La vez pasada vimos que el grupo conforme en d dimensiones es isomorfo al grupo de Lorentz en $d+2$ dimensiones, donde X^{d+2} es el tiempo. Eso nos permite asociar una teoría de campos invariante conforme en d dimensiones a una teoría invariante Lorentz (pero no invariante Poincaré) en $d+2$ dimensiones. Para evitar la no invariancia frente a traslaciones, nos vamos a confinar a una variedad invariante Lorentz. Nuestra elección es el como de la luz

$$\left(X^{d+2}\right)^2 - \left(X^{d+1}\right)^2 = x^2 \tag{1}$$

Si tenemos un campo $\phi\left(x\right)$ en el espacio euclideo, le queremos asociar un campo $\phi\left(X\right)$ en el cono de la luz. Definimos que $\phi\left(X\right) = \phi\left(x\right)$ cuando

$$X^{d+2} + X^{d+1} = 1 \tag{2}$$

Entonces

$$X^{d+2} - X^{d+1} = x^2 \tag{3}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} X^{d+2} &= \frac{1}{2}\left(1+x^2\right) \\ X^{d+1} &= \frac{1}{2}\left(1-x^2\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Luego extendemos esta definición a todo el cono pidiendo invariancia frente a dilataciones

$$\phi\left(\lambda X\right) = \lambda^{-\Delta}\phi\left(X\right) \tag{5}$$

Supongamos que queremos calcular una función de correlación

$$\left\langle \phi\left(X\right)\psi\left(Y\right)\right\rangle \tag{6}$$

Por invariancia Lorentz sólo puede depender de invariantes, y como $X^2 = Y^2 = 0$, el único invariante no trivial es

$$\begin{aligned} -XY &= X^{d+2}Y^{d+2} - X^{d+1}Y^{d+1} - xy \\ &= \frac{1}{4}\left[\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) - \left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\right] - xy \\ &= \frac{1}{2}\left(x-y\right)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Pero además la invariancia frente a dilataciones implica que

$$\left\langle \left[D,\phi\left(x\right)\right]\psi\left(y\right) + \phi\left(x\right)\left[D,\psi\left(y\right)\right]\right\rangle = 0 \tag{8}$$

Por lo que debe ser

$$\left[x\partial_x + y\partial_y + \Delta_\phi + \Delta_\psi\right]\left\langle \phi\left(x\right)\psi\left(y\right)\right\rangle = 0 \tag{9}$$

cuya solución es

$$\left\langle \phi\left(x\right)\psi\left(y\right)\right\rangle \propto \frac{1}{\left(\left(x-y\right)^2\right)^{\left(\Delta_\phi+\Delta_\psi\right)/2}} \tag{10}$$

Si además de la invariancia frente a dilataciones imponemos la invarianza conforme, entonces podemos decir algo mucho más fuerte, porque podemos transformar la función de correlación independientemente en x y en y. Es decir $\phi\left(0\right)$ es trivialmente invariante conforme, por lo cual debe ser

$$\left[\left[x^\rho x^\mu - \frac{1}{2}\delta^{\mu\rho}x^2\right]\partial_\mu + \Delta_\phi x^\rho\right]\frac{1}{\left(x^2\right)^{\left(\Delta_\phi+\Delta_\psi\right)/2}} = 0 \tag{11}$$

es decir

$$\frac{1}{2}\left(\Delta_\phi + \Delta_\psi\right) = \Delta_\phi \tag{12}$$

Esto implica que la función de correlación entre dos campos primitivos sólo puede ser no nula cuando los dos tienen el mismo peso. Si hay un único operador primitivo para cada peso, entonces la matriz de correlaciones es diagonal. Podemos normalizar los campos para que las constantes en los numeradores sean 1.

