1 Los exponentes críticos y la función de correlación

Los exponentes críticos se pueden deducir de la función de correlación

$$G[r] = \langle M(r) M(0) \rangle \tag{1}$$

En la región crítica

$$G \approx r^{-(d-2+\eta)} \mathcal{G}\left[\frac{r}{\xi}\right] \tag{2}$$

donde la "longitud de correlación"

$$\xi \propto |t|^{-\nu} \tag{3}$$

De esta manera introducimos dos nuevos exponentes η y ν. Si transformamos Fourier, entonces

$$G[p] = \frac{1}{p^{2-\eta}} \mathcal{G}[\xi p] \tag{4}$$

La idea básica es la siguiente. Supongamos que queremos calcular un observable $\mathcal{G}$ que es función del momento p, de la distancia de correlación ξ y de una serie de otros parámetros L_n, que tienen unidades de r^{l_n}. Entonces por análisis dimensional vamos a tener que

$$\mathcal{G}[p, \xi, L_n] = \xi^{[\mathcal{G}]} \mathcal{G}\left[\xi p, 1, \xi^{-l_n} L_n\right] \tag{5}$$

Si todas las l_n son positivas, los factores de $\xi^{-l_n} L_n \to 0$ cuando nos acercamos al punto crítico, y ahora

$$\mathcal{G}[p, \xi, L_n] = p^{-[\mathcal{G}]} \left[(p\xi)^{[\mathcal{G}]} \mathcal{G}[\xi p, 1, 0]\right] \tag{6}$$

es decir, recuperamos la forma 4. En particular, en el punto crítico la función de correlación es una pura ley de potencias, observación que va a ser fundamental en lo que sigue.

Vemos que M escalea como $\xi^{-(d-2+\eta)/2}$, de modo que

$$\beta = \frac{1}{2} \nu (d - 2 + \eta) \tag{7}$$

Además, como MH escalea como r^{-d} debe ser

$$H \approx r^{-(d+2-\eta)/2} \tag{8}$$

y entonces

$$M \approx H^{(d-2+\eta)/(d+2-\eta)} \tag{9}$$

o sea

$$\delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} \tag{10}$$

La densidad de energía libre escalea como $|t|^{\nu d}$, de modo que $\alpha = 2 - \nu d$, y por análisis dimensional $\gamma = \nu (2 - \eta)$, de modo que nuestras identidades se satisfacen.

2 Mejorando campo medio

La teoría de campo medio que vimos la clase pasada no nos permite obtener la función de correlación. Para mejorar la aproximación, aceptamos que la magnetización podría no ser perfectamente homogénea. Ahora, en presencia de gradientes la energía libre debe aumentar, y entonces escribimos

$$F = \int d^d x \, \left\{ \frac{1}{2} \nabla M^2 + \frac{1}{2} a t M^2 + \frac{1}{4} b M^4 \right\} \tag{11}$$

La probabilidad de una configuración $M(x)$ es e^{-F}. En el límite en que el término cuártico es despreciable, la magnetización se convierte en una variable gaussiana y la función de correlación obedece

$$\left(-\Box + at\right) G\left(x, x'\right) = \delta\left(x - x'\right) \tag{12}$$

Por lo tanto su transformada de Fourier

$$G = \frac{1}{p^2 + at} = \frac{1}{p^2}\mathcal{G}\left[\frac{p}{\sqrt{at}}\right] \tag{13}$$

de donde leemos

$$\begin{aligned} \eta &= 0 \\ \nu &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{14}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}\left(d - 4\right) \\ \beta &= \frac{1}{4}\left(d - 2\right) \\ \gamma &= 1 \\ \delta &= \frac{d + 2}{d - 2} \end{aligned} \tag{15}$$

Vemos que sólo en $d = 4$ recuperamos los exponentes clásicos. Queda el interrogante de qué hace especial el caso $d = 4$, y además si existe alguna teoría en que la “dimensión anómala” η sea distinta de cero.

3 Los exponentes críticos y el grupo de renormalización

El problema con el análisis anterior es que no está claro que el término de autointeracción sea realmente despreciable. Para lograr un mejor modelo vamos a asimilar la teoría a una teoría $\lambda\phi^4$, manteniendo la identificación $m^2 \propto at$, que es lo que nos permite introducir una temperatura dentro del problema.

Como ya sabemos, al intentar calcular correcciones a la energía libre (que en este contexto, identificamos con la acción efectiva) vamos a encontrar infinitos, que requieren la introducción de una escala de renormalización μ y la resignificación de las constantes de acoplamiento, la masa y los campos que aparecen en la acción como constantes “desnudas” que es necesario reemplazar por constantes renormalizadas. Al orden más bajo

$$\begin{aligned} \lambda_B &= \mu^{\epsilon}\lambda\left(1 + \frac{a}{\epsilon}\lambda\right) \\ m_B^2 &= m^2\left(1 + \frac{b}{\epsilon}\lambda\right) \\ M_B &= M\left(1 + \frac{c}{\epsilon}\lambda^2\right) \end{aligned} \tag{16}$$

