1. Funciones de correlación a temperatura finita

Queremos decir algo acerca de las funciones de dos puntos de un campo escalar (como representativo de todos los campos bosónicos) a temperatura finita. Las correlaciones que nos ocupan son el propagador de frecuencia positiva

$$G^{+}\left(x,x'\right)=\left\langle \phi\left(x\right)\phi\left(x'\right)\right\rangle , \tag{1}$$

el de frecuencia negativa

$$G^{-}\left(x,x'\right)=\left\langle \phi\left(x'\right)\phi\left(x\right)\right\rangle , \tag{2}$$

el de Jordan

$$G\left(x,x'\right)=\left\langle \left[\phi\left(x\right),\phi\left(x'\right)\right]\right\rangle , \tag{3}$$

y el de Hadamard

$$G_{1}\left(x,x'\right)=\left\langle \left\{\phi\left(x\right),\phi\left(x'\right)\right\}\right\rangle , \tag{4}$$

La razón de los nombres viene de laa forma de estos propagadores para un campo libre en vacío. Desarrollando

$$\phi\left(x,t\right)=\int\frac{d^{3}k}{\left(2\pi\right)^{3}}e^{ikx}\left[a_{k}\frac{e^{-i\omega_{k}t}}{\sqrt{2\omega_{k}}}+a_{-k}^{\dagger}\frac{e^{i\omega_{k}t}}{\sqrt{2\omega_{k}}}\right] \tag{5}$$

con

$$\omega_{k}=+\sqrt{k^{2}+m^{2}} \tag{6}$$

vemos que efectivamente, en vacío

$$G^{+}\left(\left(x,t\right),\left(x',t'\right)\right)=\int\frac{d^{3}k}{\left(2\pi\right)^{3}}e^{ik\left(x-x'\right)}\frac{e^{-i\omega_{k}\left(t-t'\right)}}{2\omega_{k}} \tag{7}$$

sólo contiene frecuencias positivas. Podemos escribir una forma completamente covariante usando que

$$\delta\left(\omega^{2}-\omega_{k}^{2}\right)=\frac{1}{2\omega_{k}}\left[\delta\left(\omega-\omega_{k}\right)+\delta\left(\omega+\omega_{k}\right)\right] \tag{8}$$

de manera que

$$G^{+}\left(x,x'\right)=\int\frac{d^{4}k}{\left(2\pi\right)^{4}}e^{ik_{\mu}\left(x-x'\right)^{\mu}}\rho\left[k^{2}\right]\theta\left[k^{0}\right] \tag{9}$$

donde

$$\rho\left[k^{2}\right]=2\pi\delta\left(-k^{2}-m^{2}\right) \tag{10}$$

De la misma forma el propagador de Jordan

$$G\left(x,x'\right)=\int\frac{d^{4}k}{\left(2\pi\right)^{4}}e^{ik_{\mu}\left(x-x'\right)^{\mu}}\rho\left[k^{2}\right]\mathrm{sign}\left[k^{0}\right] \tag{11}$$

Ahora consideremos el caso de temperatura finita. Trabajamos en representación de Heisenberg, donde

$$\phi\left(x,t\right)=e^{itH}\phi\left(x,0\right)e^{-itH} \tag{12}$$

Entonces

$$\begin{aligned}G^{+}\left(\left(x,t\right),\left(x',t'\right)\right) &= \mathrm{tr}\ e^{-\beta H}\phi\left(x,t\right)\phi\left(x',t'\right)\\ &= \mathrm{tr}\ \phi\left(x,t+i\beta\right)e^{-\beta H}\phi\left(x',t'\right)\\ &= G^{-}\left(\left(x,t+i\beta\right),\left(x',t'\right)\right)\end{aligned} \tag{13}$$