Tratemos de extender este análisis a una función de tres puntos

$$\langle \phi(x)\,\psi(y)\,\chi(z)\rangle \tag{13}$$

Ahora tenemos tres invariantes XY, XZ e YZ, de manera que esperamos que

$$\langle \phi(x)\,\psi(y)\,\chi(z)\rangle = \frac{\lambda_{\phi\psi\chi}}{\left((x-y)^2\right)^\alpha \left((x-z)^2\right)^\beta \left((y-z)^2\right)^\gamma} \tag{14}$$

La invariancia conforme implica que

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \Delta_\phi \\ \beta + \gamma &= \Delta_\chi \\ \alpha + \gamma &= \Delta_\psi \end{aligned} \tag{15}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}\left(\Delta_\phi + \Delta_\psi - \Delta_\chi\right) \\ \beta &= \frac{1}{2}\left(\Delta_\phi + \Delta_\chi - \Delta_\psi\right) \\ \gamma &= \frac{1}{2}\left(\Delta_\phi + \Delta_\psi - \Delta_\chi\right) \end{aligned} \tag{16}$$

La función de correlación es única a menos de una constante multiplicativa.

Veamos ahora la función de cuatro puntos de un único campo primitivo

$$\langle \phi(x_1)\,\phi(x_2)\,\phi(x_3)\,\phi(x_4)\rangle \tag{17}$$

No sólo ahora tenemos 6 invariantes no triviales, sino que podemos formar dos cantidades que son invariantes Lorentz e invariantes conformes, a saber

$$\begin{aligned} u &= \frac{(X_1X_2)(X_3X_4)}{(X_1X_3)(X_2X_4)} \\ v &= \frac{(X_1X_4)(X_2X_3)}{(X_1X_3)(X_2X_4)} \end{aligned} \tag{18}$$

La solución general entonces es un factor que salve la invariancia conforme por una función arbitraria de u y v, por ejemplo

$$\langle \phi(x_1)\,\phi(x_2)\,\phi(x_3)\,\phi(x_4)\rangle = \frac{g(u,v)}{\left((r_{12})^2\right)^\Delta \left((r_{34})^2\right)^\Delta} \tag{19}$$

La función de cuatro puntos es totalmente simétrica, de manera que podríamos haber asociado los campos de una manera distinta, por ejemplo

$$\langle \phi(x_1)\,\phi(x_2)\,\phi(x_3)\,\phi(x_4)\rangle = \frac{g(u',v')}{\left((r_{23})^2\right)^\Delta \left((r_{14})^2\right)^\Delta} \tag{20}$$

donde ahora

$$
\begin{aligned}
u' &= \frac{(X_3X_2)(X_1X_4)}{(X_1X_3)(X_2X_4)} = v \\
v' &= \frac{(X_3X_4)(X_1X_2)}{(X_1X_3)(X_2X_4)} = u
\end{aligned} \tag{21}
$$

Ahora

$$
\frac{1}{\left((r_{23})^2\right)^{\Delta}\left((r_{14})^2\right)^{\Delta}} = \frac{1}{\left((r_{12})^2\right)^{\Delta}\left((r_{34})^2\right)^{\Delta}}\left(\frac{u}{v}\right)^{\Delta} \tag{22}
$$

Por lo tanto la función g tiene que tener la *simetría de cruzamiento*

$$
g(u,v) = \left(\frac{u}{v}\right)^{\Delta} g(v,u) \tag{23}
$$

Es interesante dar una ejemplo concreto. En una teoría libre vale el teorema de Wick

$$
\begin{aligned}
& \langle \phi(x_1)\,\phi(x_2)\,\phi(x_3)\,\phi(x_4)\rangle \\
= & \langle \phi(x_1)\,\phi(x_2)\rangle \langle \phi(x_3)\,\phi(x_4)\rangle + \langle \phi(x_1)\,\phi(x_3)\rangle \langle \phi(x_2)\,\phi(x_4)\rangle + \langle \phi(x_1)\,\phi(x_4)\rangle \langle \phi(x_2)\,\phi(x_3)\rangle \\
= & \frac{1}{\left((r_{12})^2\right)^{\Delta}\left((r_{34})^2\right)^{\Delta}} + \frac{1}{\left((r_{13})^2\right)^{\Delta}\left((r_{24})^2\right)^{\Delta}} + \frac{1}{\left((r_{14})^2\right)^{\Delta}\left((r_{23})^2\right)^{\Delta}} \\
= & \frac{1}{\left((r_{12})^2\right)^{\Delta}\left((r_{34})^2\right)^{\Delta}}\left[1 + u^{\Delta} + \left(\frac{u}{v}\right)^{\Delta}\right]
\end{aligned} \tag{24}
$$

