1 Los cordones de zapatos conformes

Recapitulando algunos resultados: la función de dos puntos de un mismo operador

$$\langle\phi(x_1)\,\phi(x_2)\rangle = \frac{1}{r_{12}^{2\Delta}} \tag{1}$$

La función de tres puntos de tres operatores arbitrarios

$$\langle\phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\,\phi_3(x_3)\rangle = \frac{\lambda_{123}}{\left(r_{12}^2\right)^{\alpha_{12,3}}\left(r_{13}^2\right)^{\alpha_{13,2}}\left(r_{23}^2\right)^{\alpha_{23,1}}} \tag{2}$$

donde

$$\alpha_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k\right) \tag{3}$$

La función de cuatro puntos de un único campo primitivo

$$\langle\phi(x_1)\,\phi(x_2)\,\phi(x_3)\,\phi(x_4)\rangle = \frac{g(u,v)}{\left(r_{12}^2\right)^{\Delta}\left(r_{34}^2\right)^{\Delta}} \tag{4}$$

donde

$$\begin{aligned} u &= \frac{r_{12}^2 r_{34}^2}{r_{13}^2 r_{24}^2} \\ v &= \frac{r_{14}^2 r_{23}^2}{r_{13}^2 r_{24}^2} \end{aligned} \tag{5}$$

La función g debe satisfacer la invariancia de cruzamiento

$$g(u,v) = \left(\frac{u}{v}\right)^{\Delta} g(v,u) \tag{6}$$

La expansión del producto de operadores nos permite desarrollar

$$\phi(x_1)\,\phi(x_2) = \sum_j f_j(r_{12},\partial_2)\,\phi_j(x_2) \tag{7}$$

donde la suma es sobre todos los operadores operadores primitivos. Si para cada peso hay un único operador primitivo, entonces

$$\langle\phi(x_1)\,\phi(x_2)\,\phi_j(x_3)\rangle = f_j(r_{12},\partial_2)\,\frac{1}{r_{23}^{2\Delta_j}} \tag{8}$$

Definimos

$$f_j(r_{12},\partial_2) = \frac{\lambda_j}{r_{12}^{2\Delta}}\tilde{f}_j(r_{12},\partial_2) \tag{9}$$

Entonces

$$\frac{\left(r_{12}^2\right)^{\Delta_j/2}}{\left(r_{13}^2\right)^{\Delta_j/2}\left(r_{23}^2\right)^{\Delta_j/2}} = \tilde{f}_j(r_{12},\partial_2)\,\frac{1}{r_{23}^{2\Delta_j}} \tag{10}$$

Desarrollando el lado izquierdo en potencias de r_{12} podemos deducir el desarrollo de $\tilde{f}$. Por ejemplo,si $\phi_j = \mathbf{1}$, entonces $\lambda_{\mathbf{1}} = 1$ y $\tilde{f} = 1$. Lo importante es quee sta ecuación se puede resolver, es decir, podemos calcular $\tilde{f}_j$ y además el resultado depende solamente de los “datos conformes”, es decir, de los λ_j's y los pesos de los operadores primitivos. Este conjunto de números determina totalmente la teoría, la pregunta es si dada una elección arbitraria existe una teoría conforme que los tenga como datos.

Por ejemplo, ara un ϕ_j cualquiera, supongamos a primer orden

$$\tilde{f}_j(r_{12},\partial_2) = \left(r_{12}^2\right)^{\Delta_j/2}\left[1 + A r_{12}^{\mu}\frac{\partial}{\partial r_{23}^{\mu}} + \ldots\right] \tag{11}$$

