

1. Hidrodinámica relativista

Para continuar nuestra discusión de hidrodinámica relativista, vamos a hacer dos simplificaciones que, como veremos, son válidas para un fluido con invariancia conforme: a) que no hay potencial químico, y b) que la traza de $T^{\mu\nu}$ se anula

$$T^\mu_\mu = 0 \quad (1)$$

Recordemos que estamos definiendo la velocidad y la densidad de energía del fluido según la prescripción de Landau-Lifshitz

$$T^{\mu\nu}u_\nu = -\rho u^\mu \quad (2)$$

Una vez que tenemos ρ , definimos la presión como la presión de un fluido ideal para esa densidad de energía. Para un fluido ideal

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p\Delta^{\mu\nu} \quad (3)$$

(nótese que la presión es isotrópica en el referencial en reposo; esta es la versión relativista del Principio de Pascal). La condición de que $T^{\mu\nu}$ sea sin traza lleva a la ecuación de estado

$$p = \frac{1}{3}\rho \quad (4)$$

Por otro lado, para un fluido ideal (que por definición está siempre en equilibrio local)

$$\frac{dp}{dT} = s = \frac{\rho + p}{T} \quad (5)$$

que implica la Ley de Stefan-Boltzmann

$$\rho = \sigma T^4 \quad (6)$$

Lo que depende del fluido es el valor de la constante σ . Además

$$s = \frac{4}{3}\sigma T^3 \quad (7)$$

Para un fluido real

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p\Delta^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu} \quad (8)$$

La condición de Landau-Lifshitz, la simetría de $T^{\mu\nu}$ y que no tenga traza implican que

$$\Pi^{\mu\nu} = \Pi^{\nu\mu}; \quad \Pi^{\mu\nu}u_\nu = \Pi^\mu_\mu = 0 \quad (9)$$

La conservación de $T^{\mu\nu}$ implica que

$$(\rho + p)_{,\nu} u^\mu u^\nu + (\rho + p) u^\mu_{,\nu} u^\nu + (\rho + p) u^\mu u^\nu_{,\nu} + \eta^{\mu\nu} p_{,\nu} + \Pi^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (10)$$

Conviene separar esta ecuación en términos que son colineales con la velocidad y términos ortogonales. También observamos que

$$u^\nu \rho_{,\nu} \equiv \dot{\rho} \quad (11)$$

es la derivada respecto del tiempo propio. Entonces, contrayendo la ecuación de conservación con u_μ

$$\dot{\rho} + (\rho + p) u^\nu_{,\nu} + \Pi^{\mu\nu} u_{\mu,\nu} = 0 \quad (12)$$

Los términos transversales a la velocidad quedan

$$(\rho + p) \dot{u}^\mu + \Delta^{\mu\nu} p_{,\nu} + \Delta^\mu_\rho \Pi^{\rho\nu}_{,\nu} = 0 \quad (13)$$

Para investigar estas ecuaciones vamos a mirar las fluctuaciones lineales alrededor de una solución de equilibrio en reposo, es decir $\rho = \rho_0$ constante y $u^\mu = U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Entonces

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 (1 + \delta) \\ u^\mu &= U^\mu + v^\mu\end{aligned}\tag{14}$$

donde la condición $u^2 = -1$ implica que $-U_\nu v^\nu = v^0 = 0$. $\Pi^{\mu\nu}$ ya es de primer orden, y $\Pi^{0\nu} = 0$. Separando explícitamente las coordenadas espaciales del tiempo encontramos

$$\dot{\delta} + \frac{4}{3}v_{,k}^k = 0\tag{15}$$

y

$$\frac{1}{3}\delta_{,k} + \frac{4}{3}\dot{u}^k + \frac{1}{\rho_0}\Pi_{,l}^{kl} = 0\tag{16}$$

Obsérvese que para un fluido ideal obtenemos la ecuación de las ondas

$$\ddot{\delta} - \frac{1}{3}\Delta\delta = 0\tag{17}$$

o sea, las fluctuaciones linealizadas son ondas de densidad (sonido) que se propagan con velocidad $c/\sqrt{3}$. *Jusqu'ici tout va bien.*

Para seguir adelante vamos a buscar soluciones en forma de ondas planas, es decir

$$\delta = \delta_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\tag{18}$$

