1. Invariancia BRST e identidad de Zinn-Justin

Como cabría sospechar, existe una razón para las cancelaciones “milagrosas” que subyacen la renormalizabilidad de las teorías de gauge. La razón es que la acción efectiva, por supuesto, no es invariante de gauge (para eso fijamos un gauge) pero posee sin embargo una simetría más compleja, que mezcla los campos físicos y los fantasmas.

Concretamente, consideremos la acción efectiva, ahora sí incluyendo las fuentes (no vamos a usar la notación comprimida de la vez pasada. Ver B. y C. DeWitt, *Relativity, groups and topology* (1964)).

$$e^{-\Gamma} = \int DAD\psi D\bar{\psi} D\eta D\xi \; e^{-[S_M+S_G+S_{GF}+S_{GH}+F]} \tag{1}$$

con

$$F = \int d^4x \left[J^\mu_A A^A + J^i_\psi \psi_i + \bar{\psi}_j J^j_{\bar{\psi}} + \xi_A J^A_\xi + J_{\eta B}\eta^B \right] \tag{2}$$

donde S_M y S_G son invariantes frente a transformaciones de gauge

$$\begin{aligned} A'^A_\mu &= A^A_\mu + \frac{1}{g} D_\mu \epsilon^A \\ \psi'^j &= \psi^j - i\epsilon^A T^j_{Ak}\psi^k \end{aligned} \tag{3}$$

Asumimos que las constantes de estructura son completamente antisimétricas. Elegimos un gauge arbitrario f^A, de modo que

$$\begin{aligned} S_{GF} &= \frac{1}{2\alpha}\int d^4x \; f^A f_A \\ S_{GH} &= \frac{i}{g}\int d^4x \; \xi_A \, \frac{\delta f^A}{\delta A^{B\mu}} D_\mu \eta^B \end{aligned} \tag{4}$$

Consideremos una transformación de gauge con parámetro $\epsilon^A = i\theta\eta^A$, donde θ es una constante Grassmann. Obviamente S_M y S_G son invariantes, pero

$$S_{GF} \to S_{GF} + \frac{1}{g\alpha}\int d^4x \; f^A \frac{\delta f^A}{\delta A^{B\mu}} D_\mu \left(i\theta\eta^B \right) \tag{5}$$

Sin embargo, este cambio se puede compensar mediante el cambio que se produce en S_{GH}, si transformamos

$$\xi_A \to \xi'_A = \xi_A - \frac{1}{\alpha} f_A \theta \tag{6}$$

con esta transformación $S_M + S_D + S_{GF} + S_{GH}$ es invariante. Esta es la simetría BRST.

Escribamos la acción efectiva como

$$e^{-\Gamma} = \int DA' D\psi' D\bar{\psi}' D\eta' D\xi' D\eta \; e^{i[S_M+S_G+S_{GF}+S_{GH}+F]\left(A',\psi',\bar{\psi}',\xi'\eta'\right)} \tag{7}$$

que podemos hacer ya que es solo renombrar una variable muda. Obviamente el término con las fuentes rompe la simetría BRST. Pero si escribimos A'^μ_A etc. en términos de A^μ_A (que no es una transformación de gauge, sino un cambio de variables dentro de la integral), encontramos, por la invariancia de la medida y de la acción clásica, que

$$e^{-\Gamma} = \int DAD\psi D\bar{\psi} D\eta D\xi \; e^{-[S_M+S_G+S_{GF}+S_{GH}+F+\delta F]} \tag{8}$$

$$\delta F = \int d^4x \left[\frac{i}{g} J^\mu_A D_\mu \theta\eta^A + J^j_\psi \theta\eta^A T^j_{Ak}\psi^k - \bar{\psi}_j \theta\eta^A T^j_{Ak} J^k_{\bar{\psi}} - \frac{1}{\alpha} f_A \theta J^A_\xi \right] \tag{9}$$

de manera que debe ser

$$\int DAD\psi D\bar{\psi} D\eta D\xi \; e^{-[S_M+S_G+S_{GF}+S_{GH}+F]} \left(1 - e^{-\delta F} \right) = 0 \tag{10}$$

