Algunos ejercicios parcialmente resueltos de la guia 8: *Estados térmicos y función de partición en QFT*

1 Función de partición del oscilador armónico

En el oscilador armónico de frecuencia igual a ω (masa igual a 1 para simplificar notación) los autoestados de energía tienen autovalor $(n+\frac{1}{2})\omega$ con multiplicidad 1 de modo que

$$Z_\beta \equiv Tr(e^{-\beta H}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})\omega} = e^{-\frac{1}{2}\beta\omega} \frac{1}{1-e^{-\beta\omega}} \tag{1}$$

Por la manipulación formal que ya conocemos, del lado de la integral funcional debemos calcular:

$$Z_\beta = N \int_{x(\tau+\beta)=x(\tau)} Dx(\tau) e^{-S_E[x(\tau)]}$$

siendo N un factor (divergente) que aparece al pasar a la representación de un valor de expectación como una integral funcional. Lo importante de este factor (que es un numero en la versión finita discretizada) es que no depende de ω ni de ningún dato del potencial del sistema en general. En el procedimiento general la forma de V no incide en ese factor.

Para hallar la integral funcional, debemos calcular el determinante del operador que aparece en la exponencial por lo que debemos hallar las autofunciones del operador diferencial

$$-\partial^2 + \omega^2$$

sobre el espacio de funciones periódicas de τ con período β. Una base de tales funciones está dada por

$$\{A_n \sin(\frac{2\pi}{\beta}\tau), B_n \cos(\frac{2\pi}{\beta}\tau)\}$$

con $n > 0$ y la función constante B_0

Es importante resaltar que en el exponente de la integral funcional sobre cada modo aparecerá no solo el autovalor de este operador sino el resultado de la integral del lagrangiano para cada modo, es decir:

$$(A_n)^2 \frac{\beta}{2} \left(\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} + \omega^2 \right)$$

,

$$(B_n)^2 \frac{\beta}{2} \left(\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} + \omega^2 \right)$$

y

$$\beta \omega^2 B_0^2$$

De modo que, al integrar sobre los modos A y B, el determinante a la $-\frac{1}{2}$ será (formalmente):

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{4\pi n^2}{\beta} + \beta\omega^2}$$

Surge aquí una ambiguedad importante : sobre que variables debo hacer la integral funcional? Sobre las A_n, B_n? o sobre alguna de estas con otra normalización? Dependiendo de cuál elija tendremos autovalores diferentes en el exponente. Es decir, podemos en general integrar sobre los coeficientes A_n y B_n que aparecen en esta expansión:

$$x(\tau) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin(\lambda_n \tau) + B_n \cos(\lambda_n \tau))$$

(con $\lambda_n = \frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} + \omega^2$)

o sobre los A', B' con

$$x(\tau) = f_0(\beta) B'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\beta) \left(A'_n \sin(\lambda_n \tau) + B'_n \cos(\lambda_n \tau) \right)$$

La integral funcional será en general:

$$Z_\beta = N \int\limits_{x(\tau+\beta)=x(\tau)} Dx(\tau) e^{-S_E[x(\tau)]} =$$

$$N'(\beta) \int DB'_0 e^{-\beta f_0^2(\beta)\omega^2 B_0'^2} \prod_{n=1}^{\infty} DA'_n DB'_n e^{-\frac{\beta}{2} f_n^2(\beta)\lambda_n \left(A_n^2 + B_n^2\right)} \tag{2}$$

donde N' dependerá de la normalización que hayamos elegido. La integral funcional será en general, formalmente:

$$Z_\beta \sim N'(\beta)(\omega^2\beta f_0^2(\beta))^{-\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}f_n(\beta)\lambda_n\right)^{-1}$$

donde hemos omitido factores de π que aparecen al hacer las integrales gaussianas.

