1 La acción euclídea

Antes de volver a los campos de gauge, queremos hacer un comentario acerca de campos euclídeos.

La acción del campo de Dirac Minkowskiano es

$$S_M = \int d^4x \, \bar{\psi} \left[i\hbar \gamma_M^\mu \partial_\mu - m \right] \psi \tag{1}$$

donde las matrices de Dirac obedecen

$$\gamma_M^{02} = \mathbf{1}; \quad \left\{ \gamma_M^0, \gamma_M^i \right\} = 0; \quad \left\{ \gamma_M^i, \gamma_M^j \right\} = -2\delta^{ij} \tag{2}$$

Si reemplazamos $t \to -it$ (y por lo tanto $\partial_{tM} = i\partial_{tE}$) la acción se convierte en

$$S_{M/E} = i \int d^4x \, \bar{\psi} \left[\hbar \gamma_M^0 \partial_t - i\hbar \gamma_M^j \partial_j + m \right] \psi \tag{3}$$

Definimos las matrices de Dirac euclídeas

$$\gamma_M^0 = \gamma_E^0; \quad \gamma_M^j = i\gamma_E^j \tag{4}$$

Las matrices de Dirac euclídeas son hermíticas y satisfacen

$$\left\{ \gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu \right\} = 2\delta^{\mu\nu} \tag{5}$$

Finalmente, obtenemos el resultado buscado

$$S_M = iS_E \tag{6}$$

$$S_E = \int d^4x \, \bar{\psi} \left[\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + m \right] \psi \tag{7}$$

El propagador de Dirac

$$G^{ab}(x, x') = \left\langle \psi^a(x) \bar{\psi}^b(x') \right\rangle \tag{8}$$

satisface

$$\left[\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + m \right] G = \mathbf{1} \delta(x - x') \tag{9}$$

Por lo tanto, su transformada de Fourier

$$G(p) = \frac{-i\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 + m^2} \tag{10}$$

Observamos que

$$\left\langle \bar{\psi}^b(x') \psi^a(x) \right\rangle = -G^{ab}(x, x') \tag{11}$$

Un lazo de campos de Dirac lleva un factor (-1) adicional a un lazo idéntico de campos bosónicos.

Además de la transformación 4 queremos definir matrices de Dirac en d dimensiones.

En $d = 4$ dimensiones, existe una matriz $\gamma^5 \propto \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ que anticonmuta con todas las matrices de Dirac. La existencia de esta matriz hace que la traza de un número impar de matrices de Dirac distintas sea necesariamente cero.

Además, en $d = 4$ dimensiones es posible demostrar que el conjunto formado por a) la identidad, b) las matrices de Dirac, c) el producto de dos matrices de Dirac distintas, d) el producto de tres matrices de Dirac distintas, y e) el producto de todas las matrices de Dirac, es linealmente independiente. Como estas son $16 = 2^d$ matrices, el número mínimo de filas y columnas que pueden tener las matrices de Dirac es $4 = 2^{d/2}$.

Entonces vamos a asumir que las matrices de Dirac en d dimensiones son d matrices de $2^{d/2} \times 2^{d/2}$, tales que la traza del producto de un número impar de matrices es cero. Para los productos de un número par, de la regla de anticonmutación se deduce que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\, \mathbf{1} &= 2^{d/2} \\
\mathrm{tr}\, \gamma^\mu \gamma^\nu &= 2^{d/2} \delta^{\mu\nu} \\
\mathrm{tr}\, \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma &= 2^{d/2} \left(\delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} - \delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} + \delta^{\mu\sigma} \delta^{\rho\nu} \right)
\end{aligned} \tag{12}
$$

Podemos hacer consideraciones similares para los campos de gauge. Consideremos por sencillez el caso del electromagnetismo. La acción Minkowskiana es

$$
S_M = \frac{1}{4} \int d^4 x \left[\left(\partial_t A_j - \partial_j A_0 \right)^2 - F_{jk} F^{jk} \right] \tag{13}
$$

