1. Decaimiento de un estado metaestable en teoría de campos

La vez pasada vimos que Coleman intenta calcular la vida media τ de un estado metaestable aproximando a este por un estado de energía compleja, $E = E_0 - i\hbar/\tau$. A partir de que a tiempos largos la integral euclídea decae como $e^{-Et/\hbar}$, la conclusión es que si usamos la integral de camino para calcular la amplitud de persistencia

$$\left\langle x_R \left| e^{-H2T/\hbar} \right| x_R \right\rangle = \int Dx\; e^{-S} \approx e^{-E_0 2T/\hbar} e^{2iT/\tau} \tag{1}$$

La integral deviene oscilatoria. Estamos tomando como ejemplo el caso de una partícula en un potencial

$$V \approx \frac{\lambda}{4}\left(x^2 - a^2\right)^2 + \epsilon\,(x - a) \tag{2}$$

donde una partícula atrapada en el estado metastable $x_R \approx a$ eventualmente decae al verdadero estado de mínima energía $x_L \approx -a$. Esto puede parecer sorprendente porque dada la acción euclídea

$$S = \int dt\; \left\{ \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V\left[x\right] \right\}, \tag{3}$$

que describe el movimiento en un potencial $-V$, la integral de camino pareciera explícitamente real. El argumento de Coleman es que la parte oscilatoria aparece porque la integral de camino, tal como está escrita, sólo está definida cuando el estado x_R es estable (en nuestro caso, cuando $\epsilon < 0$). Cuando $\epsilon > 0$, la amplitud de persistencia debe calcularse mediante una continuación analítica, y es en ese proceso que deviene oscilatoria.

Además, Coleman va a evaluar la integral en el caso semiclásico. Eso implica primero encontrar los extremos de la acción, es decir, las soluciones a

$$-\ddot{x} + V'\left[x\right] = 0 \tag{4}$$

con las condiciones de contorno

$$x\left(-T\right) = x\left(T\right) = x_R \tag{5}$$

y considerar sólo las trayectorias que son fluctuaciones lineales respecto de alguna de estas soluciones, $x = \bar{x} + \delta x$, de modo que

$$S\left[\bar{x} + \delta x\right] \approx \bar{S} + \frac{1}{2}\int dt\; \delta x \left[-\frac{d^2}{dt^2} + V''\left[\bar{x}\right] \right] \delta x \tag{6}$$

donde $\bar{S} = S\left[\bar{x}\right]$. Hemos usado que $\bar{x}$ es solución de las ecuaciones de movimiento, y que $\delta x\left(-T\right) = \delta x\left(T\right) = 0$. Por lo tanto, la contribución de este haz de trayectorias a la integral de camino es

$$e^{-\bar{S}} \left\{ \operatorname{Det}\; \left[-\frac{d^2}{dt^2} + V''\left[\bar{x}\right] \right] \right\}^{-1/2} \tag{7}$$

Solamente soluciones clásicas con acción finita contribuyen a la integral.

El punto principal de Coleman es que, además de la solución trivial $\bar{x} = x_R =$ constante, de cuya contribución obtenemos la estimación de $E_0 = \omega/2$ para la energía del estado fundamental de una partícula oscilando alrededor de x_R, con $\omega^2 = V''\left[x_R\right]$, existen soluciones no triviales llamadas “instantones”.

En el caso que estamos tomando como ejemplo, un instantón es una solución que emerge de x_R, rebota contra la barerra de potencial en el vecindario de $x_L = -a$ y vuelve asintóticamente a x_R. Una forma analítica aproximada sería

$$\bar{x} = a \tanh\left[C\left(\left|t - t_0\right| - \tau\right)\right] \tag{8}$$

Para poder calcular la contribución de las trayectorias vecinas al instantón debemos calcular el determinante del operador

$$H = \frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{dt^2} + V''\left[\bar{x}\right] \right] \tag{9}$$

que corresponde al operador de Schrödinger de una partícula en el pozo de potencial $V''\left[\bar{x}\left(t\right)\right]$. Este determinante se anula porque el espectro de fluctuaciones del instanton posee un autovalor nulo, que corresponde a variar t_0 en la fórmula para el instantón. Este problema se soluciona si consideramos a las soluciones correspondientes a distintos valores de t_0, o sea, al instantón y a sus trasladados en el tiempo, como soluciones distintas, y no como fluctuaciones de unas alrededor de las otras. Como todas estas soluciones tienen la misma acción, sumar sobre todas estas soluciones implica integrar sobre los valores posibles de t_0, lo que agrega un factor $2T$ en la contribución del instantón a la integral de camino.

