1 La polarización del vacío

Ahora tenemos una teoría a la que le podemos aplicar las generales de la ley, en particular las únicas divergencias primitivas van a estar asociadas a términos cuadráticos, cúbicos y cuárticos. Sin embargo, eso no garantiza la renormalizabilidad, ya que hay términos dimensionalmente permitidos que no están en la acción clásica, como por ejemplo un término de masa para los campos de gauge.

En la teoría de Maxwell, un término así sólo puede provenir de la interacción de los campos de gauge con los fermiones. La acción es

$$S = \int d^4x\, \bar{\psi}\left[\hbar\gamma^\mu D_\mu + m\right]\psi \tag{1}$$

En d dimensiones, A_μ tiene dimensiones de $m^{(d-2)/2}$ y ψ de $m^{(d-1)/2}$, de modo que la carga adquiere un factor $\mu^{\epsilon/2}$ ($d = 4 - \epsilon$) y la derivada covariante es

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - ie\mu^{\epsilon/2}A_\mu\psi \tag{2}$$

Desarrollando a segundo orden

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^{(2)} &= (-\hbar)\,\frac{1}{2}\,(-1)\,e^2\mu^\epsilon \int d^4x d^4x'\; A_\mu(x)\,A_\nu(x')\left\langle\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)(x)\left(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi\right)(x')\right\rangle \\
&= (-\hbar)\,\frac{1}{2}e^2 \int d^dx d^dx'\; A_\mu(x)\,A_\nu(x')\,\Pi^{\mu\nu}(x-x')
\end{aligned} \tag{3}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(x-x') &= \mathrm{tr}\;\gamma^\mu G(x,x')\,\gamma^\nu G(x',x) \\
&= \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\; e^{ip(x-x')}\;\Pi^{\mu\nu}[p]
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\Pi^{\mu\nu}[p] = \int \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{tr}\;\gamma^\mu\left[-i\gamma^\rho q_\rho + m\right]\gamma^\nu\left[-i\gamma^\sigma(p+q)_\sigma + m\right]}{(q^2+m^2)\left((p+q)^2+m^2\right)}$$

de modo que

$$\Pi^{\mu\nu}[p] = 2^{d/2}\int \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{\left[m^2\delta^{\mu\nu} - q_\rho(p+q)_\sigma\left(\delta^{\mu\rho}\delta^{\nu\sigma} - \delta^{\mu\nu}\delta^{\rho\sigma} + \delta^{\mu\sigma}\delta^{\nu\rho}\right)\right]}{(q^2+m^2)\left((p+q)^2+m^2\right)} \tag{5}$$

Introducimos parámetros de Feynman

$$\Pi^{\mu\nu}[p] = 2^{d/2}\int_0^1 dx \int \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{\left[m^2\delta^{\mu\nu} - (q-xp)_\rho\left((1-x)\,p+q\right)_\sigma\left(\delta^{\mu\rho}\delta^{\nu\sigma} - \delta^{\mu\nu}\delta^{\rho\sigma} + \delta^{\mu\sigma}\delta^{\nu\rho}\right)\right]}{\left[q^2+m^2+x(1-x)\,p^2\right]^2} \tag{6}$$

Descartamos términos impares

$$\Pi^{\mu\nu}[p] = 2^{d/2}\int_0^1 dx \int \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{\left[m^2\delta^{\mu\nu} + \left(x(1-x)\,p_\rho p_\sigma - q_\rho q_\sigma\right)\left(\delta^{\mu\rho}\delta^{\nu\sigma} - \delta^{\mu\nu}\delta^{\rho\sigma} + \delta^{\mu\sigma}\delta^{\nu\rho}\right)\right]}{\left[q^2+m^2+x(1-x)\,p^2\right]^2} \tag{7}$$

Por simetría

$$\Pi^{\mu\nu}[p] = 2^{d/2}\int_0^1 dx \int \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{\left[m^2\delta^{\mu\nu} + \left(x(1-x)\,p_\rho p_\sigma - \frac{q^2}{d}\delta_{\rho\sigma}\right)\left(\delta^{\mu\rho}\delta^{\nu\sigma} - \delta^{\mu\nu}\delta^{\rho\sigma} + \delta^{\mu\sigma}\delta^{\nu\rho}\right)\right]}{\left[q^2+m^2+x(1-x)\,p^2\right]^2} \tag{8}$$

