1. Viscosidad

La viscosidad es un fenómeno de transporte.

Cuando uno tiene una cantidad conservada, para alcanzar el estado de equilibrio en el cual esa cantidad se distribuye uniformemente en el volumen del sistema, es necesario *transportar* esa cantidad de las regiones en que está concentrada por encima de la media a las regiones donde está en defecto. Eso da origen a una serie de *fenómenos de transporte*: el transporte de carga se da por la corriente eléctrica, el transporte de masa se da por difusión, el de energía (sin transporte de masa) por la corriente de calor, y el de impulso por viscosidad. Sí, si tenemos dos regiones en el fluido con distintos impulsos medios, va a haber una transferencia de impulso de una a la otra. Una transferencia de impulso por unidad de tiempo es una fuerza. Así como la corriente eléctrica es la respuesta a una diferencia de potencial (ley de Ohm), la corriente de calor es la respuesta a un gradiente de temperatura (ley de Fourier) o la corriente de partículas es la respuesta a un gradiente en el potencial químico (ley de Fick), la fuerza viscosa es la respuesta a un gradiente de velocidades. Si hay un gradiente en y de la velocidad en x , aparece una fuerza en x dada por

$$F_x = -\eta \frac{d}{dy} V_x \quad (1)$$

por unidad de área.

El primer modelo de la viscosidad fue desarrollado por Maxwell. Imaginemos que las partículas por encima de $y = 0$ se mueven más rápido en la dirección x que las que están debajo de $y = 0$. Estas partículas tienen, superpuesto a su movimiento coherente, su movimiento aleatorio debido a la agitación térmica. Por lo tanto algunas partículas van a pasar de $y > 0$ a $y < 0$ y viceversa. Asumiendo que las densidades y temperaturas ya son uniformes, el flujo neto a través de $y = 0$ va a ser nulo, pero como las partículas de arriba van a tener un mayor impulso (en x) que las partículas de abajo va a haber una transferencia neta de impulso, y por lo tanto una fuerza. Más exactamente, la fuerza sobre las partículas de arriba va a ser $F_x =$ número de partículas que cruzan $y = 0$ de arriba hacia abajo por unidad de área y de tiempo $\times$ diferencia de impulso en x entre una partícula de arriba y una de abajo. El flujo de partículas es nv_{th} , donde n es la densidad y v_{th} la velocidad térmica, y la diferencia de impulsos en $m(V_x(y) - V(y + dy))$, de modo que

$$F_x = -mnv_{th} dy \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (2)$$

La idea brillante de Maxwell fue que no había que tomar el límite $dy \rightarrow 0$, sino identificar $dy = \lambda$, el camino libre medio de una partícula. De manera que

$$\eta = mnv_{th}\lambda \quad (3)$$

Esta fórmula tiene la consecuencia curiosa de que si despejamos λ en términos de la sección eficaz $\lambda = 1/n\sigma$, la densidad desaparece. Esto ha sido verificado experimentalmente.

De todas formas, lo que muestra la fórmula de Maxwell es que si quiero reducir la viscosidad, tengo que achicar el camino libre medio, y para eso tengo que aumentar el acoplamiento entre partículas. En este sentido, un *fluido ideal* (un fluido sin viscosidad) es exactamente lo opuesto a un *gas ideal*, un gas en que las partículas no interactúan entre sí.

La pregunta que sigue es si existe un fluido ideal, es decir, si podemos realizar el límite $\lambda \rightarrow 0$ incrementando indefinidamente el acoplamiento entre partículas. El tema es que va a llegar un punto en que el camino libre medio se va a volver conmensurable con la incerteza en la posición de las partículas, a partir de lo cual ya no puede reducirse más. Supongamos además que estamos mirando un fluido que aproxima a un fluido conforme, de modo que $m \rightarrow 0$ y $v_{th} \rightarrow c$. Entonces $\lambda \approx \hbar/mc$, y

$$\eta \rightarrow n\hbar \quad (4)$$

Para un fluido conforme la densidad no está bien definida (no se puede contar fotones) pero sí está definida la densidad de entropía, y se supone que ambas son proporcionales porque la entropía es extensiva. Entonces podemos reemplazar una por otra, y en unidades naturales vamos a obtener

$$\frac{\eta}{s} = O(1) \quad (5)$$

Esto es lo más cerca que podemos llegar a un fluido ideal.

La contribución de Kovtun, Son y Starinetz (KSS) fue calcular el lado derecho de 5

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} \quad (6)$$

El tema de este último bloque es cómo lo hicieron.