Que con los cambios $t \to -it$, $\partial_{tM} = i\partial_{tE}$ se convierte en

$$
S_{M/E} = \frac{i}{4} \int d^4 x \left[\left(\partial_t A_j + i\partial_j A_0 \right)^2 + F_{jk} F^{jk} \right] \tag{14}
$$

de manera que para preservar la invariancia de gauge definimos

$$
A_{0M} = i A_{0E} \tag{15}
$$

y entonces $S_M = i S_E$,

$$
S_E = \frac{1}{4} \int d^4 x \left[\left(\partial_t A_j - \partial_j A_0 \right)^2 + F_{jk} F^{jk} \right] \tag{16}
$$

Finalmente, observamos que en d dimensiones los campos de Dirac tienen unidades de $m^{(d-1)/2}$, los campos de gauge tienen unidades de $m^{(d-2)/2}$, y por lo tanto la carga tiene unidades de $m^{(4-d)/2} = m^{\epsilon/2}$ si $d = 4 - \epsilon$ (o sea, g^2 tiene las mismas unidades que λ).

2 Integrales de camino para campos de gauge

El formalismo de integrales de camino para campos bosónicos que hemos usado hasta ahora no sirve para campos de gauge. La parte cuadrática de la acción es

$$
S = \frac{1}{2} \int d^4 x \; \partial_\mu A_\nu \left[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right] \tag{17}
$$

Lo que daría un propagador de Feynman

$$
\left[-\delta^\mu_\rho \Box + \partial^\mu \partial_\rho \right] G^{\rho\nu} = \delta^{\mu\nu} \delta \left(x, x' \right) \tag{18}
$$

o transformando Fourier

$$
\left[\delta^\mu_\rho p^2 - p^\mu p_\rho \right] G^{\rho\nu} = \delta^{\mu\nu} \tag{19}
$$

Pero esta ecuación no tiene solución (si multiplicamos ambos miembros por p_μ llegamos a $p^\nu = 0$, una contradicción). El propagador no existe porque el Hessiano de la acción tiene direcciones nulas, y el Hessiano de la acción tiene direcciones nulas porque es una teoría de gauge.

Agregar una masa a los campos no resuelve el problema. Ahora la ecuación para el propagador es

$$
\left[\delta^\mu_\rho p^2 - p^\mu p_\rho + m^2 \delta^\mu_\rho \right] G^{\rho\nu} = \delta^{\mu\nu} \tag{20}
$$

de donde

$$
G^{\mu\nu} = \frac{1}{p^2 + m^2} \left[\delta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] + \frac{1}{m^2} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \tag{21}
$$

Si bien el propagador ahora existe, su comportamiento UV es desastroso.

Una solución radical sería eliminar los grados de libertad de gauge. Supongamos que tenemos un sistema de coordenadas $\epsilon = \left(\epsilon^1, \epsilon^2, \ldots \epsilon^n \right)$ en el grupo de gauge, y llamamos A^ϵ el resultado de aplicar a los campos A^μ la transformación correspondiente al elemento ϵ del grupo. Un fijado de gauge sería una función $f\left[A \right]$ tal que para toda configuración de campos A existe un único ϵ tal que

$$f\left[A^{\epsilon}\right]=0 \tag{22}$$

Para asegurarnos que no haya direcciones nulas pedimos que

$$\det \left.\frac{\partial f\left[A^{\epsilon}\right]}{\partial \epsilon}\right|_{f=0} \neq 0 \tag{23}$$

(esto garantiza la unicidad de la solución localmente, pero no globalmente, el *problema de Gribov*). Una solución sería restringir la integral de camino a configuraciones en la variedad $f[A]=0$, ya que las direcciones nulas de la acción son transversas a esta variedad. El problema es cómo hacerlo sistemáticamente.

