1 La acción efectiva y el método del campo de fondo

Iniciamos el camino hacia la demostración de la libertad asintótica de las teorías de gauge no abelianas. El camino empieza con algunas consideraciones básicas sobre la acción efectiva.

Como vamos a trabajar directamente en la formulación euclídea, definimos el funcional generador (tomamos como ejemplo un campo escalar, pero todo lo que vamos a decir es completamente general)

$$e^{-W[J]/\hbar} = \int D\Phi \; e^{-(S[\Phi]+J\Phi)/\hbar} \tag{1}$$

(usamos la convención de Einstein también para integrales). El valor de expectación del campo entonces

$$\phi = \langle \Phi \rangle = \frac{\delta W}{\delta J} \tag{2}$$

Una segunda derivada da

$$\langle \Phi\Phi' \rangle - \phi\phi' = \langle \varphi\varphi' \rangle = -\hbar \frac{\delta^2 W}{\delta J \delta J'} \tag{3}$$

donde descomponemos

$$\Phi = \phi + \varphi \tag{4}$$

La acción efectiva

$$\Gamma[\phi] = W[J] - J\phi \tag{5}$$

Por las propiedades de la transformación de Legendre

$$J = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi} \tag{6}$$

Reemplazando 5 y 6 en 1 obtenemos

$$e^{-\Gamma[\phi]/\hbar} = \int D\Phi \; e^{-(S[\Phi]-\Gamma_{,\phi}(\Phi-\phi))/\hbar} \tag{7}$$

que tomamos como una ecuación para Γ que vamos a resolver iterativamente. La primer iteración es

$$\Gamma = S + \Gamma_1 \tag{8}$$

Entonces

$$e^{-\Gamma_1[\phi]/\hbar} = \int D\Phi \; e^{-(S[\Phi]-S[\phi]-S_{,\phi}\varphi-\Gamma_{1,\phi}\varphi)/\hbar} \tag{9}$$

Por definición, el valor de expectación

$$\langle \varphi \rangle = 0 \tag{10}$$

El rol de la fuente residual $\Gamma_{1,\phi}$ es asegurar este vínculo (ver también [1]). Por este motivo, no es necesario considerarla explícitamente, si al mismo tiempo se descartan todos los diagramas con inserciones de una partícula. En otras palabras, podemos pensar a Γ_1 como la acción efectiva de una nueva teoría, cuya acción es

$$S'[\varphi] = S[\phi+\varphi] - S[\phi] - S_{,\phi}\varphi \tag{11}$$

evaluada en $\langle \varphi \rangle = 0$, esto es, Γ_1 es la suma de todas las *burbujas de vacío irreducibles de una partícula* de la teoría con acción S'. Además, derivando una vez más 6 tenemos

$$-\mathbf{1} = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\phi\delta\phi''} \frac{\delta \phi''}{\delta J'} \tag{12}$$

de donde

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\phi\delta\phi''} G(x'', x') = \hbar \delta(x - x') \tag{13}$$

donde $G = \langle \varphi\varphi' \rangle$ es el único propagador euclídeo.

Por ejemplo, consideremos una teoría $\lambda\Phi^4$. La acción minkowskiana es

$$S_M = \int d^4x \, \left\{ \frac{1}{2}\Phi_{,t}^2 - \frac{1}{2}\Phi_{,i}^2 - \frac{1}{2}m^2\Phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\Phi^4 \right\} \tag{14}$$

Reemplazando $t \to -it$ encontramos

$$S_M = iS_E \tag{15}$$

donde

$$S_E = \int d^4x \, \left\{ \frac{1}{2}\Phi_{,t}^2 + \frac{1}{2}\Phi_{,i}^2 + \frac{1}{2}m^2\Phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\Phi^4 \right\} \tag{16}$$

La teoría S' entonces es

$$S_E' = \int d^4x \, \left\{ \frac{1}{2}\varphi_{,t}^2 + \frac{1}{2}\varphi_{,i}^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda \left(6\phi^2\varphi^2 + 4\phi\varphi^3 + \varphi^4 \right) \right\} \tag{17}$$

Observamos que φ tiene una masa (dependiente de la posición) $m^2 + \lambda\phi^2/2$, y un acoplamiento cúbico con constante $\lambda\phi/6$, además del acoplamiento cuártico.

Como sabemos, Γ_1 va a ser la suma de diagramas de Feynman de vacío construídos con estos acoplamientos y un propagador “desnudo” que obedece

$$\left[-\Box + m^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi^2 \right] G = \hbar\mathbf{1} \tag{18}$$

Consideremos un diagrama con I líneas, V_3 vértices cúbicos, V_4 vértices cuárticos y L lazos. Entonces

$$\begin{aligned} 2I &= 3V_3 + 4V_4 \\ I - V_3 - V_4 &= L - 1 \end{aligned} \tag{19}$$

Eliminado I obtenemos

$$L = 1 + \frac{1}{2}V_3 + V_4 \tag{20}$$

Por otro lado, cada línea interna aporta un factor de $\hbar$, y cada vértice uno de $\hbar^{-1}$. Como hay además un factor de $\hbar$ global, L es la potencia de $\hbar$ que corresponde al diagrama. Eso sugiere la “expansión en lazos”. Nótese que, como la masa del campo φ incluye el término que depende del campo de fondo, cada diagrama en la expansión en lazos es una suma de un número infinito de diagramas en la expansión en potencias de λ.