2. Hidrodinámica no relativista

Ahora vamos a formalizar el concepto de viscosidad en hidrodinámica no relativista, particularmente respecto a la relación entre la viscosidad y la segunda ley de la termodinámica.

Tenemos un sistema extenso que ocupa un volumen V y tiene tres cantidades conservadas, la energía U , el número de partículas N y el impulso $\vec{G}$ (usamos G para el impulso porque reservamos p para la presión. Por supuesto, estas cantidades se relacionan con las simetrías del sistema: U con la invariancia frente a traslaciones en el tiempo, $\vec{G}$ con las traslaciones en el espacio, y N con la invariancia de gauge. Las densidades correspondientes $u = U/V$, $n = N/V$ y $\vec{g} = \vec{G}/V$ obedecen leyes de conservación

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\partial_j J_u^j \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= -\partial_j J_n^j \\ \frac{\partial g^i}{\partial t} &= -\partial_j T^{ij}\end{aligned}\quad (7)$$

El objetivo es encontrar las *relaciones constitutivas*, es decir, cómo expresar las corrientes en términos de observables y sus derivadas. vamos a asumir que

$$J_n^j = n v^j \quad (8)$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad del centro de masa de un elemento de fluido, que

$$\vec{g} = m n \vec{v} \quad (9)$$

donde m es la masa, que asumimos es la misma para todas las partículas por simplicidad, y que el tensor de esfuerzos es simétrico

$$T^{ij} = T^{ji} \quad (10)$$

Esto último es consecuencia de la conservación del impulso angular para partículas sin spin. Consideremos las $N = n dV$ partículas que forman un elemento de fluido de volumen dV centrado en $\vec{x}$. Cada una tiene posición $\vec{x}_i = \vec{x} + \vec{\xi}_i$ y velocidad $\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{\vartheta}_i$. Por lo tanto el momento angular del elemento de fluido es

$$d\vec{L} = dV \vec{x} \times \vec{g} + \sum_i m \vec{\xi}_i \times \vec{\vartheta}_i \quad (11)$$

El segundo término es un infinitesimal de orden superior al primero (más exactamente, escala como $dV^{5/3}$) y por lo tanto la densidad de impulso angular es la componente orbital

$$\vec{\ell} = \vec{x} \times \vec{g} \quad (12)$$

Por otro lado $\vec{\ell}$ tiene que conservarse

$$\ell_{,t}^i = -\partial_j K^{ij} \quad (13)$$

Usando que $\vec{x}_{,t} = \vec{v}$ obtenemos

$$\ell_{,t}^i = -\epsilon^{ijk} x^j \partial_l T^{kl} = -\partial_l [\epsilon^{ijk} x^j T^{kl}] + \epsilon^{ijk} T^{kj} \quad (14)$$

Por lo tanto el segundo término debe ser cero, lo cual implica la simetría de T^{jk} .

Volvemos a las relaciones constitutivas. Nuestro punto de partida es la Primera Ley, escrita como

$$T dS = dU + P dV - \mu dN - v_j dG^j \quad (15)$$

T es la temperatura, S la entropía y μ el potencial químico.

Como esta ecuación determina que $\partial S / \partial U = 1/T$, etc., y por otro lado la cantidad extensiva S debe ser una función homogénea de las cantidades extensivas U , V , N y $\vec{G}$. debe ser

$$TS = U + pV - \mu n - v_j G^j \quad (16)$$

Diferenciando y restando 15 encontramos la ecuación de Gibbs-Duhem

$$SdT = Vdp - Nd\mu - G^j dv_j \quad (17)$$

Dividiendo las dos últimas expresiones por el volumen encontramos

$$\begin{aligned} Ts &= u + p - \mu n - v_i g^i \\ sdT &= dp - nd\mu - g_j dv^j \end{aligned} \quad (18)$$

Diferenciando la primera y restando la segunda encontramos

$$Tds = du - \mu dn - v_i dg^i \quad (19)$$

Esta ecuación se aplica a cualquier variación, y en particular a las variaciones debidas al paso del tiempo, de modo que

$$s_{,t} = \frac{-1}{T} [\partial_j J_u^j - \mu \partial_j J_n^j - v_i \partial_j T^{ij}] \quad (20)$$