Pongamos entonces $t_0 = 0$. Como el autovector correspondiente al autovalor nulo, que es $d\bar{x}/dt$ (lo que se confirma derivando la ecuación 4 respecto del tiempo) tiene un nodo, éste no puede ser el estado fundamental (ver R. Feynman, *Statistical Mechanics*, Benjamin-Cummings (1972), sec. 11.3), y debe haber al menos un autovalor negativo (de hecho, exactamente uno, ya que $d\bar{x}/dt$ tiene un único nodo). Llamemos $-E_{lig}$ a este autovalor, y ψ_{lig} al autovector correspondiente. La integral sobre fluctuaciones de la forma $\delta x = c\psi_{lig}$ deviene

$$\int dc\, e^{E_{lig}c^2/2} \tag{10}$$

que obviamente sólo puede ser definida mediante continuación analítica respecto de la integral Gaussiana convencional

$$\int dc\, e^{E_{lig}c^2/2} \equiv (-i)\sqrt{\frac{2\pi}{E_{lig}}} \tag{11}$$

y la integral de camino deviene oscilatoria.

En el caso del potencial 2 que estamos considerando como ejemplo, mientras la partícula permanece próxima a x_R, tenemos $V''[\bar{x}(t)] \approx V''[x_R] = \omega^2 > 0$. En la travesía hacia x_L, $V''[\bar{x}(t)]$ se anula dos veces, ya que el potencial posee dos puntos de inflexión. El viaje de vuelta hacia x_R aporta dos ceros más. De manera que el operador H de la ecuación 9 también corresponde a dos pozos de potencial aproximadamente degenerados. Como $d\bar{x}/dt$ es impar y tiene un solo nodo, podemos imaginar que corresponde a la superposición antisimétrica de los vacíos de cada pozo. Eso deja a la superposición simétrica como el verdadero estado de vacío, con una energía levemente negativa.

Además del instantón, tenemos soluciones $\bar{x}_n$ correspondientes a n instantones suficientemente alejados entre sí. La acción para esta configuración es $n\bar{S}$, y la integral sobre los centros de los instantones, eliminando permutaciones, agrega un factor de $(2T)^n/n!$. Para encontrar la contribución de las fluctuaciones alrededor de esta solución, debemos buscar el espectro del opperador 9, donde ahora el potencial es el de un instantón, repetido n veces a grandes distancias entre sí. Bajo esta aproximación "de gas diluído" las autofunciones de instantones distintos no se superponen, y el espectro es el de un único instantón, degenerado n veces - si hubiera tuneleo entre los pozos, encontraríamos en cambio una estructura de bandas. Coleman asume que siempre hay un factor $e^{\omega(2T)}$, y por lo demás encontramos

$$\left\{ \text{Det} \left[-\frac{d^2}{dt^2} + V''[\bar{x}_n]\right]\right\}^{-1/2} \approx e^{-\omega T}(-iK)^n \tag{12}$$

donde K se encuentra ajustando el caso $n = 1$.

Sumando sobre todos los números de instantones posibles ahora encontramos

$$\begin{aligned} \left\langle x_R \left| e^{-H2T/\hbar} \right| x_R \right\rangle &= e^{-\omega T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[-i2TKe^{-\bar{S}}\right]^n \\ &= e^{-\omega T - i2TKe^{-\bar{S}}} \end{aligned} \tag{13}$$

con un componente oscilatorio, como esperábamos.

Habiendo establecido la validez del método, para aplicarlo en teoría de campos sólo queda identificar al instanton adecuado. Ahora estamos considerando una configuración donde en el instante euclídeo inicial $t = -T$ el valor del campo es $\phi(\vec{x}, -T) = \phi_R$, que es inestable frente la configuración $\phi = \phi_L$. Por ejemplo, podemos tomar un potencial del tipo 2, reemplazando $x(t)$ por $\phi(\vec{x}, t)$, de modo que $\phi_{R,L} \approx \pm a$. Nos preguntamos por la amplitud para que el campo persista en la configuración $\phi = \phi_R$ cuando $t = T$.

Nótese que para que una configuración tenga acción finita no basta que converja a ϕ_R cuando $t \to \pm T$, sino que también debe ser $\phi(\vec{x}, t) \to \phi_R$ cuando $|\vec{x}| \to \infty$. La solución con $\phi = \phi_L$ tiene acción infinita, porque $V[\phi_L] \neq 0$.

