1. Renormalización de teorías de gauge con rompimiento de simetría

La estrategia de elegir inteligentemente el fijado de gauge, que usamos para construir la acción efectiva invariante de gauge, también se puede utilizar para destrabar el problema de cómo calcular las correcciones radiativas cuando hay rompimiento espontáneo de la simetría de gauge.

Empecemos considerando una teoría de gauge abeliana

$$S = \int d^4x \left\{ (D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi + \lambda (\Phi^* \Phi)^2 + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \tag{1}$$

$$D^\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - i g A_\mu \Phi \tag{2}$$

El potencial tiene un mínimo en ϕ tal que

$$\phi = \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \tag{3}$$

(sin pérdida de generalidad tomamos el vacío en que el valor de expectación del campo es real). Nos interesa calcular la acción efectiva para este valor. Desarrollamos

$$\Phi = (\phi + \rho) e^{i\theta} \tag{4}$$

Entonces

$$D^\mu \Phi = e^{i\theta} \left[\partial_\mu \rho + i (\phi + \rho) (\partial_\mu \theta - g A_\mu) \right] \tag{5}$$

Supongamos que sólo nos interesan las correcciones a un lazo. Entonces sólo conservamos los términos cuadráticos en las fluctuaciones ρ, θ y A_μ

$$S = \int d^4x \left\{ (\partial_\mu \rho)^2 + \phi^2 (\partial_\mu \theta - g A_\mu)^2 + 2m^2 \rho^2 + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \tag{6}$$

El término desconcertante es el que mezcla los campos θ y A_μ. En una teoría sin invariancia de gauge, θ sería el bosón de Goldstone. Con invariancia, podríamos elegir un gauge "unitario" $\theta = 0$, en cuyo caso A_μ adquiere un nuevo grado de libertad. Resulta que este gauge no es conveniente para realizar cálculos. Entonces procedemos de otra manera.

Primero desarrollamos el cuadrado e integramos por partes

$$S = \int d^4x \left\{ (\partial_\mu \rho)^2 + \phi^2 (\partial_\mu \theta)^2 + 2g\phi^2 \partial_\mu A^\mu \theta + 2m^2 \rho^2 + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g^2 \phi^2 A_\mu A^\mu \right\} \tag{7}$$

Y ahora usamos la libertad de elegir el fijado de gauge para elegir un gauge $\xi - R$ (R por "renormalizable")

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \left[\partial_\mu A^\mu - 2\xi g \phi^2 \theta \right] \tag{8}$$

Entonces, cuando agregamos el término de fijado de gauge

$$S_{GF} = \int d^4x f^2 \tag{9}$$

El término cruzado se cancela, y a cambio el campo $\phi\theta$ adquiere una masa $8\xi g^2 \phi^2$. Todavía tenemos que incluir los campos fantasmas. Bajo una transformación de gauge

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \theta - \epsilon \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon \\ f &\rightarrow f + \frac{1}{\sqrt{2\xi} g} \left[-\Box + 2\xi g^2 \phi^2 \right] \epsilon \end{aligned} \tag{10}$$

De manera que la acción de los campos fantasmas resulta en

$$S_{GH} = \int d^4x \left[\partial_\mu \chi \partial^\mu \eta + 2\xi g^2 \phi^2 \chi \eta \right] \tag{11}$$

de modo que los fantasmas también adquieren masa.

Este truco también se puede usar con teorías no abelianas. Consideremos por ejemplo la teoría con invariancia $SO(3)$ que ya hemos considerado. La teoría tiene tres campos de materia reales Φ^j y tres generadores T^A. La acción

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \left(D_\mu \Phi_j \right)^\dagger D^\mu \Phi^j - \frac{1}{2} m^2 \Phi_j \Phi^j + \frac{1}{4} \lambda \left(\Phi_j \Phi^j \right)^2 + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \tag{12}$$

Elegimos el vacío en que $\phi^1 = \phi^2 = 0$, $\phi^3 = \sqrt{m/\lambda}$ (observese que $T^3 \phi = 0$) y desarrollamos

$$\Phi^j = \phi^j + \varphi^j \tag{13}$$

$$D^\mu \Phi^j = \partial_\mu \varphi_j - ig A_\mu^A T_k^{Aj} \phi^k - ig A_\mu^A T_k^{Aj} \varphi^k \tag{14}$$

El último término no contribuye a un loop. Usando la antisimetría de los generadores e integrando por partes llegamos a

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_j \partial^\mu \varphi^j - ig \left(\partial_\mu A^{A\mu} \right) \phi_k T_j^{Ak} \varphi^j + m^2 \varphi^{3\,2} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \tag{15}$$

φ^1 y φ^2 son los bosones de Goldstone.

Para eliminar el término cruzado definimos

$$f^A = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \left[\partial_\mu A^{A\mu} + i\xi g \phi_k T_j^{Ak} \varphi^j \right] \tag{16}$$

$$S_{GF} = \int d^4x f^A f^A \tag{17}$$

que le da masa a los bosones de Goldstone. Ante una transformación de gauge tenemos

$$\varphi^j \to \varphi^j - i\epsilon^A T_k^{Aj} \left(\phi^k + \varphi^k \right) \tag{18}$$

de modo que

$$S_{GH} = \int d^4x \left[\partial_\mu \chi_A D^\mu \eta^A + \xi g^2 \chi_A \phi_k T_j^{Ak} T_l^{Bj} \left(\phi^l + \varphi^l \right) \eta^B \right] \tag{19}$$

Los fantasmas adquiren masa y se acoplan al campo de Higgs.