Desarrollando a primer orden (el único no nulo) en θ y reemplazando las fuentes por su valor encontramos que

$$\int d^4 z \left[\frac{i}{g} \frac{\delta \Gamma}{\delta A^{A\mu}(z)} \left\langle D^\mu \eta^A(z) \right\rangle + \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi^j(z)} \left\langle \eta^A(z) T^j_{Ak} \psi^k(z) \right\rangle \right.$$

$$- \quad \left. \left\langle \bar{\psi}_j(z) \eta^A(z) \right\rangle T^j_{Ak} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_k(z)} - \frac{1}{\alpha} \left\langle f_A(z) \right\rangle \frac{\delta \Gamma}{\delta \xi_A(z)} \right] = 0 \tag{11}$$

que es la *identidad de Zinn-Justin* (ver J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*). Esta identidad expresa la invariancia de la acción efectiva ante *transformaciones de gauge cuánticas*.

La identidad de Zinn-Justin es valiosa porque vale *off-shell*; de hecho, on-shell es trivial, porque las derivadas primeras de la acción se anulan. En realidad es una ecuación maestra de la cual se derivan identidades más simples derivando un cierto número de veces la identidad de Zinn-Justin y recién entonces poniendo todos los campos on-shell. estas identidades se conocen como *identidades de Takahashi-Ward* en el caso abeliano, y de *Slavnov-Taylor* en el no-abeliano.

El caso no abeliano se complica por la necesidad de resolver los valores de expectación que aparecen en la identidad como funciones de los campos de fondo. El caso abeliano es significativamente más simple, porque las transformaciones de gauge son lineales. Además, si adoptamos un gauge tipo Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, los fantasmas quedan completamente desacoplados; ipso facto no hay correcciones radiativas a S_{GH}, el término de fantasmas en Γ es el mismo que en S, es decir

$$S_{GH} = \frac{i}{e} \int d^4 x \, \xi \, \Box \eta \tag{12}$$

Los valores de expectación incluyendo a η se desacoplan, quedando expresados directamente en términos de los campos de fondo.

Empecemos por derivar (variacionalmente) la identidad de Zinn-Justin respecto a $\eta(x)$. Entonces

$$-\frac{i}{e} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x)} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi^l(x)} \psi^l(x) - \bar{\psi}_l(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_l(x)} - \frac{i}{e\alpha} \partial_\mu \Box A^\mu(x) = 0 \tag{13}$$

Vamos a ver dos ejemplos de identidades de Takahashi-Ward deducidas de 13.

En nuestro primer ejemplo simplemente derivamos respecto a $A^\nu(y)$ y ponemos todos los backgrounds iguales a cero. Obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x) \delta A^\nu(y)} + \frac{1}{\alpha} \partial_\mu \Box \delta^{\mu\nu} \delta(x-y) = 0 \tag{14}$$

Transformando Fourier y usando que el Hessiano de la acción efectiva es (menos) la inversa del propagador

$$p_\mu \left[G^{-1} \right]^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{\alpha} p^2 p^\nu \tag{15}$$

Esta ecuación dice que la parte longitudinal del propagador de Feynman exacto es la misma que la del propagador desnudo deducido de la acción clásica. En otras palabras, la parte longitudinal de la inversa del propagador no recibe correcciones a ningún orden en $\hbar$; en particular, es imposible que aparezca un término de masa en teoría de perturbaciones, y el término infinito dependiendo de las derivadas del campo de gauge sale directamente proporcional a $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, como ya hemos verificado a fuerza bruta.

Otra identidad importante se obtiene derivando 13 respecto de $\psi^j(y)$ y $\bar{\psi}_k(y')$

$$-\frac{i}{e} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A^\mu(x) \delta \bar{\psi}_k(y') \delta \psi^j(y)} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}_k(y') \delta \psi^j(x)} \delta(x-y) - \delta(x-y') \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}_k(x) \delta \psi^j(y)} = 0 \tag{16}$$

Si reemplazamos Γ por S_M, 16 es una identidad.

El contenido no trivial de la identidad 16 se revela cuando consideramos los posibles términos infinitos que aparecen en el desarrollo perturbativo de la acción efectiva. Supongamos que la acción libre de los fermiones adquiere un factor (infinito) K_f y el vértice fotón-fermión-fermión adquiere un factor K_{int}. Entonces, puesto que 16 sigue valiendo, debe ser $K_f = K_{int}$; la derivada covariante renormaliza como un todo, y no cada término por separado.

