

1. Teoría cuántica del decaimiento de un estado metaestable

En “The uses of instantons”, S. Coleman calcula el decaimiento de un estado metaestable en teoría de campos evaluando una integral de camino en el límite semiclásico. Para mostrar que el método funciona primero resuelve dos problemas en mecánica cuántica no relativista. Eso supone que uno sabe la respuesta para estos dos problemas, de manera de poder comparar con el método semiclásico.

El primer problema es el dos pozos de potencial idénticos separados por una barrera. Si la barrera es impenetrable, uno tiene dos estados degenerados, digamos $|L\rangle$ y $|R\rangle$. Si la barrera es penetrable, entonces estos estados ya no son autoestados del Hamiltoniano, que toma la forma

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -\epsilon \\ -\epsilon & E_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Los autoestados son

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|L\rangle \pm |R\rangle] \quad (2)$$

con energías

$$E_{\pm} = E_0 \mp \epsilon \quad (3)$$

respectivamente. Nótese que en términos de funciones de onda, la de los estados $|L\rangle$ y $|R\rangle$ no tienen nodos, ya que son los estados de vacío de un sistema (cuando la barrera es impenetrable), por lo tanto tampoco tiene nodos la función de onda $\langle x|+\rangle$.

Si preparamos el sistema en el estado $|L\rangle$, después de un tiempo tenemos

$$\begin{aligned} |\psi\rangle(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_0 t/\hbar} \left[e^{i\epsilon t/\hbar} |+\rangle + e^{-i\epsilon t/\hbar} |-\rangle \right] \\ &= e^{-iE_0 t/\hbar} \left[\cos \frac{\epsilon t}{\hbar} |L\rangle + i \sin \frac{\epsilon t}{\hbar} |R\rangle \right] \end{aligned} \quad (4)$$

es decir, el sistema va a hacer oscilaciones de Rabi entre uno y otro pozo. Si pasamos al tiempo euclídeo $t = -i\tau$, entonces

$$|\psi\rangle(\tau) = e^{-E_0 \tau/\hbar} \left[\cosh \frac{\epsilon \tau}{\hbar} |L\rangle + \sinh \frac{\epsilon \tau}{\hbar} |R\rangle \right] \quad (5)$$

Ahora sólo queda calcular ϵ

$$\epsilon = -\langle R|H|L\rangle \quad (6)$$

El único lugar donde las dos funciones de onda se solapan es en la región clásicamente prohibida entre los pozos. Si ponemos los puntos de retorno clásicos en x_L y x_R , entonces, bajo la aproximación WKB,

$$\begin{aligned} \langle x|L\rangle &\propto e^{-\int_{x_L}^x p dy} \\ \langle x|R\rangle &\propto e^{-\int_x^{x_R} p dy} \end{aligned} \quad (7)$$

donde, despreciando la energía de punto cero, $p \approx \sqrt{2V}$. Por lo tanto

$$\langle R|x\rangle \langle x|L\rangle \propto e^{-\int_{x_L}^{x_R} p dy} \quad (8)$$

permanece aproximadamente constante, y da el orden de magnitud de ϵ .

El otro problema que resuelve Coleman es el del escape de un pozo de potencial. Nuevamente, la partícula está en un estado $|E_0\rangle$ que, si el pozo fuese impenetrable, sería un estado estacionario con energía $E_0 \approx 0$. Como el pozo es penetrable, y las partículas que escapan del pozo se propagan al infinito, el verdadero Hamiltoniano tiene espectro continuo. Por lo tanto, la probabilidad de que una partícula con $|E_0\rangle$ como condición inicial, siga estando en el estado $|E_0\rangle$ después de un tiempo t , es

$$\left\langle E_0 \left| e^{-iHt/\hbar} \right| E_0 \right\rangle = \int_{E_{min}}^{\infty} dE e^{-iEt/\hbar} |\langle E|E_0\rangle|^2 \quad (9)$$

A tiempos cortos, podemos desarrollar la exponencial dentro de la integral y encontramos

$$\langle E_0 | e^{-iHt/\hbar} | E_0 \rangle \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta E^2 t^2}{\hbar^2} + \dots \quad (10)$$

A tiempos largos, como el espectro está acotado inferiormente por la energía del verdadero estado de vacío, se aplica el Teorema de Paley-Wiener, lo cual indica que la probabilidad de persistencia cae como alguna potencia de t . En tiempos intermedios, la integral está dominada por la región próxima a la resonancia $E \approx E_0$, donde el espectro toma una forma tipo Breit-Wigner

$$|\langle E | E_0 \rangle|^2 \approx \frac{1}{(E - E_0)^2 + \epsilon^2} \quad (11)$$

Bajo esta aproximación el espectro muestra polos en $E = E_0 \pm i\epsilon$, y cerrando el contorno adecuadamente encontramos que

$$\langle E_0 | e^{-iHt/\hbar} | E_0 \rangle \approx e^{-iE_0 t/\hbar} e^{-\epsilon t/\hbar} \quad (12)$$

El sistema se porta como un “vector de Gamow”, es decir, un estado con energía imaginaria $E - i\epsilon$. Precisamente, lo que va a hacer Coleman es extraer ϵ de la integral de camino.

