sólo se trata de copiar literalmente la construcción que hemos hecho para bosones.

References

[1] F. A. Berezin, *The method of second quantization*, Academic Press, 1966.

[2] J. W. Negele y H. Orland, *Quantum many-particle systems*, Perseus, 1998.

[3] E. Calzetta y B-L. Hu, *Nonequilibrium quantum field theory*, Cambridge UP, 2008.