Desde ya que sin saber cuál es el $N'(\beta)$ (tampoco sabíamos el N) nunca podremos obtener la función de partición completamente Z_β completamente. La manera rigurosa sería mediante la discretización de la integral funcional, conociendo cada uno de los factores que englobamos en los N o N'

El problema de base es estos N y el producto de autovalores no esta bién definido. Seguiré ahora enfoques diferentes al controvertido (usado en clase) de dividir por la función de partición para $\omega = 0$, lo que requiere una manipulación del modo cero.

1.1 Regularización por cociente de Z_β para distintos ω

Dado que los factores desconocidos no dependen de ω podemos dividir la función de partición para distintos valores de ω , lo que nos dará la función de partición a menos de algún factor dependiente del único parámetro que queda, β:

$$\frac{Z_\beta(\omega_1)}{Z_\beta(\omega_2)} = \frac{\omega_2}{\omega_1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{\omega_2^2}{4\pi^2\beta^2})}{(1+\frac{\omega_1^2}{4\pi^2\beta^2})} \tag{3}$$

Usando la identidad :

$$\sinh(x) = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{\pi^2}{n^2\pi^2}\right)$$

vemos que

$$\frac{Z_\beta(\omega_1)}{Z_\beta(\omega_2)} = \frac{sinh\left(\frac{\omega_2\beta}{2}\right)}{sinh\left(\frac{\omega_1\beta}{2}\right)} \tag{4}$$

de donde obtenemos:

$$Z_\beta(\omega) = C(\beta)\sinh^{-1}\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) = 2C(\beta)e^{-\frac{\beta\omega}{2}}\frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}$$

Comparando con el valor de Z_β correcto (1), vemos que $C(\beta) = \frac{1}{2}$. Por supuesto, esto no es del todo satisfactorio porque la dependencia en β es relevante. Existe una manera de hallarla pero requiere más cuidado (por ejemplo, la comparación con el modo cero correctamente hecha)

1.2 Derivando e integrando respecto a ω

Otra forma de obtener la función de partición, a menos de una constante independiente de ω, es tomando logaritmo a la función de partición y derivando respecto a ω^2, para luego integrar respecto a esta misma variable. Parece un juego tonto esto de derivar e integrar pero es una manera de sacarnos de encima el infinito y que materializa la idea de que renormalizar tiene que ver con comparar.

La derivada respecto a $x = \omega^2$ nos da (chequear):

$$\partial_{\omega^2} \log Z_\beta(\omega) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} + \omega^2} - \frac{1}{2\omega^2} = -\frac{\beta^2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \frac{\beta^2\omega^2}{4\pi^2}} - \frac{1}{2\omega^2}$$

Usando la identidad:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} + \frac{1}{2y^2} = \frac{\pi}{2y} \coth(\pi y)$$

(notar que el miembro derecho es: $\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+y^2}$) vemos que:

$$\partial_{\omega^2}(\log(Z_\beta(\omega))) = -\frac{\beta}{4\omega} \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \tag{5}$$

Integrando respecto a $x = \omega^2$ obtenemos:

$$Z_\beta(\omega) = C \sinh^{-1}\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)$$

siendo C una constante independiente de ω

2 Como aparece el volumen en el $log(Z)$

La aparición de un volumen es un aspecto general de las contribuciones a la función de partición (con o sin J), la cual contiene únicamente diagramas sin patas externas. Tanto en la contribución al determinante del operador que representa el caso no interactuante como en las correcciones debida a las interacciones, todo se conjuga para hacer aparecer un volumen.

2.1 Aparición de un volumen en diagramas de vacio

Mas allá de si estamos o no a temperatura cero, un diagrama de vacío siempre conlleva un factor de volumen multiplicando a las integrales (o sumas) en los momentos que provienen de la expresión en momentos de los propagadores.

La razon esta en que en la expresión de las funciones de dos puntos libre (las que usamos en los propagadores) hay factores e^{ipx} que se integran en x

generando deltas que aseguran conservación. Pero cuando no hay patas externas sobra siempre una integral en x de una expresión que ya no depende de x.