Este es el “teorema KMS”, por Kubo, Martin y Schwinger. En términos de la transformada de Fourier

$$G^{\pm}(x,x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu(x-x')^\mu} G^{\pm}[k] \tag{14}$$

resulta, con $\omega = k^0$

$$G^+[k] = e^{\beta\omega} G^-[k] \tag{15}$$

Por otro lado, siempre

$$G^+[k] - G^-[k] = G[k] \tag{16}$$

y entonces

$$G^-[k] = \frac{G[k]}{e^{\beta\omega} - 1} \tag{17}$$

Si escribimos

$$G[k] = \mathrm{sign}[\omega]\,\rho[k] \tag{18}$$

resulta

$$G^-[k] = \rho[k]\left[\theta(-\omega) + f_{BE}(|\omega|)\right] \tag{19}$$

donde f_{BE} es la distribución de Bose-Einstein

$$f_{BE}(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \tag{20}$$

Nótese que para un campo libre ρ no depende de la temperatura. Similarmente

$$G^+[k] = \rho[k]\left[\theta(\omega) + f_{BE}(|\omega|)\right] \tag{21}$$

y

$$G_1[k] = 2\rho[k]\left[\frac{1}{2} + f_{BE}(|\omega|)\right] \tag{22}$$

Supongamos que la teoría es una $\lambda\phi^4$. La corrección a primer orden a la masa del campo es la contribución del *tadpole*

$$M^2 = M_B^2 + \frac{1}{2}\lambda G_1(x,x) \tag{23}$$

Vemos que el tadpole se descompone en una contribución de punto cero y una masa térmica, de modo que

$$M^2 = M_{ren}^2 + M_T^2 \tag{24}$$

$$M_T^2 = \lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\rho[k]\,f_{BE}(|\omega|) \tag{25}$$

Si la teoría tiene rompimiento espontáneo de simetría, existe una temperatura T_c en que $M^2 = 0$. Usando la forma de campo libre de ρ, a esa temperatura

$$M_T^2 = \alpha\lambda T_c^2 \tag{26}$$

donde α es un número calculable. Como $M^2 = 0$, quiere decir que

$$M_{ren}^2 = -\alpha\lambda T_c^2 \tag{27}$$

En general, esperamos que si el acoplamiento es débil $M^2 \ll T^2$ en todo el rango, de manera que es posible despreciar M al calcular la masa térmica, y obtenemos

$$M^2 = \alpha\lambda\left(T^2 - T_c^2\right) \tag{28}$$

2. El caso fermiónico

El caso fermiónico es similar, pero ahora, en atención al hecho de que los campos fermiónicos anticonmutan, definimos

$$G^{+}(x, x') = \left\langle \psi(x)\, \bar{\psi}(x') \right\rangle \tag{29}$$

pero

$$G^{-}(x, x') = -\left\langle \bar{\psi}(x')\, \psi(x) \right\rangle \tag{30}$$

Si queremos escribir una representación como integrales de camino de estos propagadores, debemos considerar campos a lo largo de un camino temporal que empieza en 0 y termina en $-i\beta$, con condiciones de contorno *anti*-periódicas.

Nótese que

$$G(x, x') = \left\langle \left\{ \psi(x), \bar{\psi}(x') \right\} \right\rangle = G^{+} - G^{-} \tag{31}$$

de modo que ahora

$$\begin{aligned} G^{+} + e^{\beta\omega} G^{-} &= 0 \\ G^{+} - G^{-} &= G \end{aligned} \tag{32}$$

Definiendo como en el caso bosónico

$$G = \mathrm{sign}\,[\omega]\, \rho\,[k] \tag{33}$$

Obtenemos

$$G^{+}[k] = \rho\,[k]\,[\theta(\omega) - f_{FD}(|\omega|)] \tag{34}$$

Donde f_{FD} es la distribución de Fermi-Dirac

$$f_{FD}(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} + 1} \tag{35}$$

y similarmente los otros propagadores. Ver M. Le Bellac, Thermal Field Theory, Cambridge (1996).