Como el número de onda define una dirección privilegiada en el espacio, podemos descomponer

$$u^j = (i\phi k^j + g^j) e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\tag{19}$$

con

$$k_j g^j = 0\tag{20}$$

De la misma manera

$$\Pi^{jk} = \left[\psi \left(k^j k^k - \frac{1}{3}\delta^{jk} k^2 \right) + i (k^j h^k + h^j k^k) + \pi^{jk} \right] e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\tag{21}$$

con

$$k_j h^j = k_j \pi^{jk} = \pi_j^j = 0\tag{22}$$

es decir, descomponemos Π^{jk} en un escalar, un vector y un tensor simétrico sin traza (descomposición SVT). Por ejemplo, si $\vec{k} = (0, 0, k)$, entonces

$$\Pi^{jk} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}k^2\psi + \pi^{11} & \pi^{12} & ikh^1 \\ \pi^{12} & -\frac{1}{3}k^2\psi - \pi^{11} & ikh^2 \\ ikh^1 & ikh^2 & \frac{2}{3}k^2\psi \end{pmatrix}\tag{23}$$

Ahora las ecuaciones son (descomponemos la ecuación para la velocidad en las componentes en la dirección de $\vec{k}$ y en las direcciones ortogonales a $\vec{k}$)

$$\begin{aligned}-i\omega\delta_0 - \frac{4}{3}k^2\phi &= 0 \\ \frac{1}{3}i\delta_0 + \frac{4}{3}\omega\phi + \frac{2}{3}ik^2\psi &= 0 \\ \frac{4}{3}(-i)\omega g^k - \frac{1}{\rho_0}k^2 h^k &= 0\end{aligned}\tag{24}$$

Los términos tensoriales desaparecieron.

2. The trouble with Landau-Lifshitz

Hasta acá hemos sido completamente agnósticos acerca de $\Pi^{\mu\nu}$, para terminar el trabajo tenemos que proponer un modelo concreto.

La vez pasada vimos que el modelo de Landau-Lifshitz propone

$$\Pi^{\mu\nu} = -\eta\sigma^{\mu\nu} \quad (25)$$

con

$$\sigma^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\rho}\Delta^{\nu\lambda}\left[u_{\rho,\lambda} + u_{\lambda,\rho} - \frac{2}{3}\Delta_{\rho\lambda}u_{,\tau}^{\tau}\right] \quad (26)$$

En la teoría linealizada, esto se reduce a

$$\Pi_{jk} = -\eta\left[u_{j,k} + u_{k,j} - \frac{2}{3}\delta_{jk}u_{,l}^l\right] \quad (27)$$

Reemplazando la forma de la velocidad para una onda plana encontramos los términos de la descomposición SVT de Π^{jk}

$$\begin{aligned} \psi &= 2\eta\phi \\ h^j &= -\eta g^j \\ \pi^{jk} &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Ahora podemos cerrar nuestro sistema de ecuaciones. Como sólo nos interesa ver los problemas que tiene esta relación constitutiva, nos vamos a concentrar en la ecuación para g^j

$$\frac{4}{3}(-i)\omega g^k + \frac{\eta}{\rho_0}k^2 g^k = 0 \quad (29)$$

O sea, obtenemos la relación de dispersión

$$-i\omega = -\frac{3\eta}{4\rho_0}k^2 \quad (30)$$

pero esto es la relación de dispersión que se deduce de la ecuación del calor, y ya se sabe que la ecuación del calor implica propagación a velocidades superlumínicas. Por lo tanto, el esquema de Landau-Lifshitz viola causalidad.

2.1. Non solum, sed etiam

Además de violar causalidad, el formalismo de Landau-Lifshitz tiene severos problemas de estabilidad. Esto es un problema práctico, ya que es un obstáculo para la solución numérica de las ecuaciones.

