Práctica 5: Simetrías e identidades para funciones de correlación

En esta guía comenzamos campos II.

1 Identidades elementales en QFT para la función generatriz

1. **Identidad de juguete del tipo Schwinger-Dyson**: Considere la siguiente funcional:

$$Z[J] = N \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-S(x)+Jx}$$

con S una función arbitraria de x acotada por debajo y con un comportamiento asintótico en $x \to \pm\infty$ tal que la integral converja y N elegido para que $Z[0] = 1$ (es decir: $N = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-S(x)}}$). Suprimiremos de ahora en más la indicación $\mathbb{R}$ en el símbolo de integración.

Z es una funcional que permite hallarlas "funciones de $n-$puntos", o valores de expectación $\langle x^n \rangle$:

$$\langle x^n \rangle \equiv \frac{\int dx\, x^n e^{-S(x)}}{\int dx\, e^{-S(x)}} = \left.\frac{\partial^n Z[J]}{\partial J^n}\right|_{J=0} \tag{1}$$

$Z[J]$ es una función complicada de J para una S genérica. Sin embargo, hay ciertas cosas elementales que podemos saber partiendo de que se obtuvo haciendo una integral en x usando la función S.

(a) Usando el cambio de variables $x \to x' = x + a$, con a una constante, muestre que se cumple la siguiente identidad:

$$\int dx\, (-S'(x) + J)\, e^{-S(x)+Jx} = 0$$

(b) Muestre que esto equivale a la ecuación diferencial:

$$\left(-S\left(\frac{\partial}{\partial J}\right)+J\right)Z[J]=0 \tag{2}$$

cuya generalización al caso infinito dimensional es la identidad de *Schwinger-Dyson*. En el caso en que S sea un polinomio de grado n en x, $S'\left(\frac{\partial}{\partial J}\right)$ será una suma de derivadas parciales de hasta grado $n-1$.

(c) Escriba la ecuación anterior en el caso de: $S(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{\lambda}{4!}x^4$

2. Para el caso del último inciso de $S(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{\lambda}{4!}x^4$, puede hallase facilmente la solución como un desarrollo en serie en potencias de J hasta un cierto orden deseado. Proponiendo $Z[J]=\sum_{n=0}a_nJ^n$:

   (a) Halle la relación de recurrencia entre los coeficientes.

   (b) Muestre a partir de la paridad de S que a_n con $n=impar$ debe ser cero.

   (c) Muestre que toda la serie puede determinarse a partir del coeficiente a orden 2 y que para satisfacer la ecuación hasta orden $N=impar$ debe encontrar los coeficientes hasta orden $N+3$

   (d) Verifique que la serie a orden 8 (que satisface la ecuación hasta orden 5) es:

$$Z[J]=1+\frac{\alpha}{2}J^2+\frac{\alpha-1}{4\lambda}J^4+\frac{\alpha(1+\lambda)-1}{20\lambda^2}J^6+\frac{6+5\lambda-2a(4\lambda+3)}{1120\lambda^3}J^8$$

   α es igual a la función de $2-$puntos (¿porque?) y depende de λ naturalmente, por lo que la serie anterior no debe pensarse como serie de potencias en λ

   (e) Diga cuales funciones de n puntos puede hallar a partir de los coeficientes. Verifique numéricamente que las funciones de n-puntos hasta orden 8 están de acuerdo con lo que se lee de los coeficientes.

3. De la positividad de $\langle x^n\rangle$ para $n=par$ que se desprende de su definición y a partir de la relación entre estos y los coeficientes de la serie anterior, dibuje la región en la que se debe encontrar el valor de la función de $2-$puntos α en un diagrama α vs λ

4. La identidad de SD derivada anteriormente es parte de una familia más grande de identidades provenientes de la re-escritura de la integral que define $Z[J]$ en términos de la variable $x'=F_\epsilon(x)$ obtenida por una familia de funciones F_ϵ invertible y derivable en todo $\mathbb{R}$. Sea $F_\epsilon(x)=x+\epsilon\, h(x)+O(\epsilon^2)$ el desarrollo a orden 1 del cambio de variables. Es decir, $h(x)=\left.\frac{dF_\epsilon(x)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$.

(a) Muestre que la correspondiente identidad es:

$$\int dx\, (h'(x) - S'(x)h(x) + J)\, e^{-S(x)+Jx} = 0$$

(b) Halle su versión ecuación diferencial para el caso anterior de $S(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\lambda}{4!}x^4$

(c) Muestre que en este caso esta ecuación es consecuencia de la ecuación diferencial que surgió ante la sustitución $x' = x+a$. En efecto, es algo general. Demuestrelo. ¿Porque, con el diario del lunes, era esperable que no aportara más información?