3. Campos de gauge

Cuando queremos aplicar ésto a campos de gauge tenemos un problema. La viabilidad del método de Fadeev-Popov depende del hecho de que las contribuciones radiativas de los campos no-físicos (los modos longitudinales de los campos de gauge y los fantasmas) se cancelan mutuamentecuando uno calcula valores de expectación de observables físicos. Pero a temperatura finita, los campos de gauge obedecerían a la estadística de Bose-Einstein, mientras que los fantasmas seguirían la de Fermi-Dirac, de modo que tal cancelación se vuelve imposible.

Empecemos por recordar el método de Fadeev-Popov. Tenemos una teoría de campos ϕ^A (estamos metiendo los campos "de gauge" y "de materia" en la misma bolsa) con una acción S que es invariante frente a la transformación

$$\delta\phi^A = T^A_a\,[\phi]\,\epsilon^a \tag{36}$$

donde asumimos que $T^A_{a,A} = 0$. La invariancia se expresa en la ecuación

$$S_{,A} T^A_a = 0 \tag{37}$$

Si el grupo es no abeliano,entonces

$$T^A_{a,D} T^D_b - T^A_{b,D} T^D_a = C^c_{ab} T^A_c \tag{38}$$

Las $C^c ab$son las constantes de estructura del grupo. Asumimos que $C^a_{ab} = 0$, que es mucho menos que pedir $C^a_{bc} = -C^b_{ac}$ como hecho hace algunas clases. En estas condiciones la integral de camino

$$\int D\phi^A\; e^{iS} \tag{39}$$

requiere un fijado de gauge $f^a_{,A}\phi^A = c^a$. Vamos a asumir que $f^a_{,A}$ no depende de los campos. Para que sea una "buena" condición de gauge el operador

$$f^a_{,C}T^C_b \tag{40}$$

debe ser no singular. Ahora la integral de camino corregida queda

$$\int D\phi^A\ e^{iS}\delta\left(f^a_{,A}\phi^A - c^a\right)\ \mathrm{Det}\left[f^a_{,C}T^C_b\right] \tag{41}$$

Exponenciamos la delta con un campo auxiliar h_a, el determinante mediante variables de Grassmann,y promediamos sobre los c^a para obtener

$$\int D\phi^A\ e^{iS_{FP}} \tag{42}$$

donde

$$S_{FP} = S + \frac{\alpha}{2}h_a h^a + h_a f^a_{,A}\phi^A + i\chi_a f^a_{,C}T^C_b\omega^b \tag{43}$$

Podemos pensar a S_{FP} como una nueva teoría clásica, que incluye grados de libertad no físicos, identificar el Hamiltoniano correspondiente y construír un "estado térmico" ρ. Eso nos lleva al problema que mencionamos al principio.

El problema con ρ es que asigna probabilidades no nulas a estados que no son invariantes de gauge,y por lo tanto no son estados físicos. La matriz densidad "verdadera" sería $P\rho$, donde P es el proyector sobre los estados físicos. El tema es que a) no sabemos quién es P, y b) no queremos eliminar los grados de libertad no físicos, ya que eso sería renunciar a usar el método de Fadeev-Popov. Nuestra estrategia va a ser construir a partir de ρ una nueva matriz densidad $\tilde{\rho}$ que tampoco va a ser física, pero tal que

$$\langle C\rangle = \mathrm{Tr}\ P\rho\ C = \mathrm{Tr}\ \tilde{\rho}\ C \tag{44}$$

si C es un observable físico. Así al menos sabemos que los valores de expectación de observables físicos calculados con $\tilde{\rho}$ son confiables.

