1 Jugando en AdS

La receta para cocinar un AdS es

- a) se toma un espacio de Minkowski de d dimensiones $X^\mu = X^0, \dots, X^{d-1}$
- b) se agrega una dimensión espacial X^d
- c) se agrega otra dimensión temporal X^{d+1} , de manera que la métrica queda

$$ds^2 = dX^\mu dX_\mu + dX^{d+1}^2 - dX^{d+2}^2 \quad (1)$$

- d) entonces AdS es el hiperboloide

$$X^\mu X_\mu + X^{d+2}^2 - X^{d+1}^2 = -L^2 \quad (2)$$

Es obvio que yo puedo convertir cualquier punto del hiperboloide en otro mediante una transformación de Lorentz en el espacio ambiente, y como el hiperboloide es invariante Lorentz, eso muestra que AdS es un espacio homogéneo. En particular, tiene que tener curvatura constante.

La construcción también se puede hacer partiendo de un espacio euclídeo en d dimensiones.

1.1 El disco de Poincaré

El AdS más simple que hay parte de un espacio euclídeo de 1 dimensión, es decir, es el hiperboloide

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -1 \quad (3)$$

embebido en un espacio de Minkowski de tres dimensiones

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 - dZ^2 \quad (4)$$

Nótese que dos puntos cualesquiera del hiperboloide están separados espacialmente uno del otro, de manera que el hiperboloide tiene una métrica definida positiva.

El disco de Poincaré es una representación sorprendentemente heurística del hiperboloide. Es la proyección del hiperboloide sobre el disco unidad en el plano (X, Y) tomando como centro el punto $(0, 0, -1)$. Explícitamente, el punto (X, Y, Z) proyecta sobre $(x, y, 0)$, donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{Z+1} \\ y &= \frac{Y}{Z+1} \end{aligned} \quad (5)$$

Reemplazando $X = (Z+1)x$ e $Y = (Z+1)y$ en la ecuación del hiperboloide encontramos

$$Z^2 - r^2 (Z+1)^2 = 1 \quad (6)$$

$(r^2 = x^2 + y^2)$, o sea

$$Z = \frac{1+r^2}{1-r^2} \quad (7)$$

Ahora podemos invertir la parametrización

$$\begin{aligned} X &= \frac{2x}{1-r^2} \\ Y &= \frac{2y}{1-r^2} \end{aligned} \quad (8)$$

La métrica inducida en el disco es

$$ds^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1-r^2)^2} \quad (9)$$

Una línea recta en el disco es la proyección de la intersección entre el hiperboloide y un plano por el origen. Como podemos rotar arbitrariamente, basta considerar el plano definido por

$$X - \alpha Z = 0, \quad -\infty < Y < \infty \quad (10)$$

con $0 \leq \alpha < 1$. Sobre el disco tenemos

$$\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + y^2 = R^2 \quad (11)$$

con

$$R^2 = \frac{1}{\alpha^2} - 1 \quad (12)$$

es decir, un arco de círculo de radio R centrado en $(\alpha^{-1}, 0)$. Nótese que la recta es ortogonal al borde del círculo.

Si miramos el lápiz de geodésicas que surgen de un punto dado en el borde, es obvio que divergen, lo cual indica que el disco de Poincaré tiene curvatura negativa. En el mismo sentido, es obvio que la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que π .

1.2 When the AdS's were real AdS's

Vamos a considerar los sistemas de coordenadas sobre AdS que uno encuentra en la literatura con mayor frecuencia.

En principio, todo lo que hicimos con el disco de Poincaré se puede hacer partiendo de un espacio euclídeo de d dimensiones. Ahora el hiperboloide proyecta sobre una esfera unitaria en $\mathbf{R}^{d+1}$; basta reemplazar (x, y) por las $d + 1$ dimensiones euclídeas y tomar $r^2 = x_1^2 + \dots + x_{d+1}^2$.