Para ver ésto, vamos a estudiar las fluctuaciones linealizadas de una solución de equilibrio correspondiente a un fluido que se mueve con velocidad V , es decir, $\rho = \text{constante}$ y

$$U^\mu = \gamma(1, 0, 0, V) \quad (31)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (32)$$

Buscamos una onda con frecuencia ω y número de onda k que se propaga en la dirección de V . Podríamos hacer la cuenta de cero, pero es mucho más práctico hacer una transformación de Lorentz al referencial en el que el fluido está en reposo. En este referencial la frecuencia ω' y el número de onda k' obedecen la relación 30. Pero

$$\begin{aligned} \omega' &= \gamma(\omega - Vk) \\ k' &= \gamma(k - V\omega) \end{aligned} \quad (33)$$

de modo que

$$-i(\omega - Vk) = -\frac{3\eta}{4\rho_0}\gamma(k - V\omega)^2 \quad (34)$$

Vemos que algo raro hay porque esta ecuación cuadrática tiene dos soluciones, mientras que la relación de dispersión 30 muestra sólo una. ¿Dónde está la otra solución?

Expandiendo

$$V^2\omega^2 - 2A\omega + B = 0 \quad (35)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= kV + i\frac{2\rho_0}{3\eta\gamma} \\ B &= k^2 + i\frac{4\rho_0}{3\eta\gamma}Vk \end{aligned} \quad (36)$$

de modo que

$$\omega = \frac{1}{V^2} \left[A \pm \sqrt{A^2 - V^2 B} \right] \quad (37)$$

La solución que habíamos encontrado antes corresponde al signo $-$, pero ahora tenemos también la segunda solución, que cuando $V \rightarrow 0$ tiende a

$$\omega \approx \frac{2A}{V^2} \approx i\frac{4\rho_0}{3\eta\gamma V^2} \quad (38)$$

que hace que el factor $e^{-i\omega t}$ sea tremendamente divergente.

3. El modelo de Israel-Stewart

Si el modelo de Landau-Lifshitz no funciona, la pregunta que sigue es qué hicimos mal. Israel y Stewart rastrearon el problema a haber escrito el flujo de entropía como

$$S^\mu = p\beta^\mu - T^{\mu\nu}\beta_\nu \quad (39)$$

Esta forma es correcta para un fluido ideal, y como la entropía es estacionaria en equilibrio esperamos que siga siendo correcta a primer orden en desviaciones respecto del equilibrio. pero la creación de entropía es de segundo orden en estas desviaciones, y por lo tanto no podemos depender en que 39 siga valiendo. En cambio, uno debe escribir

$$S^\mu = p\beta^\mu - T^{\mu\nu}\beta_\nu + Q^\mu \quad (40)$$

donde Q^μ es idénticamente cero a primer en desviaciones respecto de equilibrio.

Ahora, ¿qué podemos decir sobre Q^μ ? Israel y Stewart tomaron de la llamada *termodinámica extendida* la idea de que Q^μ tenía que construirse a partir del mismo $\Pi^{\mu\nu}$. Como las condiciones $\Pi_\mu^\mu = \Pi^{\mu\nu}u_\nu = 0$ no nos permiten construir un vector lineal en $\Pi^{\mu\nu}$, el término más simple que a uno se le ocurre es

$$S^\mu = p\beta^\mu - T^{\mu\nu}\beta_\nu - \alpha (\Pi^{\rho\lambda}\Pi_{\rho\lambda}) u^\mu \quad (41)$$

La elección de signos tiene en cuenta que uno espera que la densidad de entropía sea máxima en equilibrio. Repitiendo la cuenta que hicimos la clase pasada ahora uno encuentra

$$S_\mu^\mu = -\frac{1}{T}\Pi^{\rho\lambda} \left[\sigma_{\rho\lambda} + 2\alpha T\dot{\Pi}_{\rho\lambda} + \alpha T\Pi_{\rho\lambda}u_{,\mu}^\mu \right] \quad (42)$$

En principio α podría no ser constante (podría depender de la temperatura, por ejemplo) pero no lo vamos a considerar. Esto sugiere que podemos lograr que la creación de entropía sea positiva si

$$\Pi_{\rho\lambda} = -\eta \left[\sigma_{\rho\lambda} + 2\alpha T\dot{\Pi}_{\rho\lambda} + \alpha T\Pi_{\rho\lambda}u_{,\mu}^\mu \right] \quad (43)$$

Esto tiene un problema: no asegura que $\Pi_{\rho\lambda}$ sea transverso, excepto si $\Pi_{\rho\lambda}\dot{u}^\lambda = 0$. En general no podemos asegurar esta condición, pero se considera que de todos modos ésto es un término de orden superior y puede despreciarse. Por consistencia, debemos despreciar también el último término.