Suponemos que podemos definir una medida de integración sobre el grupo tal que

$$\int D\epsilon\, \delta\left(\epsilon-\epsilon_0\right)=1 \tag{24}$$

para todo ϵ_0. Si g es una función sobre el grupo tal que $g\left(\epsilon_0\right)=0$, podemos escribir

$$\delta\left(\epsilon-\epsilon_0\right)=\det \frac{\partial g}{\partial \epsilon} \delta(g(\epsilon)) \tag{25}$$

En particular, podemos elegir

$$g(\epsilon)=f\left[A^{\epsilon}\right] \tag{26}$$

Entonces tenemos que

$$\int DA\, e^{-S}=\int D\epsilon \int DA\, e^{-S} \;\det \left.\frac{\partial f\left[A^{\epsilon}\right]}{\partial \epsilon}\right|_{f=0} \delta\left(f\left[A^{\epsilon}\right]\right) \tag{27}$$

Supongamos que la medida de integración es invariante frente a transformaciones de gauge. Esto es obvio para teorías abelianas, donde una transformación de gauge es una traslación; en teorías no abelianas es una restricción sobre la teoría. Para una transformación de gauge infinitesimal

$$A^j \rightarrow A^j-\frac{1}{g} \epsilon^j-A^k C_{kl}^j \epsilon^l \tag{28}$$

De modo que

$$DA \rightarrow DA\left(1-C_{jl}^j \epsilon^l\right) \tag{29}$$

y la invariancia requiere $C_{jl}^j=0$. Entonces podemos hacer un cambio de variables en la integral $A \rightarrow A^{-\epsilon}$, de modo que

$$\int DA\, e^{-S}=\int D\epsilon \int DA\, e^{-S} \;\det \left.\frac{\partial f\left[A^{\epsilon}\right]}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} \delta(f[A]) \tag{30}$$

Eliminado la "constante" igual al volumen del grupo, tenemos una integral de camino donde hemos eliminado las direcciones nulas.

Por cierto, si f es un fijado de gauge, también lo es $f-f_0$ para cualquier constante f_0, y ya que estamos podemos promediar sobre f_0 con un peso gaussiano. También podemos exponenciar el determinante funcional introduciendo variables de Grassmann. El resultado es S se convierte en una nueva acción

$$S=\int d^4x\left\{\frac{1}{4} F_{j\mu\nu} F^{j\mu\nu}+\frac{1}{2\alpha} f_k[A] f^k[A]+i \xi_j \left.\frac{\partial f^j\left[A^{\epsilon}\right]}{\partial \epsilon^k}\right|_{\epsilon=0} \eta^k\right\} \tag{31}$$

Estamos tratando a los "campos fantasma" ξ y η como si fueran reales, la i da cuenta de que $(\xi\eta)^{\dagger}=\eta^{\dagger}\xi^{\dagger}=-\xi\eta$.

Por ejemplo, consideremos la teoría de Maxwell y elijamos un "gauge de Lorenz"

$$f[A]=\partial_\mu A^\mu \tag{32}$$

$$\left.\frac{\partial f\left[A^{\epsilon}\right]}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0}=\frac{-1}{g} \Box \delta\left(x-x'\right) \tag{33}$$

Entonces ahora el propagador obedece

$$\left[\delta^{\mu}_{\rho} p^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) p^{\mu} p_{\rho}\right] G^{\rho\nu} = \delta^{\mu\nu} \tag{34}$$

con solución

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{p^2}\left[\delta^{\mu\nu} - (1-\alpha)\,\frac{p^{\mu}p^{\nu}}{p^2}\right] \tag{35}$$

las dos elecciones más comunes de α son $\alpha = 0^+$ (gauge de Landau) y $\alpha = 1$ (gauge de Feynman). En ciertas condiciones es conveniente dejar α arbitrario para poder controlar que el resultado final sea independiente de su valor - que es una condición que cualquier resultado observable tiene que cumplir necesariamente.

En una teoría gauge abeliana los fantasmas, si elegimos por ejemplo el gauge de Lorenz, están desacoplados. En una teoría de gauge no abeliana, con el mismo gauge, aparece una interacción entre los campos de gauge y los fantasmas, además de entre los campos de gauge entre sí.

El resultado de elegir un valor de $\alpha \neq 0$ es permitir que campos de gauge longitudinales, que no son físicos, circulen en las líneas internas de los lazos. Pero entonces los fantasmas contribuyen diagramas similares, pero donde cada lazo de campos fantasmas lleva un signo menos porque los fantasmas son Grassmann. De esa manera, si bien diagramas de Feynman individuales pueden contener grados de libertad no físicos, éstos se cancelan en la suma final.