Si seguimos con la renormalización, para absorber estos infinitos procedemos a redefinir

$$
\begin{aligned}
&\psi \to Z_F \psi \\
&A_\mu \to Z_G A_\mu \\
&e \to Z_e e
\end{aligned} \tag{17}
$$

Entonces l acción libre de los fermiones adquiere un factor Z_F^2 pero el vértice adquiere un factor $Z_F^2 Z_e Z_G$, y para preservar la identidad de Ward hace falta que $Z_e = Z_G^{-1}$. Esto es fundamental, ya que une puede tener una teoría con muchos campos fermiónico distintos, pero la carga es siempre la misma: si la carga de cada fermión tuviera una renormalización distinta, se destruiría la invariancia de gauge. La identidad de Ward garantiza que sigue habiendo una única carga a todo orden en teoría de perturbaciones.

La última amenaza a la renormalizabilidad proviene de los potenciales infinitos cúbicos y cuárticos en el campo de Maxwell. Por el Teorema de Weinberg los infinitos corresponden a términos locales en la acción efectiva. Por invariancia Lorentz, las únicas posibilidades son

$$
K_3 \int d^4z \ (A^\nu A_\nu)\, \partial_\mu A^\mu \tag{18}
$$

y

$$
K_4 \int d^4z \ (A^\nu A_\nu)^2 \tag{19}
$$

Ahora, derivando sucesivas veces la identidad de Zinn-Justin 13 obtenemos

$$
\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\mu(x)\, \delta A_\nu(y)\, \delta A_\rho(y')} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta^4 \Gamma}{\delta A_\mu(x)\, \delta A_\nu(y)\, \delta A_\rho(y')\, \delta A_\sigma(y'')} = 0 \tag{20}
$$

que sólo es compatible con $K_3 = K_4 = 0$.

2. La función β en QED

Sabiendo que la renormalización de la carga es la inversa de la renormalización del campo de gauge, podemos retomar la cuenta de la polarización del vacío para obtener la función β en una teoría de gauge abeliana. Habíamos visto que

$$
\Gamma_1^{(2)} = (-\hbar)\, \frac{1}{2} e^2 \int d^dx d^dx' \ A_\mu(x)\, A_\nu(x')\, \Pi^{\mu\nu}(x - x') \tag{21}
$$

y

$$
\Pi^{\mu\nu}[p] = -2^{d/2} \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^dq}{(2\pi)^d} A \left(p^2 \delta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu\right) \tag{22}
$$

donde

$$
A = \frac{2x(1-x)}{\left[q^2 + m^2 + x(1-x)\, p^2\right]^2} \tag{23}
$$

Finalmente

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1^{(2)} &= (\hbar)\, \frac{1}{2} e^2 \int d^dx d^dx' \ A_\mu(x)\, A_\nu(x') \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \ e^{ip(x-x')} \left(p^2 \delta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu\right) \\
&\quad 2^{d/2} \int_0^1 dx \ 2x(1-x)\, \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\left[m^2 + x(1-x)\, p^2\right]}{4\pi\mu^2}\right)^{-\epsilon/2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ldots\right]
\end{aligned} \tag{24}
$$

El término infinito es

$$
\Gamma_{1\,pole}^{(2)} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \int d^dx \ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{25}
$$

Para absorber este infinito renormalizamos

$$A^{\mu}_{bare} = \left[1 - \frac{1}{3}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\right] A^{\mu} \tag{26}$$

y entonces

$$e_{bare} = \mu^{\epsilon/2} e \left[1 + \frac{1}{3}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\right] \tag{27}$$

De modo que finalmente

$$\beta\left[e\right] = \frac{1}{3}\frac{e^3}{(4\pi)^2} > 0 \tag{28}$$

y la carga crece con la escala, como en la teoría $\lambda\phi^4$. vamos a ver que en las teorías no abelianas, el loop del vector de gauge contribuye a la función β con signo negativo, por lo cual, si no hay demasiados fermiones, la teoría adquiere *libertad asintótica*.