

1 Introducción

En esta parte del curso vamos a estudiar las llamadas *teorías de campos conformes*. Estas son teorías que son invariantes frente al grupo de transformaciones conformes, que incluye, en sentido estricto, al grupo de Poincaré y a las dilataciones. Nuestra motivación es la expectativa de que la simetría conforme es tan restrictiva que en una teoría que goce de esta simetría, es posible determinar el valor de expectación de vacío de un producto arbitrario de operadores de campo (que vamos a llamar *funciones de Schwinger* para abreviar) sin apelar a métodos perturbativos. Para delimitar el campo de estudio, sólo vamos a considerar teorías de campos escalares (qué significa ésto va a haber que aclararlo más adelante) en el espacio euclídeo de d dimensiones, con $d > 2$ (desigualdad estricta).

Para empezar, consideremos la teoría definida por la acción

$$S = \frac{1}{2} \int d^d x \, \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (1)$$

(aunque el espacio es euclídeo, mantenemos la notación $\eta^{\mu\nu}$ para la métrica). Queremos explorar cual es el grupo de simetrías de esta acción. Por ejemplo, la acción es invariante frente a traslaciones

$$\phi(x^\mu) \rightarrow \phi(x^\mu + a^\mu) \quad (2)$$

Queremos expresar esto como la acción de un operador sobre ϕ

$$\phi(x) \rightarrow e^{-ia^\mu P_\mu} \phi(x) \quad (3)$$

Then

$$P_\mu = i \partial_\mu \quad (4)$$

Los generadores P_μ conmutan entre sí.

Ahora miremos una transformación

$$\phi(x^\mu) \rightarrow \phi(x^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu) \quad (5)$$

Entonces

$$S \rightarrow \int d^d x \, \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \, \omega_\nu^\rho \partial_\rho \phi \quad (6)$$

Para que sea una simetría, debe ser

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} \quad (7)$$

Si escribimos

$$\phi(x^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu) = e^{-i\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}/2} \phi(x) \quad (8)$$

Entonces

$$M_{\mu\nu} = i [x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu] \quad (9)$$

Los $M_{\mu\nu}$ no conmutan con las traslaciones

$$[P_\mu, M_{\nu\rho}] = i [\eta_{\mu\nu} P_\rho - \eta_{\mu\rho} P_\nu] \quad (10)$$

y tampoco conmutan entre sí

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i [\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}] \quad (11)$$

Ahora vamos a considerar una familia de transformaciones

$$\phi(x^\mu) \rightarrow e^{\Delta\lambda} \phi(x^\mu + \epsilon^\mu) \quad (12)$$

donde tanto λ como ϵ^μ son funciones de punto. A primer orden

$$e^{\Delta\lambda} \phi(x^\mu + \epsilon^\mu) \approx \phi(x^\mu) + \Delta\lambda \phi(x^\mu) + \epsilon^\rho \partial_\rho \phi(x^\mu) \quad (13)$$

La variación de la acción es

$$\delta S = \int d^d x \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi [\Delta \lambda \phi_{,\nu} + \Delta \lambda_{,\nu} \phi + \epsilon^\rho \partial_{\rho\nu}^2 \phi + \epsilon_{,\nu}^\rho \partial_\rho \phi] \quad (14)$$

Ahora

$$\int d^d x \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \lambda_{,\nu} \phi = -\frac{1}{2} \int d^d x \phi^2 \square \lambda \quad (15)$$

a menos de una divergencia total, así que vamos a pedir

$$\square \lambda = 0 \quad (16)$$

Una solución que no tenga singularidades debe diverger en el infinito; la divergencia más suave posible es lineal. Entonces encontramos dos familias de (posibles) soluciones, las *dilataciones*

$$\lambda = \text{constante} \quad (17)$$

y las *transformaciones conformes*

$$\lambda = \lambda_\mu x^\mu, \quad \lambda_\mu = \text{constante} \quad (18)$$

Para las dilataciones, encontramos

$$\delta S = \int d^d x \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi [\Delta \lambda \phi_{,\nu} + \epsilon^\rho \partial_{\rho\nu}^2 \phi + \epsilon_{,\nu}^\rho \partial_\rho \phi] \quad (19)$$

después de otra integración por partes obtenemos

$$\epsilon_{,\rho}^\rho \eta^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu,\nu} - \epsilon^{\nu,\mu} = 2\Delta \lambda \eta^{\mu\nu} \quad (20)$$