Mutatis mutandis se puede lograr que la acción efectiva salga invariante de gauge.

2. Exponentes críticos

Vamos a considerar la dinámica crítica de un modelo de Ising. Existe una temperatura T_c por debajo de la cual la magnetización de equilibrio $M \neq 0$ aún en ausencia de campo externo $H = 0$. Definimos la temperatura reducida

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \tag{20}$$

Entonces se observa que una serie de observables son descriptos, como función de t y H, mediante leyes de potencias. Nos interesan cuatro “exponentes críticos” α, β, γ y δ, que aparecen en la descripción del calor específico

$$C \propto |t|^{-\alpha} \tag{21}$$

La magnetización espontánea

$$M \propto (-t)^\beta \tag{22}$$

La susceptibilidad

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_T (H = 0) \propto |t|^{-\gamma} \tag{23}$$

y la ecuación de estado en la isoterma crítica

$$M\left(t=0,H\right)\propto H^{1/\delta} \tag{24}$$

El fenómeno de *universalidad* es la observación de que sistemas con descripciones microscópicas muy distintas sin embargo comparten los mismos exponentes críticos. Por ejemplo, los exponentes críticos del modelo de Isisng son los mismos que los de la transición líquido-vapor de un gas de Van der Waals, si reemplazamos H por la presión y M por el volumen por partícula.

3. Un poco de termodinámica

La relación termodinámica básica para nuestro sistema es que

$$T\Delta S=\Delta U-H\Delta M \tag{25}$$

Por lo tanto, si definimos la energía libre

$$F=U-TS \tag{26}$$

Entonces

$$dF=-SdT+HdM \tag{27}$$

Esto sugiere hacer una transformada de Legendre y definir la energía libre como función de T y H

$$G=F-HM \tag{28}$$

de manera que

$$dG=-SdT-MdH \tag{29}$$

Observamos que obtenemos la relación de Maxwell

$$\left.\frac{\partial M}{\partial T}\right|_{H}=\left.\frac{\partial S}{\partial H}\right|_{T} \tag{30}$$

La Segunda Ley implica que G tiene que ser convexa

$$\Delta S\Delta T+\Delta M\Delta H\geq 0 \tag{31}$$

desarrollando

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{1}{T}C\Delta T+\frac{\partial M}{\partial T}\Delta H\\ \Delta M &= \frac{\partial M}{\partial T}\Delta T+\chi\Delta H\end{aligned} \tag{32}$$

Obtenemos que C y χ deben ser positivos, y

$$\frac{\chi}{T}C\geq\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)^{2} \tag{33}$$

Esto quiere decir que una cantidad que escalea como $|t|^{-(\gamma+\alpha)}$ domina a otra que escalea como $|t|^{-2(1-\beta)}$, lo cual requiere que

$$\alpha+2\beta+\gamma\geq 2 \tag{34}$$

Podemos obtener otra relación entre los exponentes críticos si observamos que en toda la región $T\leq T_c$, $-M\left(T\right)\leq M\leq M\left(T\right)$ tenemos coexistencia de fases con $H=0$, de manera que en esta región $F=F\left(T\right)$.

Vamos a considerar los cuatro puntos $(T,0)$, $(T_c,0)$, $(T,M\left(T\right))$ y $(T_c,M\left(T\right))$. Entonces

$$\begin{aligned} F\left(T_c, M\left(T\right)\right) - F\left(T,0\right) &= F\left(T_c, M\left(T\right)\right) - F\left(T, M\left(T\right)\right) \\ &= -\int_T^{T_c} dT'\ S\left(T', M\left(T\right)\right) \leq 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Pero también

$$\begin{aligned} F\left(T_c, M\left(T\right)\right) - F\left(T,0\right) &= F\left(T_c, M\left(T\right)\right) - F\left(T_c, 0\left(T\right)\right) + F\left(T_c, 0\right) - F\left(T,0\right) \\ &= \int_0^{M(T)} dM'\ H\left(T_c, M'\right) - \int_T^{T_c} dT'\ S\left(T', 0\right) \end{aligned} \tag{36}$$

de manera que algo que escalea como $t^{2-\alpha}$ domina a algo que escalea como $t^{\beta(\delta+1)}$, lo que requiere que

$$\alpha + \beta\left(\delta+1\right) \geq 2 \tag{37}$$

Se observa que las dos desigualdades que hemos encontrado son, en la práctica, identidades.

4. Campo medio

El modelo más simple que podemos hacer de la transición ferromagnética es asumir que la magnetización es uniforme en todo el material y que

$$F \approx \frac{1}{2}atM^2 + \frac{1}{4}bM^4 \tag{38}$$

con $a, b \geq 0$. Entonces si $t > 0$,

$$atM + bM^3 = H \tag{39}$$

de modo que cuando $H \to 0$, $M \to 0$ y $\chi \approx 1/at$, o sea $\gamma = 1$, cuando $t = 0$ $M = \left(H/b\right)^{1/3}$, de modo que $\delta = 3$, y cuando $t < 0$ y $H = 0$

$$M = \sqrt{\frac{-at}{b}} \tag{40}$$

de modo que $\beta = 1/2$. De las identidades termodinámicas se deduce que $\alpha = 0$.