Cuando partimos de un espacio de Minkowski, es más natural observar que la ecuación del hiperboloide puede escribirse como

$$X^{02} + X^{(d+1)2} - \sum_{j=1}^d X^{j2} = 1 \quad (13)$$

Entonces es natural escribir

$$\begin{aligned} X^0 &= \cosh \rho \cos \theta \\ X^{d+1} &= \cosh \rho \sin \theta \\ X^j &= \sinh \rho \omega^j \end{aligned} \quad (14)$$

donde las ω^j son coordenadas en la esfera unitaria en d dimensiones. La métrica inducida sobre el hiperboloide es entonces

$$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega^2 - \cosh^2 \rho d\theta^2 \quad (15)$$

Es posible encontrar una nueva variable χ tal que

$$d\rho = \cosh \rho d\chi \quad (16)$$

El cambio de variables es

$$\sinh \rho = \tan \chi \quad (17)$$

Entonces

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \chi} [d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2 - d\theta^2] \quad (18)$$

Lo que muestra que el *covering space* de AdS es un cilindro.

Las coordenadas de Poincaré sólo cubren la región en que $X^d + X^{d+1} \geq 0$. Escribimos

$$X^d + X^{d+1} = Z \quad (19)$$

Entonces

$$X^d - X^{d+1} = \frac{1}{Z} (1 + X^\mu X_\mu) \quad (20)$$

Tambien reescalamos

$$X^\mu = Z x^\mu \quad (21)$$

o sea

$$\begin{aligned} X^d &= \frac{1}{2} \left[Z (1 + x^\mu x_\mu) + \frac{1}{Z} \right] \\ X^{d+1} &= \frac{1}{2} \left[Z (1 - x^\mu x_\mu) - \frac{1}{Z} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Lo que resulta en la métrica inducida

$$ds^2 = Z^2 dx^\mu dx_\mu + \frac{dZ^2}{Z^2} \quad (23)$$

O bien, llamando $Z = 1/z$

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} [dx^\mu dx_\mu + dz^2] \quad (24)$$

Una de las virtudes de las coordenadas de Poincaré es que hacen explícita la invariancia de AdS frente a dilataciones, $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$, $z \rightarrow \lambda z$.

1.3 Las rectas de AdS

Vamos a usar las coordenadas de Poincaré para investigar las líneas rectas de la geometría de AdS, es decir, las soluciones de la acción

$$S = \int \frac{d\tau}{2z^2} \left[\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} + \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (25)$$

Es obvio que se conservan los impulsos

$$p^\mu = \frac{1}{z^2} \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (26)$$

y tambien la energía

$$E = \frac{z^2}{2} [p^\mu p_\mu + p^2] \quad (27)$$

donde

$$p = \frac{1}{z^2} \frac{dz}{d\tau} \quad (28)$$

Es obvio que si $E = 0$ p también se conserva; entonces $dx^\mu/dz = p^\mu/p = \text{constante}$ y las geodésicas nulas son líneas rectas, lo cual ya sabíamos porque AdS es conforme al plano.

En el caso general, conviene eliminar τ tomando el cociente de 26 and 28 , lo cual da

$$\frac{dx^\mu}{dz} = \frac{p^\mu z}{\sqrt{2E - (p^\mu p_\mu) z^2}} \quad (29)$$

Vemos que si $E < 0$ tambien debe ser $p^\mu p_\mu < 0$, es decir una geodésica temporal necesariamente proyecta a una geodésica temporal en el borde. Si $E > 0$ el signo de $p^\mu p_\mu$ no está determinado, una geodésica temporal en el borde puede ser la proyección de una geodésica espacial en el bulk.

Si $p^\mu p_\mu > 0$ siempre podemos elegir un referencial donde $p^1 \neq 0$, $p^\mu = 0$ si $\mu \neq 1$. la geodésica está confinada al plano (x, z) y

$$\frac{dx}{dz} = \frac{p^1 z}{\sqrt{2E - (p^1)^2 z^2}} \quad (30)$$

Por ejemplo, una geodésica que empieza sobre el borde es inicialmente ortogonal al borde ($dx/dz = 0$), y penetra hasta una distancia máxima $z = \sqrt{2E}/p^1$, donde la podemos empalmar con una geodésica especular que vuelve al bulk.

Si $p^\mu p_\mu < 0$, en un referencial adecuado la geodésica está confinada al plano (t, z) , y

$$\frac{dx}{dz} = \frac{p^0 z}{\sqrt{(p^0)^2 z^2 + 2E}} \quad (31)$$

Si $E < 0$, la geodésica no puede acercarse al borde más de $z = \sqrt{2|E|}/p^0$ (o sea, una partícula con masa no puede alcanzar el borde desde el bulk). A grandes distancias del borde la geodésica es una recta.

Si $E > 0$ puedo tener una geodésica espacial que emerge perpendicular al borde y tiende a una recta cuando $z \rightarrow \infty$.