(d) Halle la generalización de la identidad anterior al caso de N variables en la que la funcional generatriz es:

$$Z[J_1, J_2, ..J_N] = N \int_{R^n} d^n x\; e^{-S(x_1,x_2,.x_n)+\sum_{i=1}^N J_i x_i}$$

.

Para simplificar la notación, podemos pensar en un vector $\mathbf{J}$ de fuentes, y al términe de acople con las x_i como un producto escalar $\mathbf{J}\cdot\mathbf{x}$ Para ello, considere $x_i = F^i_\epsilon(x_1, x_2, ...x_n) = x_i + \epsilon\; h^i(x_1, x_2, ...x_n) + O(\epsilon^2)$ siendo las F^i una colección de N funciones tales que el Jacobiano sera invertible. Muestre que la identidad sera:

$$\int d^n x \left(\partial_i h^i(x) - \partial_i S(x)h^i(x) + J_i h^i\right) e^{-S(\mathbf{x})+\mathbf{J}\cdot\mathbf{x}} = 0$$

Ayuda: A orden 1, el determinante de la matriz $\frac{\partial F^i}{\partial x_j}$ se reduce a la traza de su expresión hasta orden 1 en ϵ

(e) Halle la expresión de la ecuación diferencial correspondiente. Para fijar ideas, considere el caso $S(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x^T M x} + \frac{\lambda}{4!}(\mathbf{x^T x})^2$

5. **Paradoja de Bruno**: Considere el caso de un campo escalar libre sin masa en D dimensiones.

(a) Halle la identidad que corresponde a la invariancia de la acción ante la suma de una constante al campo escalar. ¿Concluye de aquí que $\langle 1 \rangle = 0$? Este sería el resultado perturbador.

(b) Considere el modelo de juguete de una integral en dos variables de una accion : $S(x, y) = x - y$ y la identidad de DS correspondiente a $(x, y) \to (x + a, y + a)$. Analice el sinsentido en ese caso e identifique la manipulación abusiva que llevó a esto.

2 Identidades de Ward-Takahashi para QED

6. Considere la función generatriz para QED que surje del metodo de FP:

$$Z[J,\eta,\bar{\eta}] = \int D\bar{\psi} D\psi D A e^{-(S_{QED}+S_G+S_{GF}+J^\mu A_\mu \bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)}$$

Siendo las acciones en el exponente las de QED estándar, ghost y fijado de gauge. Esta última es la más relevante para las cuentas que sigue: $L_{GF} = \frac{1}{\xi}(\partial_\nu A^\nu)^2$.

Usando que la medida de integración es invariante de gauge, escriba la identidades de SD [1] para el caso de la transformación de gauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha$ (con las correspondientes para ψ t $\bar{\psi}$) y muestre que es de la forma:

$$\left(\frac{1}{\xi}\partial^2\partial_\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} + c_1 \partial_\mu J^\mu(x) + c_2 \bar{\eta}(x)\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} + c_3 \eta(x)\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\right) Z[J,\eta,\bar{\eta}] = 0 \tag{3}$$

siendo los c_i ciertos números (factores $\pm 2, \pm 1, i$ etc no escritos ahora para no jugarsela)

7. * Usando la definición de W y su transformada de Legendre Γ y el hecho de que solo aparece la primera derivada funcional derivada funcional $\frac{1}{Z[0]}Z[J]$:

   (a) Muestre que la identidad anterior puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi}\partial^2\partial^\mu \langle A_\mu(x)\rangle^J \quad &+ \quad c_1\partial_\mu\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle A_\mu(x)\rangle^J}\right) + c_2\langle\psi(x)\rangle^{\bar{\eta},\eta}\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\psi(x)\rangle^{\bar{\eta}\eta}} \\ &+ \quad c_3\langle\bar{\psi}(x)\rangle^{\bar{\eta},\eta}\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\bar{\psi}(x)\rangle^{\bar{\eta},\eta}} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

   donde los c pueden diferir en algún signo respecto al del problema anterior.

   (b) A partir de la ecuación maestra, Derivando dos veces obtenga la identidad de Ward-Takahashi para la función de vertice Γ^μ (correspondiente al termino $A_\mu(x)\bar{\psi}(y)\psi(z)$ en el desarrollo de Γ):

$$\frac{\partial\Gamma^\mu(x,y,z)}{\partial x^\mu} = G_2^{-1}(y-z)\left(\delta(y-x) - \delta(z-x)\right) \tag{5}$$

   siendo G_2 el inverso del propagador.