Como en el caso anterior, tenemos la solución trivial $\phi(\vec{x}, t) = \phi_R =$ constante, que aporta el valor de la energía de punto cero. El instantón, como hemos visto, es una solución de

$$-\Box\phi + V'[\phi] = 0 \tag{14}$$

donde $\Box$ es el Laplaciano en cuatro dimensiones

$$\Box = \partial_t^2 + \mathbf{\Delta} \tag{15}$$

con Δ el Laplaciano en tres dimensiones. Como queremos soluciones no sólo con acción finita sino también lo más chica posible, es natural mirar soluciones con simetría radial en cuatro dimensiones. es decir, proponemos $\phi(\vec{x}, t) = \phi(\rho)$, donde $\rho = \sqrt{t^2 + \vec{x}^2}$. La ecuación a resolver es

$$-\frac{d^2}{d\rho^2}\phi - \frac{3}{\rho}\frac{d}{d\rho}\phi + V'[\phi] = 0 \tag{16}$$

que es muy similar a la ecuación del instantón en el problema en una dimensión, excepto que ahora hay un término de fricción que decae rápidamente con ρ. Por un argumento de continuidad, se ve que debe haber una solución $\bar{\phi}$ que comienza con $\phi \approx \phi_L$ cuando $\rho \approx 0$ y disipa la cantidad de energía necesaria para alcanzar ϕ_R asintóticamente cuando $\rho \to \infty$. Esta solución es el instantón, que tiene el aspecto de una burbuja cuadridimensional.

Como en el caso de una dimensión, el espectro de las fluctuaciones alrededor de $\bar{\phi}$ contiene cuatro autovalores nulos, correspondientes a las cuatro traslaciones $\partial_\mu \varphi$. Estos autovalores nulos deben ser extraídos del espectro, y a cambio debemos sumar sobre los valores posibles del "centro" del instantón. Coleman afirma que por lo demás el determinante de la segunda variación es negativo, con lo cual el argumento continúa exactamente como en el caso de una dimensión.

Lo que nos queda explicar es cómo se relaciona el resultado cuántico

$$\tau^{-1} \propto e^{-S[\bar{\phi}]/\hbar} \tag{17}$$

con el resultado clásico

$$\tau^{-1} \propto e^{-\beta F[\phi_c]} \tag{18}$$

donde ϕ_c es la burbuja crítica que corresponde al tope de la barrera de energía libre, y F es la energía libre de Landau-Ginzburg, que es densidad lagrangiana de la acción euclídea para una solución independiente del tiempo

$$F = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\nabla\phi^2 + V[\phi] \right\} \tag{19}$$

La respuesta es que a temperatura finita ya no consideramos integrales sobre todo el tiempo euclídeo, sino sólo integrales sobre configuraciones periódicas entre $t = 0$ y $t = \beta$. Por lo tanto, una solución independiente del tiempo $\phi(\vec{x}, t) = \phi_c(\vec{x})$, que es trivialmente periódica en el tiempo euclídeo, tiene acción finita, y su acción vale precisamente $\beta F[\phi_c]$. En consecuencia debe ser considerada como una nueva familia de instantones. Si de todos modos $S[\bar{\phi}]/\hbar < \beta F[\phi_c]$, el decaimiento va aseguir la ley cuántica; esto ocurre necesariamente cuando $T \to 0$. Cuando los dos exponentes son similares, tenemos un crossover del régimen cuántico al clásico.

La transición de un régimen al otro ha sido observada en juntas Josephson, ver Michel H. Devoret, John M. Martinis, and John Clarke, Measurements of Macroscopic Quantum Tunneling out of the Zero-Voltage State of a Current-Biased Josephson Junction, PRL 55, 1908 (1985) . Una junta Josephson es un dispositivo en que la corriente está determinada por la diferencia de fase a través del gap entre dos superconductores

$$j_{JJ} = A \sin\gamma \tag{20}$$

La junta se conecta en paralelo con una resistencia, por la que circula una corriente

$$j_R = \frac{1}{R}V \tag{21}$$

y con un capacitor

$$j_C = C\frac{dV}{dt} \tag{22}$$

Como además $V = d\gamma/dt$ obtenemos una ecuación de movimiento para γ

$$C\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\gamma}{dt} + A\sin\gamma - J_T = 0 \tag{23}$$

donde J_T es la corriente total. La fase se comporta como una partícula de masa C en el potencial $-J_T\gamma - A\cos\gamma$ ("tilted washboard"), realizando transiciones entre los mínimos locales del potencial.