$\epsilon = 4 - d$. La aparición de μ en estas fórmulas hacen que las constantes renormalizadas tengan una dependencia implícita con la escala de renormalización. Para la constante de acoplamiento encontramos

$$\mu\frac{d\lambda}{d\mu} = \beta\left[\lambda\right] \tag{17}$$

Al orden más bajo

$$\beta\left[\lambda\right] = -\epsilon\lambda + a\lambda^2 \tag{18}$$

y por lo tanto

$$\mu\frac{dm^2}{d\mu}\left(1 + \frac{b}{\epsilon}\lambda\right) + \frac{b}{\epsilon}m^2\beta\left[\lambda\right] = 0 \tag{19}$$

Si definimos

$$\mu \frac{dm^2}{d\mu} = \beta_{m^2} m^2 \tag{20}$$

Entonces al orden más bajo

$$\beta_{m^2} = b\lambda \tag{21}$$

Un análisis similar da

$$\mu \frac{dM}{d\mu} = \beta_M M \tag{22}$$

y entonces, al orden más bajo

$$\beta_M = 2c\lambda^2 \tag{23}$$

Ahora consideremos por ejemplo la función de dos puntos. En principio podemos pensar a la función de correlación como una función de p, m^2, λ y μ

$$G = G\left[p, m^2, \lambda, \mu\right] \tag{24}$$

Un análisis dimensional convencional dice que

$$G\left[p, m^2, \lambda, \mu\right] = p^{-2}\left[1, \frac{m^2}{p^2}, \lambda, \frac{\mu}{p}\right] \tag{25}$$

Derivando respecto de p encontramos

$$p\frac{\partial G}{\partial p} + 2m^2\frac{\partial G}{\partial m^2} + \mu\frac{\partial G}{\partial \mu} = -2G \tag{26}$$

Por otro lado, sabemos que G es invariante frente a un cambio en μ, si al mismo tiempo cambiamos λ, m^2 *y los campos* de acuerdo con sus propias ecuaciones del grupo de renormalización. Es decir

$$\mu\frac{\partial G}{\partial \mu} + \beta_{m^2} m^2\frac{\partial G}{\partial m^2} + \beta\lambda\frac{\partial G}{\partial \lambda} = 2\beta_M G \tag{27}$$

Eliminando el término $\mu G_{,\mu}$ encontramos

$$p\frac{\partial G}{\partial p} + 2\left(1 - \frac{1}{2}\beta_{m^2}\right) m^2\frac{\partial G}{\partial m^2} - \beta\lambda\frac{\partial G}{\partial \lambda} = -\left(2 + 2\beta_M\right) G \tag{28}$$

cuya solución es

$$G\left[p, m^2, \lambda, \mu\right] = p^{-(d-2+2\beta_M)} G\left[1, \frac{m^2}{p^{2\left(1-\frac{1}{2}\beta_{m^2}\right)}}, \lambda\left[\frac{p}{\mu}\right]\right] \tag{29}$$

Esta no es la solución que esperábamos, ya que la dependencia respecto de p no se reduce a una potencia por una función de una única variable $x = \xi p$. Pero sí se reduce a ella si λ no dependiese de μ, es decir, si estuviéramos en un *punto crítico*, en que

$$\beta\left[\lambda\right] = 0 \tag{30}$$

Con la expresión concreta de β, un punto crítico que siempre existe es el punto crítico “Gaussiano” $\lambda = 0$. Pero si $\epsilon > 0$ aparece un segundo punto crítico, el punto fijo de Wilson-Fisher

$$\lambda_c = \frac{\epsilon}{a} \tag{31}$$

En la cercanía del punto fijo de Wilson-Fisher, entonces

$$G\left[p, m^2, \lambda, \mu\right] = p^{-(d-2+2\beta_M)} G\left[1, m^{-\left(1+\frac{1}{2}\beta_{m^2}\right)} p, \lambda_c\right] \tag{32}$$

que con la identificación de m con $\sqrt{at}$ muestra que

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\beta_{m^2}\right) \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{2a}\epsilon\right) \tag{33}$$

Y además demuestra que efectivamente hay una dimensión anómala

$$\eta = -2\beta_M = -\frac{4c}{a^2}\epsilon^2 \tag{34}$$

Usar estos exponentes en vez de $\nu = 1/2$ y $\eta = 0$ mejora la predicción respecto a los exponentes críticos, pero para alcanzar una precisión tal que valga la pena comparar con datos experimentales hay que usar métodos más potentes para calcular las ecuaciones del grupo de renormalización, como la aproximación $1/N$. También es necesario considerar potencias mayores de ϵ.

Nosotros nos quedamos con la observación de que en el punto crítico la función de correlación es una simple ley de potencias, que es un comportamiento característico de teorías con invariancia conforme. Eso conduce a plantear la pregunta de

¿No será que la función de correlación es una pura ley de potencias *porque* en el punto crítico la teoría se reduce a una teoría con invariancia conforme?

y más allá

¿Cuantas teorías con invariancia conforme hay que puedan describir al modelo de Ising en, digamos, tres dimensiones?

Si la respuesta a la primer pregunta fuera que sí, y a la segunda que la teoría es única, entonces tendríamos una forma de calcular los exponentes críticos (evidentemente η, pero como vamos a ver, también ν) exactamente, de una vez y para siempre. Esa es la cuestión que vamos a investigar en las próximas clases.