En lo que queda de esta parte del curso vamos a trabajar sólo con la teoría a un lazo, de manera que nos podemos quedar con

$$e^{-\Gamma_1/\hbar} = \int D\varphi \; e^{(-1/\hbar)\int d^4x \, \left\{ \frac{1}{2}\varphi_{,t}^2 + \frac{1}{2}\varphi_{,i}^2 + \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi^2 \right)\varphi^2 \right\}} \tag{21}$$

Podemos expandir Γ_1 en potencias de ϕ. Un término proporcional a ϕ^E corresponde a un diagrama con E líneas externas, por lo tanto $E/2$ vértices y otras tantas líneas internas. Por lo tanto, su grado de divergencia primitiva en d dimensiones es $d - E$. Vemos que sólo los términos cuadráticos y cuárticos pueden ser divergentes.

Calculemos explícitamente la divergencia en el término cuártico. Anticipando que vamos a trabajar en $d = 4 - \epsilon$ dimensiones, donde ϕ tiene unidades de $m^{(d-2)/2}$, reemplazamos $\lambda \to \lambda\mu^\epsilon$. Entonces

$$\Gamma_1^{(4)} = -\frac{\lambda^2\mu^{2\epsilon}}{16\hbar} \int d^dx d^dx' \; \phi^2(x)\,\phi^2(x')\,G^2(x - x') \tag{22}$$

Para calcular el término divergente es suficiente poner $\phi =$ constante. También usamos la transformada de Fourier

$$G(x - x') = \hbar \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \, \frac{1}{p^2 + m^2} \tag{23}$$

para encontrar

$$\Gamma_1^{(4)} = -\hbar \frac{\lambda^2 \mu^{2\epsilon}}{16} \int d^d x \; \phi^4 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \; \frac{1}{\left(p^2 + m^2\right)^2} \tag{24}$$

Calculamos de la manera usual

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \; \frac{1}{\left(p^2+m^2\right)^2} &= \int ds \; s \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \; e^{-s\left(p^2+m^2\right)} \\ &= \int ds \; s \; \frac{e^{-sm^2}}{(4\pi s)^{d/2}} \\ &= \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}\epsilon\right]}{(4\pi)^{d/2}} m^{-\epsilon} \end{aligned} \tag{25}$$

donde como de costumbre

$$\Gamma\left[\frac{1}{2}\epsilon\right] = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ldots \tag{26}$$

Finalmente

$$\Gamma_1^{(4)} = -\frac{\hbar}{(4\pi^2)} \frac{\lambda^2 \mu^\epsilon}{16} \int d^d x \; \phi^4 \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ldots\right] \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\epsilon/2} \tag{27}$$

La divergencia es sólo aparente, ya que se puede eliminar redefiniendo el parámetro λ_B en la acción clásica

$$\lambda_B = \mu^\epsilon \left\{\lambda + \frac{\hbar}{(4\pi^2)} \frac{3\lambda^2}{\epsilon}\right\} \tag{28}$$

El nuevo parámetro λ es finito pero μ- dependiente, ya que

$$0 = \epsilon \left\{\lambda + \frac{\hbar}{(4\pi^2)} \frac{3\lambda^2}{\epsilon}\right\} + \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \left\{1 + \frac{\hbar}{(4\pi^2)} \frac{6\lambda}{\epsilon}\right\} \tag{29}$$

de donde

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\lambda}{d\mu} &= -\epsilon\lambda \left\{1 + \frac{\hbar}{(4\pi^2)} \frac{3\lambda}{\epsilon}\right\} \left\{1 - \frac{\hbar}{(4\pi^2)} \frac{6\lambda}{\epsilon}\right\} \\ &= \lambda \left\{-\epsilon + \frac{3\hbar}{(4\pi^2)} \lambda\right\} \end{aligned} \tag{30}$$

Nótese la aparición de un punto fijo no trivial cuando $\epsilon > 0$.

En general, definimos la función β como

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} = \beta(\lambda) \tag{31}$$

De manera que hemos demostrado que en $d = 4$ dimensiones, la función β de la teoría $\lambda\phi^4$ es positiva.

Supongamos que hay un observable f, por ejemplo una amplitud de scattering, que podemos identificar como la "constante de acoplamiento" para un proceso, por ejemplo una colisión, en una escala de energía dada. Es decir, f depende de la energía, de λ y de la escala de renormalización μ. Por la arbitrariedad en la elección de μ deberíamos tener

$$\mu \frac{df}{d\mu} + \beta(\lambda) \frac{df}{d\lambda} = 0 \tag{32}$$

Mientras que por análisis dimensional, suponiendo que f sea adimensional

$$E \frac{df}{dE} + \mu \frac{df}{d\mu} = 0 \tag{33}$$

Eliminando a μ de estas ecuaciones, encontramos que

$$E\frac{df}{dE} - \beta\left(\lambda\right)\frac{df}{d\lambda} = 0 \tag{34}$$

Si $\beta\left(\lambda\right) = a\lambda^2$ y ponemos la condición de que λ es la constante de acoplamiento medida a la energía E_0, obtenemos

$$f\left(E\right) = \frac{\lambda}{1 - a\lambda \ln \frac{E}{E_0}} \tag{35}$$

Es decir, la constante de acoplamiento crece con la energía, volviéndose infinita a una energía dada (por supuesto, la teoría de perturbaciones que estamos haciendo deja de valer mucho antes de eso). La electrodinámica cuántica tiene un comportamiento similar.

La singularidad de las teorías de gauge no abelianas es que la función β es negativa (dadas ciertas restricciones acerca de los campos de materia) por lo cual obtenemos el comportamiento inverso: la teoría se comporta como débilmente acoplada a altas energías. Este fenómeno, llamado la "libertad asintótica" de las teorías de gauge, es esencial para su éxito como descripción de las interacciones entre partículas elementales.

References

[1] E. Calzetta y B-L. Hu, *Nonequilibrium quantum field theory*, Cambridge UP, 2008.