Puede verse esto en algún ejemplo como un diagrama del tipo 8 en $\lambda\phi^4$. Queda como un ejercicio.

2.2 Volumen en el determinante

En el caso del logaritmo del determinante, no hemos usado diagramas de Feynman para calcularla pero de nuevo aparece un volumen.

Esquemáticamente, para un campo escalar $-\log(Z)$ será de la forma:

$$-\log(Z_{\beta)}) = \frac{1}{2}\sum_{p_i}\log(p_i^2+m^2)+C$$

done $\sum\limits_{p_i}$ indica la suma o integral sobre todos los p posibles y C una constante que surge de tomar el logaritmo a todos los factores que multiplican a $p_i^2+m^2$. No hay ningún volumen en esta instancia.

Ahora bien, en el caso de temperatura finita en un espacio tiempo infinitamente grande esa suma formal es en $d-1$ variables una integral

$$\sum_p \to V\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}$$

que lleva un peso dado por el volumen (que es infinito!). Una manera de convencerse de esto es pensar que el espacio es una caja de lado L y que estamos aproximando la suma en momentos discretizados $p_n = \frac{2\pi n}{L}$ por una integral, dado que estos momentos están cada vez mas apilados conforme $L\to\infty$

En el caso de temperatura finita, la parte $d-1$ dimensional es la continua, mientras que la discreta continua como sumatoria.

2.3 Aparición de β en el propagador

Por otro lado, en la expresión del propagador cuando una variable de momento está discretizada (asociada a la dirección compacta de largo L), aparece un factor $\frac{1}{L}$ que tiene unidades de momento.

De modo que la función de dos puntos de un campo escalar de masa m en el formalismo euclídeo (veremos que será periodica en τ tendrá la expresión:

$$S_\beta(\tau,x) = \frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}}\frac{e^{i(p_n\tau+px)}}{p_n^2+p^2+m^2}$$

Notar que cuando tomamos el limite continuo $\beta\to\infty$ (temperatura cero) si seguimos la regla:

$$\sum_{p_n}\to\beta\int\frac{dp_0}{2\pi}$$

la función de Schwinger recupera su forma :

$$\lim_{\beta\to\infty} S_\beta(\tau,x) = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{e^{i(p_0\tau+px)}}{p_d^2+m^2}$$

3 Campo escalar masivo en d dimensiones

La masa m del campo jugará el rol de la frecuencia del oscilador armónico en el sentido en que $m \neq 0$ evita el modo cero.

En este caso arranquemos directamente tomando el logaritmo y suprimiendo todo aquello que no dependa de m:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\beta V}\log\left(Z_\beta(m)\right) &= -\frac{1}{\beta}\int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}}\log\left(Z_\beta(\omega_p)\right) \\ &= -\frac{1}{\beta}\int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}}\left(\omega_p+\log\left(1-e^{-\beta\omega_p}\right)\right) \end{aligned} \qquad (6)$$

con $\omega_p = \sqrt{p^2+m^2}$ luego de un calculo similar y a menos de una constante independiente de m.

Se puede hacer un desarrollo en potencias de $\beta m = \frac{m}{T}$ para temperaturas altas. Haciendo ese desarrollo y en $d = 3$ (4 dimensiones espacio-temporales) tenemos:

$$P(\beta) = \frac{\pi^2}{90}T^4 - \frac{m^2}{24}T^2 + O\left(\left(\frac{m}{T}\right)^3\right)$$

4 Funcion de 2 puntos de un campo escalar

4.1 Preliminares: caso temperatura cero

En este caso la función de dos puntos:

$$\langle 0 \mid X(t)X(0) \mid 0\rangle = \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega}$$

Esta puede extenderse al euclideo dando la función de Schwinger:
$S(\tau) = \frac{e^{-\omega|\tau|}}{2\omega}$

Algo a mencionar es que esta admite la representación integral similar al caso de un campo escalar en d dimensiones:

$$S(\tau) = \frac{e^{-\omega|\tau|}}{2\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\frac{e^{ip\tau}}{p^2+\omega^2}$$

Esta expresión se extiende inmediatamente al caso de campos en d dimensiones, cambiando ω^2 por $p_{d-1}^2 + m^2$ y añadiendo las integrales en las $d-1$ componentes del momento espacial.