Empecemos con la observación de que S_{FP} es simétrica ante la transformación BRST, que para los campos ϕ^A es una transformación de gauge con parámetro $\epsilon^a = \theta\omega^a$, donde θ es una constante Grassmann

$$\delta\phi^A = T^A_a\theta\omega^a \tag{45}$$

Entonces tenemos

$$0 = \delta S_{FP} = \frac{\delta S_{FP}}{\delta\phi^A}\delta\phi^A + \frac{\delta S_{FP}}{\delta h^a}\delta h^a + \frac{\delta S_{FP}}{\delta\chi_a}\delta\chi_a + \frac{\delta S_{FP}}{\delta\omega^a}\delta\omega^a \tag{46}$$

Vamos a simplificar poniendo $\delta h^a = 0$; entonces, usando que S ya es invariante de gauge

$$0 = \left[h_a f^a_{,C} + i\chi_a f^a_{,D}T^D_{d,C}\omega^d\right]T^C_b\theta\omega^b + i\delta\chi_a f^a_{,C}T^C_b\omega^b + i\chi_a f^a_{,D}T^D_b\delta\omega^b \tag{47}$$

Esto sugiere

$$\delta\chi_a = ih_a\theta \tag{48}$$

y todavía tenemos que lidiar con

$$0 = i\chi_a f^a_{,D}\left[-\theta T^D_{d,C}T^C_b\omega^d\omega^b + T^D_b\delta\omega^b\right] \tag{49}$$

Por la antisimetría de los fantasmas

$$\theta T^D_{d,C}T^C_b\omega^d\omega^b = \frac{1}{2}T^D_b C^b_{cd}\omega^c\omega^d \tag{50}$$

de modo que es suficiente asumir

$$\delta\omega^b = \frac{1}{2}\theta C^b_{cd}\omega^c\omega^d \tag{51}$$

que por supuesto se anula si el grupo de gauge es abeliano.

Ahora vamos a definir tres operadores, Ω, Q y R.

Ω es el generador de las transformaciones BRST, en el sentido de que para cualquiera de los campos $X^r = \left(\phi^A, h_a, \chi_a, \omega^a\right)$,

$$\delta X^r = \theta \Omega \left[X^r\right] \tag{52}$$

Es sencillo verificar que

$$\frac{\delta \Omega \left[X^r\right]}{\delta X^r} = 0 \tag{53}$$

(que implica que la medida de integración es invariante BRST) y

$$\Omega^2 = 0 \tag{54}$$

Es decir que

$$\frac{\delta \Omega \left[X^r\right]}{\delta X^s} \Omega \left[X^s\right] = 0 \tag{55}$$

(por ejemplo, esto es obvio para χ_a; para los otros hay que hacer la cuenta).

Cuando cuantificamos la teoría, esta propiedad nos va a permitir clasificar los estados en exactos, cerrados no exactos, y su complemento. Los exactos son los que son la transformada BRST de algún estado

$$|\alpha\rangle = \Omega \left|\beta\right\rangle \tag{56}$$

Los cerrados son el núcleo de Ω

$$\Omega \left|\alpha\right\rangle = 0 \tag{57}$$

Todos los estados exactos son cerrados, pero puede haber estados cerrados que no son exactos.

Un estado físico debe ser cerrado, pero dos estados cerrados que difieren en un estado exacto dan los mismos valores de expectación para todos los observables físicos (que conmutan con Ω), y por lo tanto representan el mismo estado físico. Es decir, un estado físico es un estado cerrado y todos los estados que se obtienen de éste sumándole un estado exacto. Los estados exactos no son estados físicos, ya que son equivalentes al vector nulo.

Ahora podemos definir el operador R.

El operador R es la inversa de Ω en el subespacio de estados exactos, y el operador nulo en su complemento. Es decir, si hay un $|\beta\rangle$ tal que $|\alpha\rangle = \Omega\,|\beta\rangle$, entonces $R\,|\alpha\rangle = |\beta\rangle$; si no lo hay, $R\,|\alpha\rangle = 0$.