La solución es

$$\begin{aligned} \epsilon^\rho &= \lambda x^\rho \\ \Delta &= \frac{1}{2} (d-2) \end{aligned} \quad (21)$$

Si escribimos una dilatación como

$$e^{\Delta \lambda} \phi(x^\mu + \lambda x^\mu) = e^{-i\lambda D} \phi \quad (22)$$

Entonces

$$D = i [\Delta + x^\rho \partial_\rho] \quad (23)$$

Las dilataciones no conmutan con las traslaciones

$$[D, P_\mu] = -i P_\mu \quad (24)$$

Pero sí conmutan con las rotaciones

$$[D, M_{\mu\nu}] = 0 \quad (25)$$

Ahora vamos a mirar las transformaciones conformes. La variación de la acción

$$\delta S = \int d^d x \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \left[\Delta \lambda_\rho x^\rho \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} \epsilon_{,\rho}^\rho \partial_\nu \phi + \epsilon_{,\nu}^\rho \partial_\rho \phi \right] \quad (26)$$

de modo que ahora

$$\epsilon_{,\rho}^\rho \eta^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu,\nu} - \epsilon^{\nu,\mu} = 2\Delta \lambda_\rho x^\rho \eta^{\mu\nu} \quad (27)$$

Probamos una solución

$$\epsilon^\rho = a\lambda_\sigma x^\sigma x^\rho + bx^2\lambda^\rho \quad (28)$$

Entonces $a = 1$, $b = -1/2$ y $\Delta = (d-2)/2$, como antes. Si escribimos

$$e^{\Delta\lambda_\rho x^\rho} \phi \left(x^\mu + \lambda_\sigma x^\sigma x^\mu - \frac{1}{2}x^2\lambda^\mu \right) = e^{-i\lambda^\mu K_\mu} \phi \quad (29)$$

entonces

$$K_\mu = i \left[\Delta x_\mu + \left(x_\mu x^\rho - \frac{1}{2}x^2\delta_\mu^\rho \right) \partial_\rho \right] \quad (30)$$

Entonces

$$\begin{aligned} [D, K_\mu] &= iK_\mu \\ [P_\rho, K_\mu] &= i[\eta_{\rho\mu}D - M_{\rho\mu}] \\ [M_{\rho\sigma}, K_\mu] &= (-i)[\eta_{\mu\rho}K_\sigma - \eta_{\mu\sigma}K_\rho] \\ [K_\rho, K_\mu] &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Por curiosidad, vemos como es una transformación conforme finita. Tenemos un parámetro λ^μ que evoluciona a lo largo de una curva, de tal manera que

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^\rho} = x^\mu x_\rho - \frac{1}{2}x^2\delta_\rho^\mu \quad (32)$$

Entonces

$$\left[4\frac{x^\mu x_\nu}{x^4} - \frac{2}{x^2}\delta_\nu^\mu \right] \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^\rho} = \delta_\rho^\mu \quad (33)$$

Ahora

$$2\frac{x^\mu x_\nu}{x^4} - \frac{1}{x^2}\delta_\nu^\mu = -\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{x^\mu}{x^2} \quad (34)$$

de modo que encontramos la integral

$$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} - \frac{1}{2}\lambda^\mu \quad (35)$$

2 El límite unitario

Hasta acá estuvimos pensando en los campos como funciones en un espacio dado. En la teoría cuántica debemos pensarlos como operadores (o distribuciones con valor en operadores, para ser más precisos) actuando sobre los estados $|\Omega\rangle$ en la teoría. Ante una transformación con generador T un estado se convierte en

$$|\Omega'\rangle = e^{-i\alpha T} |\Omega\rangle \quad (36)$$

y un operador se transforma en

$$\phi' = e^{i\alpha T} \phi e^{-i\alpha T} \quad (37)$$

de modo que

$$\langle \Omega' | \phi | \Omega' \rangle = \langle \Omega | \phi' | \Omega \rangle \quad (38)$$

