Práctica 7: Simetría conforme en teoría clásica y cuántica de campos

En esta guía veremos la materialización de la simetría conforme en sistemas clásicos y cuánticos

1 Teoría clásica de campos

1. Muestre que el lagrangiano de un campo escalar libre sin masa en d dimensiones es invariante conforme, en el sentido que:

$$\phi(x) \to \tilde{\phi}(x) = \left(\left| \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right|^{\frac{1}{d}} \right)^{\Delta} \phi(\tilde{x})$$

con $\tilde{x} = f(x)$ dado por una transformación conforme, es una simetría variacional eligiendo Δ (la dimensión conforme) adecuadamente. Hagalo de estas dos formas:

de estas dos formas:

(a) Mostrando que la acción es invariante ante la transformación finita.

(b) Verificando que el lagrangiano cambia en una derivada total cuando se considera la transformación a primer orden $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$. Retenga el término de derivada total para el próximo ejercicio.

2. Muestre que la corriente de Noether asociada a la simetría conforme del caso anterior es:

$$j^\mu = \xi_\nu \left(\partial^\nu \phi \partial^\mu \phi - g^{\mu\nu} \frac{(\partial\phi)^2}{2} \right) + \frac{d-2}{4d} (\partial\xi \partial^\mu \phi^2 - \partial^\mu (\partial\xi) \phi^2)$$

Verifique que se conserva on-shell.

3. Del item anterior se ve que en el caso de isometrias, la corriente se escribe como $\xi_\nu T^{\mu\nu}$, siendo T el tensor energía-momento, pero hay términos adicionales pesados con las derivadas del parámetro. Sin embargo, es posible construirse otra corriente conservada $j^\mu_{improv} = \xi_\nu T^{\nu\mu}_{improv}$ a través de un tensor simétrico mejorado $T^{\mu\nu}_{improv}$ de forma tal que :

$$T^{improv}_{\mu\nu} = \partial_\nu\phi\partial_\mu\phi - g_{\mu\nu}\frac{(\partial\phi)^2}{2} + \frac{1}{4}\frac{d-2}{d-1}(\partial_\mu\partial_\nu - g_{\mu\nu}\partial^2)\phi^2 \tag{1}$$

   (a) Muestre que este tensor tiene divergencia y traza cero on-shell

   (b) Muestre que estas dos condiciones implican que $j^\mu = \xi_\nu T^{\nu\mu}_{improv}$ es conservada

   (c) Muestre la inversa: que una corriente conservada de la forma $j^\mu = \xi_\nu T^{\nu\mu}$ siendo ξ paramétro de una transformación conforme y con T simétrico es conservada si y solo si T es de traza y divergencia cero on-shell.

   Observación: si bien este es un caso particular, existe una clase general de modelos en los que se puede construir tal corriente, por lo que tendremos un tensor simétrico y de divergencia y traza cero on-shell.

4. Extienda los resultados anteriores (la invariancia de la acción y la expresión de la corriente) al caso de un campo escalar en $d = 4$ con un término de autointeracción $\lambda\phi^4$. En el caso de dimensión d, cual es el n tal que el lagrangiano de un campo escalar con un término de la forma $\lambda\phi^n$ es invariante conforme.

   Adivine cuál sería la modificación correspondiente del tensor energía-momento mejorado.

5. Considere el lagrangiado de un campo de Dirac sin masa en d dimensiones.

   (a) Muestre que es invariante conforme. Halle el peso conforme del campo. Para simplificar la expresión mire solamente la invariancia ante traslaciones, dilataciones y transformaciones conformes especiales.

   (b) Encuentre la expresión de la corriente de Noether e identifique el tensor energía momento que surge de la simetría ante traslaciones.