Entonces debe ser

$$\left(1+2\frac{r_{12}\cdot r_{23}}{r_{23}^2}\right)^{\Delta_j/2}\left[1-2A\Delta_j\frac{r_{12}\cdot r_{23}}{r_{23}^2}\right]=1 \tag{12}$$

a primer orden en r_{12}, o sea

$$A=\frac{1}{2} \tag{13}$$

Ahora miremos la función de 4 puntos de un mismo operador. Usando la expansión del producto de $\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)$ y la de $\phi\left(x_3\right)\phi\left(x_4\right)$, y que la función de dos puntos es diagonal, entonces

$$\frac{g\left(u,v\right)}{\left(r_{12}^2\right)^{\Delta}\left(r_{34}^2\right)^{\Delta}}=\frac{1}{\left(r_{12}^2\right)^{\Delta}\left(r_{34}^2\right)^{\Delta}}\sum_j\lambda_j^2\tilde{f}_j\left(r_{12},\partial_2\right)\tilde{f}_j\left(r_{34},\partial_4\right)\frac{1}{r_{24}^{2\Delta_j}} \tag{14}$$

Si llamamos

$$g_j\left(u,v\right)=\tilde{f}_j\left(r_{12},\partial_2\right)\tilde{f}_j\left(r_{34},\partial_4\right)\frac{1}{r_{24}^{2\Delta_j}} \tag{15}$$

(g_j tiene que ser función de u y de v porque es invariante de escala) entonces

$$g\left(u,v\right)=\sum_j\lambda_j^2g_j\left(u,v\right) \tag{16}$$

Y la invarianza de cruzamiento nos da una condición de consistencia sobre los “datos conformes”

$$\sum_j\lambda_j^2\left[v^{\Delta}g_j\left(u,v\right)-u^{\Delta}g_j\left(v,u\right)\right]=0 \tag{17}$$

Para todo par (u,v). Esta condición es extremadamente exigente. El *conformal bootstrap* se basa en la esperanza de que en última instancia, un conjunto reducido de datos conformes sean las únicas soluciones, de manera que cualquier teoría conforme corresponda a alguna de esas (pocas) soluciones.

2 Teoría de perturbaciones conformes

Como ya vimos, todos los exponentes críticos del modelo de Isisng se pueden calcular a partir de los exponentes críticos ν y η que aparecen en la función de correlación

$$\left\langle\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\right\rangle=\frac{1}{r^{d-2+\eta}}f\left[\frac{r}{\xi}\right] \tag{18}$$

con $\xi=t^{-\nu}$. Si la teoría en el punto crítico $t=0$ es una teoría conforme, entonces η se obtiene del peso del operador ϕ

$$\eta=2\Delta-d+2 \tag{19}$$

Pero para calcular ν tenemos que corrernos del punto crítico. La idea es que en un vecindario del punto crítico la acción toma la forma

$$S=S_c+t\int d^dx\,\epsilon\left(x\right) \tag{20}$$

donde ϵ es algún operador primitivo, de manera que a primer orden en t

$$\left\langle\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\right\rangle=\left\langle\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\right\rangle_c-t\int d^dx_3\left\{\left\langle\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\epsilon\left(x_3\right)\right\rangle_c-\left\langle\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\right\rangle_c\left\langle\epsilon\left(x_3\right)\right\rangle_c\right\} \tag{21}$$

donde las funciones de correlación del lado derecho están calculadas en el punto crítico, es decir

$$\left\langle\phi\left(x_1\right)\phi\left(x_2\right)\right\rangle=\frac{Z}{r_{12}^{2\Delta}}\left[1-\lambda_{\phi\phi\epsilon}t\,r_{12}^{\Delta_\epsilon}\int\frac{d^dx_3}{\left[r_{13}r_{23}\right]^{\Delta_\epsilon}}\right] \tag{22}$$

con

$$Z = 1 + t \int d^d x_3 \ \langle \epsilon(x_3) \rangle \tag{23}$$

La integral escalea como $r_{12}^{d-2\Delta_\epsilon}$ y por lo tanto (curando divergencias infrarojas si aparecen)

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = \frac{Z}{r_{12}^{2\Delta}} \left[1 - C\lambda_{\phi\phi\epsilon} t \, r_{12}^{d-\Delta_\epsilon} \right] \tag{24}$$

de manera que

$$\xi \propto t^{-1/(d-\Delta_\epsilon)} \tag{25}$$

y

$$\nu = \frac{1}{d - \Delta_\epsilon} \tag{26}$$

3 Teorías conformes en dos dimensiones

Hasta ahora hemos asumido que $d > 2$. El motivo es que el grupo conforme en $d = 2$ es radicalmente distinto al grupo en otras dimensiones.