Ahora arrancamos

$$\begin{aligned} s_{,t} &= -\partial_j \left[\frac{1}{T} (J_u^j - \mu J_n^j - v_i T^{ij}) \right] \\ &\quad - \frac{T_j}{T^2} (J_u^j - \mu J_n^j - v_i T^{ij}) - \frac{1}{T} T^{ij} v_{i,j} - \frac{1}{T} J_n^j \mu_{,j} \\ &= -\partial_j \left[\frac{1}{T} (J_u^j - \mu J_n^j - v_i T^{ij}) \right] \\ &\quad - \frac{T_j}{T^2} (J_u^j - \mu J_n^j - v_i T^{ij}) - \frac{1}{T} T^{ij} v_{i,j} - \frac{1}{T} v^j [p_{,j} - sT_{,j} - g^i v_{i,j}] \\ &= -\partial_j \left[\frac{1}{T} (J_u^j - \mu J_n^j - v_i T^{ij} + pv^j) \right] \\ &\quad - \frac{T_j}{T^2} (J_u^j - \mu n v^j - v_i T^{ij} + pv^j - Ts v^j) - \frac{1}{T} [T^{ij} - mn v^i v^j - p \delta^{ij}] v_{i,j} \end{aligned} \quad (21)$$

Para un fluido ideal, que fluye sin creación de entropía, el último renglón debe anularse. Para un fluido real, la creación de entropía debe ser definida positiva, de manera que debe ser

$$\begin{aligned} T^{ij} &= mn v^i v^j + p \delta^{ij} - \eta \left[v_{i,j} + v_{j,i} - \frac{2}{3} v_{,k}^k \delta^{ij} \right] - \xi v_{,k}^k \delta^{ij} \\ J_u^j &= v^j (u + p) - v_i \left[\eta \left[v_{i,j} + v_{j,i} - \frac{2}{3} v_{,k}^k \delta^{ij} \right] + \xi v_{,k}^k \delta^{ij} \right] - \kappa T_{,j} \end{aligned} \quad (22)$$

η es la viscosidad de *shear*, ξ es la viscosidad de volumen, y κ la conductividad térmica. Estas son las relaciones constitutivas que estábamos buscando. La corriente de entropía queda

$$J_s^j = su^j - \frac{1}{T} \left[v_i \left[\eta \left(v_{i,j} + v_{j,i} - \frac{2}{3} v_{,k}^k \delta^{ij} \right) + \xi v_{,k}^k \delta^{ij} \right] + \kappa T_{,j} \right] \quad (23)$$

3. Hidrodinámica relativista

Ahora vamos a transportar el análisis anterior al caso relativista. La idea es usar el ascensor de Einstein: las leyes relativistas se reducen a las no relativistas en el referencial en que el fluido está en reposo.

En primer lugar, el concepto de velocidad se convierte en la tetravelocidad

$$u^\mu = \frac{1}{c} x_{,\tau}^\mu \quad (24)$$

donde τ es el tiempo propio y $x^0 = ct$. En relación con sus componentes

$$u^\mu = \gamma \left(1, \frac{v^i}{c} \right) \quad (25)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (26)$$

Se deduce que

$$u^2 = -1 \quad (27)$$

y por lo tanto

$$u_\mu u^\mu = 0 \quad (28)$$

La densidad ρ y la corriente J_ρ^i de una cantidad conservada se resignifican como componentes de un único vector

$$J^\mu = \left(\rho, \frac{1}{c} J_\rho^i \right) \quad (29)$$

de manera que la ecuación de conservación toma la forma explícitamente covariante

$$J^\mu_{,\mu} = 0 \quad (30)$$

La densidad de la cantidad, vista por un observador con tetravelocidad v^μ , es $-v_\mu J^\mu$. Nótese que u^μ puede pensarse como la densidad asociada al volumen.

La energía y el impulso confluyen en la tetraimpulsión (u, cg^i) . Agregando las corrientes correspondientes construimos el tensor de energía-impulso

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u & \frac{1}{c} J_\rho^j \\ cg^i & T^{ij} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Las leyes de conservación de la energía y el impulso se resumen en

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (32)$$

Eventualmente vamos a querer usar a $T^{\mu\nu}$ como fuente de las ecuaciones de Einstein, para lo cual es necesario que sea simétrico. Ya hemos visto que T^{ij} lo es, y ahora aprendemos que $J_\rho^j = c^2 g^j$. Nótese que “la cosa que se conserva cuando un sistema es invariante frente a traslaciones”, que es el tensor de energía-impulso *canónico*, en general no es simétrico, y por lo tanto tampoco es nuestro $T^{\mu\nu}$.