Nótese que 43 no es una relación constitutiva, sino una ecuación de movimiento para $\Pi^{\mu\nu}$

$$\tau\dot{\Pi}_{\rho\lambda} + \Pi_{\rho\lambda} = -\eta\sigma_{\rho\lambda} \quad (44)$$

donde

$$\tau = 2\alpha\eta T \quad (45)$$

Una ecuación de este tipo se llama de *Cattaneo-Maxwell*. Describe la relajación de $\Pi^{\mu\nu}$ al valor de Landau-Lifshitz en un tiempo del orden de τ .

Para ver qué consecuencias tiene ésto, volvamos al problema de las fluctuaciones incompresibles de un fluido en equilibrio. Seguimos teniendo

$$\frac{4}{3}i\omega g^j + \frac{1}{\rho_0}k^2 h^j = 0 \quad (46)$$

pero ahora

$$\eta g^j + (1 - i\omega\tau) h^j = 0 \quad (47)$$

lo cual da la relación de dispersión

$$\omega \left(\omega + \frac{i}{\tau} \right) - \frac{3}{4} \frac{\eta}{\rho_0 \tau} k^2 = 0 \quad (48)$$

Pasamos de la ecuación del calor a la *ecuación del telegrafista*. Esta ecuación es consistente con causalidad: cuando $k \rightarrow \infty$ se reduce a la ecuación de las ondas con una velocidad de propagación

$$c_s^2 = \frac{3}{4} \frac{\eta}{\rho_0 \tau} \quad (49)$$

de manera que debemos pedir que $\tau \geq 3\eta/4\rho_0$.

También puede verse que las fluctuaciones alrededor de un fluido en movimiento uniforme son estables.

Es curioso que en este modelo la parte tensorial de $\Pi^{\mu\nu}$ no es necesariamente cero, pero está desacoplada del resto

$$\tau\dot{\pi}_{jk} + \pi_{jk} = 0 \quad (50)$$

y no se propaga.

Cuando se compara el modelo de Israel-Stewart con el límite hidrodinámico de una teoría más fundamental, por ejemplo la ecuación de Boltzmann, se ve que no hay ningún motivo de principio para que Q^μ adopte la forma que hemos supuesto. La teoría de Israel-Stewart (que Israel odiaba que la llamaran así) emparcha la de Landau-Lifshitz a segundo orden en desviaciones respecto del equilibrio, pero a su vez requiere parches cuando los términos fuera de equilibrio son realmente significativos.

En el contexto de este curso es significativo que Natsuume encontró inconsistencias cuando uno trata de deducir Israel-Stewart de AdS/CFT. Ver la referencia más abajo.

4. Bibliografía

Mi review favorito sobre hidrodinámica relativista es W. Israel, *Covariant Fluid Mechanics and Thermodynamics: an Introduction*, en A. Anile Y. Choquet-Bruhat (Eds.), *Relativistic Fluid Dynamics*, Springer, 1989.

El libro de Natsuume (op. cit.) discute las limitaciones de la hidrodinámica de Landau-Lifshitz.

Acerca de los intentos de ir más allá de Landau-Lifshitz en el contexto de AdS/CFT, ver

Makoto Natsuume y Takashi Okamura, Causal hydrodynamics of gauge theory plasmas from AdS/CFT duality, *Phys. Rev. D*77, 066014 (2008); *(E) Phys. Rev. D*78, 089902(E) (2008)

Makoto Natsuume, String theory implications on causal hydrodynamics, *Prog.Theor.Phys.Suppl.*174:286-297,2008 (arXiv:0807.1394).

Ciambelli, Luca, y Lehner, Luis, Fluid-gravity correspondence and causal first-order relativistic viscous hydrodynamics, *Phys. Rev. D*108, 126019 (2023).

Iberê Kuntz y Roldao da Rocha, Transport and Response Coefficients in Second-Order Dissipative Relativistic Hydrodynamics with Quantum Corrections: Probing the Quark–Gluon Plasma, *Entropy* 2025, 27, 580

Saulo M. Diles, Luis A.H. Mamani, Alex S. Miranda y Vilson T. Zanchin, Third-order relativistic hydrodynamics: dispersion relations and transport coefficients of a dual plasma, *JHEP* 05 (2020) 019.