Entonces $\{\Omega, R\}$ es un proyector que aniquila a los estados cerrados que no son exactos. Si $|\alpha\rangle$ es cerrado pero no exacto, tenemos $\Omega\,|\alpha\rangle = 0$ por cerrado y $R\,|\alpha\rangle = 0$ por no ser exacto. Si $|\alpha\rangle$ no es cerrado, $R\,|\alpha\rangle = 0$ pero $\Omega\,|\alpha\rangle$ es exacto, y $R\Omega\,|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$. Si $|\alpha\rangle$ es exacto, $\Omega\,|\alpha\rangle = 0$, pero $R\,|\alpha\rangle$ es un estado que, cuando le apliquemos Ω, nos va a dar otra vez $|\alpha\rangle$. Como $\{\Omega, R\}$ mata a los estados físicos, podemos escribir la proyección sobre los estados físicos como $P = 1 - \{\Omega, R\}$.

Finalmente vamos a definir el operador Q. Q (en la versión cuántica, iQ) "cuenta" el número de fantasmas en un estado, contando que ω^a tiene número de fantasma igual a 1, y χ_a tiene número de fantasma igual a -1. Para un operador C, si C tiene número de fantasma c, entonces $i\,[Q, C] = cC$. Nótese que

$$i\left[Q, \Omega\right] = \Omega \tag{58}$$

pero que

$$\left\{e^{-\pi Q}, \Omega\right\} = 0 \tag{59}$$

Para verificar ésto, basta ver qué pasa con los autovectores de iQ. Si un estado $|\alpha\rangle$ tiene número de fantasma n_α, entonces $iQ\,|\alpha\rangle = n_\alpha\,|\alpha\rangle$, pero

$$iQ\Omega\left|\alpha\right\rangle = \left(n_\alpha + 1\right)\Omega\left|\alpha\right\rangle \tag{60}$$

y entonces

$$e^{-\pi Q}\Omega\left|\alpha\right\rangle = e^{i\pi(n_\alpha+1)}\Omega\left|\alpha\right\rangle = -\Omega e^{-\pi Q}\left|\alpha\right\rangle \tag{61}$$

Obsérvese que $Pe^{-\pi Q} = P$, ya que P mata cualquier estado con $Q \neq 0$.

Si tenemos una matriz densidad invariante BRST, $[\Omega, \rho] = 0$, y C es también invariante BRST (todos los observables físicos lo son), entonces

$$\langle C\rangle = \mathrm{tr}\ P\rho C = \mathrm{tr}\ Pe^{-\pi Q}\rho C = \mathrm{tr}\ e^{-\pi Q}\rho C - \mathrm{tr}\ \{\Omega, R\}\, e^{-\pi Q}\rho C \tag{62}$$

y el último término se reduce a

$$\mathrm{tr}\ R\left\{\Omega, e^{-\pi Q}\right\}\rho C = 0 \tag{63}$$

de manera que

$$\tilde{\rho} = e^{-\pi Q}\rho \tag{64}$$

es la matriz densidad "mejorada" que estábamos buscando.

Ahora tenemos, por ejemplo

$$\begin{aligned} G^{+}\left(t, t'\right) &= \left\langle \omega^{b}\left(t\right)\chi_{a}\left(t'\right)\right\rangle \\ &= \mathrm{tr}\ e^{-\pi Q}e^{-\beta H}\omega^{b}\left(t\right)\chi_{a}\left(t'\right) \\ &= \mathrm{tr}\ e^{-\pi Q}\omega^{b}\left(t+i\beta\right)e^{-\beta H}\chi_{a}\left(t'\right) \\ &= -\mathrm{tr}\ \omega^{b}\left(t+i\beta\right)e^{-\pi Q}e^{-\beta H}\chi_{a}\left(t'\right) \\ &= -\mathrm{tr}\ e^{-\pi Q}e^{-\beta H}\chi_{a}\left(t'\right)\omega^{b}\left(t+i\beta\right) = G^{-}\left(t+i\beta, t'\right) \end{aligned} \tag{65}$$

por lo cual los propagadores de los fantasmas se construyen con la estadística de Bose-Einstein.

En Calzetta y Hu, Nonequilibrium quantum field theory, Cambridge (2008), cap. 7, están las referencias a la literatura original.