Por lo tanto, ante una transformación infinitesimal

$$\phi' = \phi + i\alpha [T, \phi] + \dots \quad (39)$$

Definimos el *peso* de un operador por la relación

$$[D, \phi(0)] = -i\Delta\phi(0) \quad (40)$$

Ahora observamos que

$$\begin{aligned} [D, [K_\mu, \phi(0)]] &= [K_\mu, [D, \phi(0)]] + [[D, K_\mu], \phi(0)] \\ &= -i(\Delta - 1)[K_\mu, \phi(0)] \end{aligned} \quad (41)$$

de modo que el operador $[K_\mu, \phi(0)]$ tiene peso $\Delta - 1$. Operando sucesivamente con el conmutador podríamos conseguir operadores de pesos arbitrariamente negativos.

Sin embargo, se suele aceptar que el peso mínimo posible es el del campo escalar libre, $\Delta = (d - 2)/2$, de modo que esta regresión se debe cortar en algún momento, es decir, debe haber un operador de campo tal que

$$[K_\mu, \phi(0)] = 0 \quad (42)$$

Decimos que éste es un *operador primitivo*.

Con el mismo argumento, vemos que el operador $[P_\mu, \phi(0)]$ tiene peso $\Delta + 1$. Los operadores que se obtienen de esta manera a partir de un operador primitivo se llaman *descendentes*.

3 El grupo conforme

En esta sección nos proponemos investigar un poco más acerca de la estructura del *grupo conforme*, compuesto por las traslaciones, las rotaciones, las dilataciones y las transformaciones conformes propiamente dichas. Lo primero que observamos es que en d dimensiones tenemos d traslaciones, $d(d - 1)/2$ rotaciones, 1 dilatación y d transformaciones conformes. Por lo tanto, la dimensión del grupo conforme es $(d + 2)(d + 1)/2$, que ocurre ser la dimensionalidad del grupo de Lorentz en $d + 2$ dimensiones.

Nuestra estrategia para explotar la invarianza conforme se basa en un hecho bastante sorprendente: el grupo conforme en un espacio *euclídeo* de d dimensiones es isomorfo al grupo de Lorentz en un espacio *minkowskiano* de $d + 2$ dimensiones. Nuestra estrategia va ser “elevant” las funciones de correlación definidas en el espacio físico a una hipersuperficie invariante Lorentz en el espacio mayor, y explotar las restricciones impuestas por la invarianza Lorentz en este espacio.

Vamos a llamar las coordenadas en el espacio de Minkowski X^N con $N = (\mu, d + 1, d + 2)$, $\mu = 1 - d$; la coordenada $d + 2$ es el “tiempo”. Los generadores del grupo de Lorentz $M_{\mu\nu}$ obedecen el álgebra 11. También tenemos

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\mu d+1}] &= (i) M_{\nu d+1} \quad (\nu \neq \mu) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\mu d+2}] &= (i) M_{\nu d+2} \quad (\nu \neq \mu) \\ [M_{\mu d+1}, M_{\mu d+2}] &= (i) M_{d+1 d+2} \\ [M_{d+1 \mu}, M_{d+1 \nu}] &= (i) M_{\mu\nu} \\ [M_{d+1 \mu}, M_{d+1 d+2}] &= (i) M_{\mu d+2} \\ [M_{d+2 \mu}, M_{d+2 \nu}] &= (-i) M_{\mu\nu} \\ [M_{d+2 \mu}, M_{d+2 d+1}] &= (-i) M_{\nu d+1} \end{aligned} \quad (43)$$

Todos los otros cero. El hecho de que $M_{\mu\nu}$ conmuta con $M_{d+1 d+2}$ sugiere identificar a éste con D . Ahora tenemos

$$\begin{aligned} [D, M_{d+1 \mu}] &= (i) M_{d+2 \mu} \\ [D, M_{d+2 \mu}] &= (i) M_{d+1 \mu} \end{aligned} \quad (44)$$

Esto sugiere identificar

$$\begin{aligned} M_{d+1 \mu} &= \alpha (K_\mu + P_\mu) \\ M_{d+2 \mu} &= \alpha (K_\mu - P_\mu) \end{aligned} \quad (45)$$

Para recuperar el conmutador $[M_{d+1 \mu}, M_{d+1 \nu}]$ necesitamos $\alpha = 1/\sqrt{2}$, lo que convierte a los otros conmutadores en identidades.