o sea que efectivamente

$$
g(u,v) = 1 + u^{\Delta} + \left(\frac{u}{v}\right)^{\Delta} = \left(\frac{u}{v}\right)^{\Delta} g(v,u) \tag{25}
$$

1 La expansión del producto de operadores

Las teorías de campos tienen generalmente la propiedad de "descomposición en racimos". Si yo tengo una función de correlación

$$
\langle \phi(x_1)\ldots\phi(x_m)\,\psi(Y_1)\ldots\psi(Y_n)\rangle \tag{26}
$$

y tomamos $Y_k \to \infty$, entonces la función de correlación factoriza en

$$
\langle \phi(x_1)\ldots\phi(x_m)\rangle \langle \psi(Y_1)\ldots\psi(Y_n)\rangle \tag{27}
$$

Como una teoría conforme no tiene una escala intrínseca, hacer los Y_k muy grandes es lo mismo que hacer los x_j muy chicos. Como además esta identidad vale para cualquier operador ψ (tampoco tienen que ser todos iguales), estamos diciendo que

$$
\lim_{x_j\to 0}\phi(x_1)\ldots\phi(x_m) = \langle \phi(x_1)\ldots\phi(x_m)\rangle\ \mathbf{1} \tag{28}
$$

La expansión en producto de operadores consiste en pensar que éste es el primer término de un desarrollo

$$
\phi(x)\,\phi(y) = \sum_j f_i(r)\,\phi_i(y) \tag{29}
$$

donde en principio hay un término para cada operador ϕ_i de la teoría. La idea es que como la función f_i escalea como $r^{\Delta_i - 2\Delta}$, y cada operador tiene un peso $(d-2)/2$, sólo los operadores más "livianos" contribuyen cuando r es "pequeño".

En principio la "expansión del producto de operadores" involucra tanto a operadores primitivos como a sus descendientes. pero como éstos son derivadas de aquéllos, podemos agrupar a todos los descendientes del mismo operador primitivo y escribir

$$\phi(x)\,\phi(y)=\sum_j f_j(r,\partial_y)\,\phi_j(y) \tag{30}$$

donde ahora la suma es sólo sobre operadores primitivos, que siguen siendo un montón (cualquier función de un operador primitivo es un operador primitivo).

Ahora, supongamos que para cada peso hay un único operador primitivo. Entonces

$$\langle\phi(x)\,\phi(y)\,\phi_j(z)\rangle=f_j(r,\partial_y)\,\frac{1}{r_{yz}^{2\Delta_j}} \tag{31}$$

y por otro lado

$$\langle\phi(x)\,\phi(y)\,\phi_j(z)\rangle=\frac{\lambda_{\phi\phi\phi_j}}{r_{xy}^{2\Delta-\Delta_j}\,r_{xz}^{\Delta_j}\,r_{yz}^{\Delta_j}} \tag{32}$$

De manera que, si escribimos

$$f_j(r,\partial_y)=\frac{\lambda_{\phi\phi\phi_j}}{r_{xy}^{2\Delta-\Delta_j}}\tilde{f}_j(r,\partial_y) \tag{33}$$

Entonces

$$\frac{1}{r_{xz}^{\Delta_j}\,r_{yz}^{\Delta_j}}=\tilde{f}_j(r,\partial_y)\,\frac{1}{r_{yz}^{2\Delta_j}} \tag{34}$$

Expandiendo ambos lados en potencias de r podemos obtener una expresión para el operador $\tilde{f}$.