Ahora debemos confrontar una dificultad: en un fluido en el que hay flujo de calor, como el calor es masa a través de la relación de Einstein, el flujo de masa no es necesariamente colineal con el flujo de las otras cargas conservadas. Entonces debemos decidir si la velocidad sigue el flujo de la masa/energía, o de las cargas conservadas. la segunda opción define el *referencial de Eckart*, mientras que la primera define el *referencial de Landau-Lifshitz*.

Como más adelante vamos a querer aplicar esto a un fluido que no tiene otras cargas conservadas, vamos a adoptar el referencial de Landau-Lifshitz. eso quiere decir que definimos la densidad de energía ρ y la velocidad como un autovalor (el único negativo) y el autovector correspondiente de $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} u_\nu = -\rho u^\mu \quad (33)$$

Entonces la densidad numérica es $n = -N^\mu u_\mu$ (en el frame de Eckart, $N^\mu = nu^\mu$ es la definición de u^μ) Una vez que tenemos la densidad de energía y la densidad de partículas definimos la temperatura y el potencial químico (medidos por un observador en reposo respecto del fluido) a través de la ecuación de estado para el sistema en reposo, es decir, la no relativista. De la misma manera definimos la presión. Todas estas cantidades, T , μ y p , son escalares.

Juntando todo ésto, la relación no relativista 16 se convierte en

$$S^\mu = p\beta^\mu - T^{\mu\nu} \beta_\nu - N^\mu \alpha \quad (34)$$

donde

$$\beta^\mu = \frac{u^\mu}{T} \quad (35)$$

es la temperatura inversa, y

$$\alpha = \frac{\mu}{T} \quad (36)$$

es el potencial térmico. De ahora en más vamos a asumir que $\alpha = 0$, lo cual de todas maneras es válido para un fluido conforme.

Ahora la Segunda Ley dice que la creación de entropía $\sigma = S_{,\mu}^{\mu}$ debe ser no-negativa. Un cálculo explícito da

$$\sigma = p_{,\mu}\beta^{\mu} - [T^{\mu\nu} - p\eta^{\mu\nu}] \beta_{\mu,\nu} \quad (37)$$

Ahora

$$\beta_{\mu,\nu} = \frac{-1}{T^2} T_{,\nu} u_{\mu} + \frac{1}{T} u_{\mu,\nu} \quad (38)$$

de manera que podemos escribir

$$\sigma = \frac{1}{T} u^{\mu} \left[p_{,\mu} - \frac{(\rho + p)}{T} T_{,\nu} \right] - \frac{1}{T} [T^{\mu\nu} - p\eta^{\mu\nu}] u_{\mu,\nu} \quad (39)$$

El primer término se anula en virtud de la relación de Gibbs-Duhem para un sistema en reposo con $\mu = 0$, por lo tanto el segundo debe ser no-negativo.

Es conveniente introducir el proyector

$$\Delta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + u^{\mu} u^{\nu} \quad (40)$$

que proyecta un vector sobre la hipersuperficie ortogonal a u^{μ} , en particular $\Delta^{\mu\nu} u_{\nu} = 0$. En el referencial en reposo

$$\Delta^{\mu\nu} = \text{diag} (0, 1, 1, 1) \quad (41)$$

Entonces

$$\sigma = -\frac{1}{T} [T^{\mu\nu} - p\eta^{\mu\nu}] \Delta_{\mu}^{\rho} (\Delta_{\nu}^{\lambda} - u^{\lambda} u_{\nu}) u_{\rho,\lambda} \quad (42)$$

como estamos en el referencial de Landau-Lifshitz,

$$[T^{\mu\nu} - p\eta^{\mu\nu}] u_{\nu} \propto u^{\mu} \quad (43)$$

de modo que el segundo término también se anula. Considerando la simetría y la definición del referencial de Landau-Lifshitz, encontramos que

$$T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu} + p \Delta^{\mu\nu} - \eta \sigma^{\mu\nu} - \xi u_{\rho}^{\rho} \Delta^{\mu\nu} \quad (44)$$

donde

$$\sigma^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\rho} \Delta^{\nu\lambda} \left[u_{\rho,\lambda} + u_{\lambda,\rho} - \frac{2}{3} u_{,\tau}^{\tau} \Delta_{\rho\lambda} \right] \quad (45)$$

El coeficiente η en esta expresión es lo que queremos calcular; para un fluido conforme $\xi = 0$.

La vez que viene vamos a ver porqué esta forma del tensor de energía impulso está mal.