En dos dimensiones, la acción es

$$S = \frac{1}{2} \int \ dxdy \ \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] \tag{27}$$

Podemos hacer un cambio de variables a

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x + iy) \\ z^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x - iy) \end{aligned} \tag{28}$$

y la acción se convierte en

$$S = (-i) \int \ dz^* dz \ \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \tag{29}$$

Esta forma de la acción es invariante frente a un cambio de coordenadas de la forma

$$z \to \xi = f(z) \tag{30}$$

(la gracia es que esto es mucho más restrictivo que un cambio de coordenadas cualquiera, $\xi = f(z, z^*)$), ya que

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \to \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \tag{31}$$

pero

$$dz \to \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi \tag{32}$$

y lo mismo para z^*. Para una transformación infinitesimal

$$\xi = z + \delta f(z) \tag{33}$$

con

$$\delta f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n z^n \tag{34}$$

de manera que tenemos infinitos parámetros multiplicando infinitos generadores

$$L_n = iz^{n+1}\partial_z \tag{35}$$

Estos generadores obedecen el *álgebra de Witt*

$$[L_n, L_m] = i\,(m-n)\,L_{m+n} \tag{36}$$

Los operadores $L_{-1} = i\partial_z$, $L_0 = iz\partial_z$ y $L_1 = iz^2\partial_z$ dorman una sub-álgebra, y corresponden a las traslaciones, las dilataciones, y las transformaciones conformes en $d > 2$, respectivamente.

El álgebra de Witt es un caso particular del *álgebra de Virasoro*

$$[L_n, L_m] = i\left\{(m-n)\,L_{m+n} + \frac{C}{12}n\left(n^2-1\right)\delta_{n,-m}\right\} \tag{37}$$

donde la *carga central* C es un operador que conmuta con todos los L_n. Virasoro encontró su álgebra trabajando en la teoría del *bootstrap* de la matriz S; su trabajo es un antecedente inmediato de la teoría de cuerdas.

4 Sobre la literatura

En estas tres clases sobre teorías conformes seguimos el libro de Gillioz

Marc Gillioz, Conformal Field Theory for Particle Physicists, Springer (2023).

Otras referencias útiles son

Slava Rychkov, 3D Ising model: a view from the conformal bootstrap island, Comptes Rendus Physique 2020, 21, 2, p. 185-198
https://doi.org/10.5802/crphys.23

Slava Rychkov, EPFL Lectures on Conformal Field Theory in D $\geq$ 3 Dimensions, Springer (2017).

Una referencia reciente sobre el bootstrap

Slava Rychkov, Ning Su, New Developments in the Numerical Conformal Bootstrap, arXiv:2311.15844v3

Hay un capítulo sobre OPE en teoría de campos en general en el Weinberg II.

Sobre conformal perturbation theory ver

P. Christe, M. Henkel, Introduction to Conformal Invariance and Its Applications to Critical Phenomena, Springer (1993)

Un artículo más reciente

Andrea Amoretti and Nicodemo Magnoli, On conformal perturbation theory, arXiv:1705.03502

El trabajo original de Virasoro

M. A. Virasoro, Subsidiary Conditions and Ghosts in Dual-Resonance Models, Phys. Rev. 1, 2933 (1970).

Sobre el bootstrap de la matriz S y su conversión en teoría de cuerdas ver

Dean Rickles, A brief history of string theory, Springer (2014).