Una forma sencilla de estimar ϵ es forzar una situación estacionaria en la que las partículas que escapan del pozo son atrapadas y reinyectadas en el estado metaestable. Entonces la vida media del estado metaestable es el número de partículas en el pozo dividido por el flujo de partículas, es decir, cuántas partículas escapan por unidad de tiempo. Supongamos que para escapar del pozo la partícula tiene que atravesar una región clásicamente prohibida entre los puntos de retorno clásicos x_0 y x_1 . A la derecha de x_1 consideremos un estado de flujo unitario

$$\psi \approx \frac{e^{i \int_{x_1}^x p dy}}{\sqrt{2p}} \quad (13)$$

dentro del pozo este estado es una superposición lineal de una onda evanescente decreciente y otra creciente. La última es muy pequeña frente a la primera y puede despreciarse. Por lo tanto, en el pozo

$$\psi(x) \approx \psi(x_0) \approx e^{\int_{x_0}^x p dy} \psi(x_1) \quad (14)$$

El “número de partículas” va como $|\psi|^2 \approx e^{2S}$, y por lo tanto $\epsilon/\hbar \approx e^{-2S}$. Este es el resultado que busca reproducir Coleman. Nótese el factor 2 en el exponente respecto al problema anterior.

Ahora podemos pasar a Coleman. La primer observación de Coleman es que si uno extiende la integral de camino euclídea ($\hbar = 1$)

$$\langle x_f | e^{-Ht} | x_i \rangle = \int_{x(0)=x_i, x(t)=x_f} Dx e^{-S} = \sum e^{-Et} \langle x_f | E \rangle \langle E | x_i \rangle \quad (15)$$

a tiempos muy largos, sólo sobrevive el término de vacío, de modo que

$$\int_{x(0)=x_i, x(t)=x_f} Dx e^{-S} \approx e^{-E_0 t} \quad (16)$$

Además, la acción euclídea

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^2 + V[x] \right\} \quad (17)$$

corresponde a un movimiento en un potencial “invertido”.

Con estas dos observaciones, Coleman va a calcular la energía de vacío de un oscilador armónico, en la aproximación semiclásica, es decir, cuando podemos aproximar la integral por el valor del integrando en sus máximos (es decir, las soluciones clásicas de las ecuaciones de movimiento euclídeas) más la integral sobre fluctuaciones lineales alrededor del máximo

$$\int_{x(0)=x_i, x(t)=x_f} Dx e^{-S} \approx e^{-E_0 t} = \sum_n e^{-\bar{S}_n} [\text{Det } S'']^{-1/2} \quad (18)$$

Coleman observa que, aunque las historias diferenciables son de medida nula en la integral, sólo soluciones clásicas con acción finita contribuyen a la aproximación semiclásica. Que las trayectorias suaves son medida cero se ve si

uno desarrolla la trayectoria en serie de Fourier y escribe la medida de integración como una integral múltiple sobre los coeficientes. Para que la trayectoria sea suave cada coeficiente tiene que estar en rangos cada vez más acotados, y cuando uno multiplica las medidas de todos estos segmentos, el producto converge a cero.

Planteemos entonces la integral de camino para un oscilador armónico con las condiciones de contorno $x_i = x_f = 0$. La acción es

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \right\} \quad (19)$$

correspondiendo a un oscilador invertido

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0 \quad (20)$$

La única solución clásica es la trivial $x = 0$, de manera que la integral se reduce a calcular el determinante. En la clase 16 vimos que la manera de calcular el determinante es encontrar la solución clásica con condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, ya que entonces el determinante es proporcional a $x(t)$. En nuestro caso la solución que buscamos es

$$x(t) = \frac{\sinh \omega t}{\omega} \approx \frac{e^{\omega t}}{2\omega} \quad (21)$$

cuando $t \rightarrow \infty$, y la integral resulta proporcional a $e^{-\omega t/2}$, lo cual la da energía de punto cero $\omega/2$.