Contrayendo

$$\Pi^{\mu\nu}[p] = 2^{d/2}\int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}\left[-A\left(p^2\delta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu\right) + B^{\mu\nu}\right] \tag{9}$$

donde

$$A = \frac{2x(1-x)}{\left[q^2 + m^2 + x(1-x)p^2\right]^2} \tag{10}$$

y

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial q_\nu}\frac{q^\mu}{\left[q^2 + m^2 + x(1-x)p^2\right]} \tag{11}$$

integra a 0. Vemos que no sólo no aparece un término de masa, sino que de hecho la corrección a un lazo es invariante de gauge.

2 Invariancia BRST

Como cabría sospechar, existe una razón para las cancelaciones "milagrosas" que subyacen la renormalizabilidad de las teorías de gauge. La razón es que la acción efectiva, por supuesto, no es invariante de gauge (para eso fijamos un gauge) pero posee sin embargo una simetría más compleja, que mezcla los campos físicos y los fantasmas.

Consideramos una teoría completamente general, con campos A^J que incluyen tanto los campos de gauge propiamente dichos como los campos de materia. La acción S_G es invariante frente a transformaciones

$$A^J \to A'^J = A^J + Q^J_B[A]\,\epsilon^B \tag{12}$$

(índices repetidos también implican integración sobre índices continuos). Estas transformaciones forman un grupo, ya que

$$\frac{\delta Q^J_B}{\delta A^K}Q^K_D - \frac{\delta Q^J_D}{\delta A^K}Q^K_B = Q^J_C C^C_{BD} \tag{13}$$

Podríamos dejar que las "constantes" de estructura dependan de los campos, pero no lo vamos a necesitar en este curso.

La afirmación de que la acción es invariante de gauge por lo tanto implica una serie de identidades

$$\frac{\delta S_G}{\delta A^J}Q^J_D = 0 \tag{14}$$

Eso indica que tiene que haber relaciones entre los distintos términos que forman la acción.

Cuando usamos el método de Fadeev-Popov, rompemos explícitamente esta simetría ya que agregamos un término de fijado de gauge

$$S_{GF} = \frac{1}{2\alpha}\int d^d x\; f^A f^A \tag{15}$$

donde el operador

$$G^A_{ghB} = \frac{\delta f^A}{\delta A^J}Q^J_B \tag{16}$$

es no-singular. Entonces tenemos que incluir tambien campos fantasmas con acción

$$S_{GH} = i\int d^d x\; \xi_A G^A_{ghD}\eta^B \tag{17}$$

De modo que la acción total es

$$S = S_G + S_{GF} + S_{GH} \tag{18}$$

Ahora vamos a hacer una trasformación de gauge con parámetros $\epsilon^B = \theta\eta^B$, donde θ es una "constante" de Grassmann. S_G es invariante porque después de todo es una transformación de gauge. S_{GF} transforma en

$$S_{GF} \to S'_{GF} = S_{GF} + \frac{1}{\alpha} \int d^d x \; f^A G^A_{ghB} \theta \eta^B \tag{19}$$

Esta transformación se puede compensar definiendo la transformación de los fantasmas

$$\begin{aligned} \eta^B \to \eta'^B &= \eta^B \\ \xi_A \to \xi'_A &= \xi_A + \frac{i}{\alpha} f_A \theta \end{aligned} \tag{20}$$

Decimos que la acción total goza de la "simetría BRST" (por Becchi, Rouet, Stora y Tyutin)

Esta invariancia va a determinar una simetría 'heredada" por la acción efectiva, que entonces, como en 14, tiene que satisfacer una serie de identidades, que se derivan de una ecuación maestra, que es la identidad de Zinn-Justin, ver

J. Zinn-Justin, Quantum field theory and critical phenomena, Oxford (2002).