2 Aspectos cuánticos

6. * Deduzca la expresión de la función de 2 y 3 puntos correspondiente a 3 campos escalares de pesos $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

7. * Muestre que la la siguiente expresión de la función de 4-puntos de campos primarios de pesos Δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ es consistente con su regla de transformación:

$$S(x_1, x_2, x_2, x_4) = \frac{F(u,v)}{\prod\limits_{i<j} \mid x_i - x_j \mid^{\Delta_1 + \Delta_2 - \frac{\Delta}{3}}}$$

siendo $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{4} \Delta_i$ y u y v los crossratio definidos en la guía anterior.

8. A fin de probar que la expresión anterior es la forma general de la función de 4 puntos, es suficiente demostrar lo siguiente: si dos conjuntos de 4 puntos tienen el mismo crossratio u y v, entonces existe una transformación conforme que lleva el primer conjunto al siguiente. Suponiendo demostrado esto, complete el argumento para probar que la expresión del inciso anterior es la mas general de una función de 4 puntos.

9. A partir de la función de 2-puntos del campo escalar sin masa (que la puede deducir de la expresión general y que coincidirá con la función de 2-puntos de una CFT) obtenga la función de 3 y 4 puntos mediante el teorema de Wick y verifique que su forma coincide la expresión de la función de 3 y 4 puntos de un campo escalar libre en $d > 2$, con el peso conforme correspondiente.

10. **Paradoja de D&G**: considere un campo escalar ϕ (a nivel cuántico) de peso conforme Δ y considere el estado:

    $$\psi = \phi(0)|0>$$

    Muestre que ψ es autoestado del operador unitario correspondiente a las dilataciones $U(\lambda)$ (λ real positivo) , con autovalor λ^{Δ}.

    Como es posible que el autovalor sea un numero de modulo distinto de 1 siendo que U es unitario? Aquí esta la "paradoja". Ayuda: la resolución es similar en espiritu a la de la paradoja de Bruno.

11. En el caso $d = 2$ el algebra conforme resulta infinito dimensional y a nivel cuántico el algebra resulta ser dos copias de la extensión central del algebra de Witt llamada algebra de Virasoro:

    $$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}\, n(n^2-1)\delta_{n,-m}\, C$$

    siendo C un elemento que conmuta con todos los L_n, siendo por tanto un multiplo de la identidad en una representación irreducible.

    (a) Muestre que se satisface la identidad de Jacobi

    (b) Muestre que la constante c no puede eliminarse mediante una redefinición de los generadores en la forma $L'_n = L_n + f(n)C$

12. Los L_n se puede ver que satisfacen $L_n^\dagger = L_{-n}$. El vacio de la teoría se postula invariante ante el subgrupo correspondiente al algebra generada por L_{-1}, L_1, L_0 y aniquilado por todos los L_n con $n < 0$. En las representaciones de energía acotada por debajo siempre existe un estado de mínimo autovalor de L_0 aniquilado por todos los L_n con $n > 0$. La representación se construye actuando sobre este con los L_n con $n > 0$.

    Muestre que el vacio no puede ser aniquilado por todos los otros generadores L_n con $n > 1$. Esto muestra que el vacio no puede ser invariante ante todo el grupo conforme infinito dimensional.

13. El hecho de que la norma de un estado sea no negativa impone ciertas restricciones sobre el valor de c

    (a) Muestre que la positividad de la norma requiere que $c \geq 0$. Para ello, calcule la norma de $L_n \Psi$, con $n > 0$ y Ψ un estado cualquiera y use las relaciones del algebra.

    (b) Muestre que si $c = 0$ la representación es trivial, en el sentido de que contiene un único estado. Para mostrar esto, considere este estado $v_n = (L_{-2n} - \frac{3}{4h+2n} L_{-n}^2) \mid h >$, siendo h el peso del estado primario sobre el que se construye la representación. Muestre que la positividad de la norma implica que $h = 0$ y use el resultado del ejericio anterior.

Faltan muchos más ejercicios para balancear la guía, pero es hora de dejarla ir.

To be continued