Ahora Coleman pasa al problema de los dos pozos degenerados, ahora con el potencial invertido, de manera que los centros de los pozos (digamos x_L y x_R) se han convertido en equilibrios inestables con energía cero respecto a la dinámica clásica

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dV}{dx} = 0 \quad (22)$$

Coleman observa que, además de las dos soluciones triviales en que la partícula permanece todo el tiempo en uno de los puntos de equilibrio, existen también las trayectorias heteroclínicas, que son asintóticas a uno de los estados inestables en el pasado lejano, y al otro en el futuro lejano. Como estas trayectorias permanecen exponencialmente cerca de uno u otro punto inestable casi todo el tiempo, con una pequeña modificación es posible armar trenes de soluciones heteroclínicas, yendo y viniendo de un punto inestable al otro. Si llamamos S a la acción evaluada sobre la trayectoria heteroclínica, la trayectoria compuesta de n heteroclínicas tiene acción $S_n = nS$.

Para caracterizar un tren no basta dar n , sino que hay que definir los centros de las trayectorias, es decir, en qué momento cada una pasa por cero. Como los tiempos necesariamente tienen que formar una secuencia creciente, y cada uno puede estar en cualquier momento entre 0 y t , vemos que

$$\int_{x(0)=x_i, x(t)=x_f} Dx e^{-S} \approx \sum_n \frac{t^n}{n!} e^{-nS} [\text{Det } S''_n]^{-1/2} \quad (23)$$

donde x_i y x_f son o x_L o x_R . Cuando intentamos calcular el determinante aparece una dificultad. En principio queremos calcular soluciones de la ecuación

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta x - \frac{d^2 V}{dx^2} \delta x = 0 \quad (24)$$

que empiezan en $\delta x = 0$. Pero precisamente $\dot{x}$ es una solución, ya que

$$\frac{d^3 x}{dt^3} - \frac{d^2 V}{dx^2} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dV}{dx} \right] = 0 \quad (25)$$

y $\dot{x}$ empieza y termina en cero, indicando que el determinante se anula. Decimos que $\dot{x}$ es un “modo colectivo”, o “modo cero”. Por supuesto, se existencia es una consecuencia directa de la invariancia frente a traslaciones en el tiempo de la acción.

Sin embargo, en este caso ya dimos cuenta de esa invariancia cuando sumamos sobre los centros de las soluciones heteroclínicas, de modo que debemos excluir el modo colectivo del espectro de la variación segunda de la acción. Además, como la solución heteroclínica es monótona, $\dot{x}$ no tiene nodos, lo que indica que, de hecho, es el mínimo autoestado de la variación segunda. Por lo tanto el Determinante con el modo cero excluido es positivo. Coleman no lo calcula en detalle pero asume que puede aproximarse

$$\text{Det } S''_n = e^{\omega t/2} K^n \quad (26)$$

donde K se deduce del cálculo del determinante para $n = 1$. Esta es la llamada “aproximación de gas diluído”; esencialmente trata a la solución con n trayectorias heteroclínicas (o “instantones”) como un gas diluído de n objetos.

Ahora, si queremos encontrar la amplitud de que la partícula empiece y termine en x_L , necesitamos considerar un número par de instantones, mientras que la amplitud para ir de x_L a x_R requiere un número impar de instantones. De esa manera, encontramos que

$$\begin{aligned}\langle x_L | x_L \rangle &\approx e^{-\omega t/2} \cosh \left[K^{-1/2} e^{-S} t \right] \\ \langle x_R | x_L \rangle &\approx e^{-\omega t/2} \sinh \left[K^{-1/2} e^{-S} t \right]\end{aligned}\quad (27)$$

que por supuesto coincide con el resultado que encontramos al principio de la clase: como estamos calculando trayectorias con energía cero, tenemos $p^2 = 2V$, y entonces

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} p^2 + V \right] = \int dt 2V = \int \frac{dx}{\dot{x}} 2V = \int p dx \quad (28)$$

Finalmente, Coleman pasa al problema del escape de un pozo, donde la estrategia va a ser calcular la parte imaginaria de la energía, a partir del comportamiento de la integral de camino para tiempos largos. Ahora, con el potencial invertido, el centro x_0 del pozo es un punto de equilibrio inestable, y el punto x_e en que la partícula salía de la zona prohibida ahora es el punto de retorno clásico. El instantón es la órbita homoclínica que sale asintóticamente del punto inestable, rebota en el punto de retorno, y vuelve asintóticamente al punto de equilibrio. Como esta trayectoria empieza y termina en el mismo punto, podemos enhebrar un número arbitrario de instantones.

Ahora, $\dot{x}$ sigue siendo un autovector nulo de la segunda variación de la acción, pero además se anula en el punto de retorno, por lo cual debe haber un autovalor más bajo (y sólo uno) necesariamente negativo. De esa manera $K^{-1/2}$ deviene imaginario, y nuevamente

$$\langle x_0 | e^{-H\tau} | x_0 \rangle \approx e^{-\omega\tau/2} e^{i|K|^{-1/2} e^{-S} \tau} \quad (29)$$

donde ahora

$$S = 2 \int_{x_0}^{x_E} p dx \quad (30)$$

que coincide con el resultado anterior cuando reemplazamos $\tau = it$.