Por completitud podemos escribir la función de Green en esta representación integral:

$$\langle 0 \mid T(X(t)X(0)) \mid 0\rangle = \frac{e^{-i\omega|t|}}{2\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{e^{-ipt}}{p^2 - \omega^2 + i\epsilon}$$

4.2 Oscilador armónico

La función de dos puntos termal del oscilador armónico de frecuencia ω está dada

$$W_2(t) \equiv \langle X(t)X(0)\rangle_\beta = \frac{1}{2\omega}\left(\left(1 + \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}\right)e^{-it} + \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}e^{it}\right)$$

Puede chequearse que esta función cumple la condición KMS:

$$W_2(t - i\beta) = W_2(-t)$$

En general, la función de dos puntos puede continuarse analíticamente a tiempo complejo, con parte imaginaria negativa de módulo en el intervalo $[0, \beta]$. Considerando el caso en que la parte real es cero tenemos la función de Schwinger $S_\beta(\tau) = W_2(-i\tau)$ para $\tau \in [0, \beta]$, la cual puede extenderse a $\tau \in [-\beta, \beta]$:

$$S_\beta(\tau) = \frac{1}{2\omega}\left(\left(1 + \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}\right)e^{-\omega|\tau|} + \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}e^{\omega|\tau|}\right)$$

$\tau \in [0, \beta]$

Se puede ver fácilmente que, como era de esperar: $S_\beta(\tau \pm \beta) = S(\tau)$ si τ y $\tau \pm \beta \in [-\beta, \beta]$. Esto permite extender S_β a una función periódica en todo $\mathbb{R}$ con período β

Existe otra forma de expresar la función de Schwinger termal extendida a todo el rango real de τ usando la identidad:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{int}}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{\cosh\left(a(\pi - |t|)\right)}{\sinh(a\pi)} \quad \text{para } t \in [-\pi, \pi],\ a > 0.$$

Esta forma es generalizable al caso de QFT en d dimensiones:

$$S_\beta(\tau) = \frac{1}{\beta}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{\beta}\tau}}{\frac{4\pi n^2}{\beta^2} + \omega^2}$$

En el límite continuo, la suma en los valores discretos se convierte en una integral:

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \frac{1}{\beta}\frac{\beta}{2\pi}\int dp$$

y se llega a la fórmula de la función de Schwinger ordinaria:

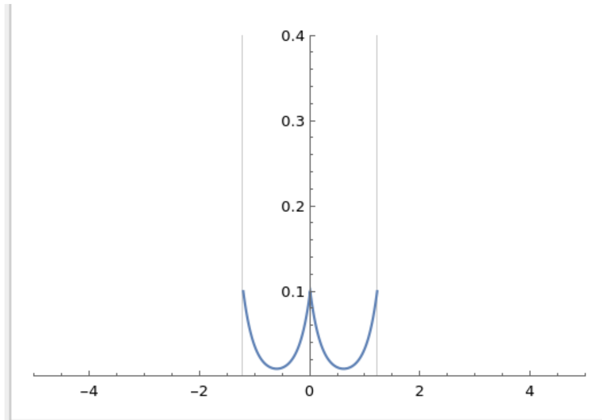

Figure 1: Grafico de $S_\beta(\tau)$ en $[-\beta, \beta]$ para algun valor de ω. Las lineas verticales estan en $-\beta$ y β. Esta se define en todo $\mathbb{R}$ por periodicidad. En el limite $\beta \to +\infty$ la función se reduce a $\frac{e^{-\omega|\tau|}}{2\omega}$

$$S(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int dp \frac{e^{ip\tau}}{p^2 + \omega^2} = \frac{1}{2\omega} e^{-\omega|\tau|}$$

como ya hemos visto.