8. Verifique la igualdad anterior en forma perturbativa, hasta orden árbol.

[1] Tenga en cuenta que aquí las fuentes en el exponente aparecen con un signo menos y por tanto la ecuación de SD tendría un signo de diferencia respecto a la del modelo de juguete de la sección anterior

3 Invariancia BRS

9. Muestre que el lagrangiano de Maxwell con la adición del los términos de fijado de gauge y fantasmas usuales, dependientes de ξ

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \partial^{\mu}\bar{c}\Delta\partial_{\mu}c - \frac{1}{2\xi}(\partial^{\nu}A_{\nu})^2$$

es invariante ante esta transformación generada por un parámetro dado por una variable de Grassmann constante θ:

$$\begin{aligned} \delta A_{\mu} &= \theta\partial_{\mu}c \\ \delta\bar{c} &= \frac{1}{\xi}\theta\partial^{\nu}A_{\nu} \\ \delta c &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

10. Muestre que la medida de integración en la integral funcional es invariante BRS. Para ello, dado que la transformación involucra mezcla de campos distinta especie, debe usar el *superdeterminante* o *Beretziano* del apendice.

11. Las variaciones que aparecen en las transformaciones BRS pueden escribirse como $\delta = \theta s$, siendo s la parte de la variación que acompaña al parámetro θ constante. Muestre que si una cantidad R (dependiente de los campos) puede esc se puede escribir como $s$algo, entonces:

$$\langle R\rangle = 0$$

12. * Busque la generalización no abeliana de la simetría BRS y verifique que la acción con términos de gauge fixing y fantasmas es invariante ante esta transformación.

13. El valor de expectación de una cantidad invariante de gauge $O(A)$ (ej, $F_{\mu\nu}$) debería ser independiente del valor de ξ en la acción en la funcional generatriz. A fin de entender esto, considere el caso abeliano.

    (a) Plantee la condición de independencia de ξ como una ecuación para el valor de expectación de $O(A)$

    (b) Verifique el término de fijado de Gauge puede escribirse como $s$algo$-\bar{c}\delta^2 c$

    (c) Usando un resulado anterior muestre la deseada independencia en ξ

4 Apendice

4.1 Relación entre Γ y W

En un ejemplo de juguete de una función W de una variable, se define Γ a través de:

$$W[J] = \Gamma[\phi_J] - J\phi_J$$

siendo $\phi_J \equiv \frac{\partial W}{\partial J}$

La generalización a un sistema de varias variables J_i justifica la notación de derivada parcial y en tal caso:

$$W[J_1, J_2, ...J_n] = \Gamma[\phi^1_{\vec{J}}, \phi^2_{\vec{J}}, ..\phi^n_{\vec{J}}] - \sum_{i=1}^{n} J_i \phi^i_{\vec{J}}$$

La extensión al caso infinito dimensional continuo corresponde a sustituir sumas por integrales. Ahora, el indice en J_i t $\phi^i_{\vec{J}}$ será el punto del espacio tiempo. El vector J es ahora J como función del espacio tiempo. Es decir, al colección de todos sus valores en cada punto del espacio-tiempo.

Desarrollando W como Γ pueden desarrollarse en potencias de las J_i y $\phi^i_{\vec{J}}$ respectivamentes (asumiendo que W y Γ admiten ese desarrollo) podemos escribir:

$$W[J] = \int dx_1 dx_2..dx_n \frac{1}{n!} G^n_c(x_1, x_2, ...x_n) J(x_1) J(x_2)..J(x_n) \tag{7}$$

$$\Gamma[\phi^J] = \int dx_1 dx_2..dx_n \frac{1}{n!} \Gamma^n(x_1, x_2, ...x_n) \phi^J(x_1) \phi^J(x_2)..\phi^J(x_n) \tag{8}$$

Las G_n son las funciones de Green conectadas (aquellas en las que no hay islas que involucren a una parte de las x_i). Considerando el caso unidimensional pueden derivarse relaciones entre los coeficientes de Γ y los de W que muestran que $\Gamma(x_1, x_2, ...x_n)$ esta dada por diagramas 1-P irreducibles (aquellos en los que aún cortando una linea siguen conectados)

4.2 Superdeterminante o Bereziano

Considere la siguiente transformación lineal que vincula variables x, θ (números ordinarios y variables de Grassmann respectivamente) en la forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$$

Se quiere hallar alguna fórmula para relacionar la integral en $\int d\theta dx f(x, \theta)$ luego del cambio de variables. Aquí x y θ pueden representar $n-uplas$ de igual rango. A y D son matrices de números ordinarios, mientras que B y D tienen coeficientes iguales a variables de Grassmann. Dada la matriz en bloque:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

con D invertible se define:

$$\mathrm{sdet}(M) = \frac{\det(A - BD^{-1}C)}{\det D}$$

La propiedad que motiva esta definición es garantizar la siguiente igualdad:

$$\int d\theta' dx' f(x', \theta') = \int d\theta dx \; sdet(M) f(x, \theta)$$

Puede verificarse esa fórmula en algún caso sencillo. Es importante entender que la integral en x es una integral definida en cierta región y ante la transformación $x' = Ax + B\theta$ el rango de valores de x' es el inducido solo por la parte de Ax, no contando para ello la parte proveniente de las variables de Grassmann.