1. Teorema de Tolman

Supongamos un espacio tiempo estático, es decir, con un intervalo

$$ds^2 = -g_{00}(\mathbf{x})\, dt^2 + g_{ij}(\mathbf{x})\, dx^i dx^j \tag{1}$$

Supongamos que un rayo de luz sale del punto $\mathbf{x}_0$ en el instante $t = 0$ y llega al punto $\mathbf{x}_1$ en el instante $t = t_1$. En cambio, un rayo que sale en $t = t_0$ llega en $t = t_1 + t_0$. El tiempo propio entre las partidas es $\Delta s_0 = \sqrt{-g_{00}(\mathbf{x}_0)}t_0$, mientras que el tiempo propio entre llegadas es $\Delta s_1 = \sqrt{-g_{00}(\mathbf{x}_1)}t_0$. Si en vez de dos rayos de luz consideramos dos crestas de una onda, el tiempo propio entre ellas representa el periodo de la onda, o sea $2\pi/\omega$, donde ω es la frecuencia de la onda. De esa manera, distintos observadores estacionarios perciben a la onda como teniendo frecuencias distintas, de acuerdo a la ley

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{\omega_0}{\sqrt{-g_{00}(\mathbf{x})}} \tag{2}$$

donde $\omega_0 =$ constante. Si en vez de un único rayo de luz consideramos radiación en equilibrio térmico, vemos que cuando distintos observadores estacionarios perciben temperaturas

$$T(\mathbf{x}) = \frac{T_0}{\sqrt{-g_{00}(\mathbf{x})}} \tag{3}$$

con $T_0 =$ constante, entonces la distribución de energías por ancho de banda es función sólo de ω_0/T_0, y el gas está en equilibrio. Supongamos ahora un sistema cualquiera en equilibrio. Existe algún gas de radiación que estará en equilibrio con ese sistema, y por la Ley Cero de la termodinámica, entonces ambos fluidos están a la misma temperatura. Por lo tanto la ley (3) vale para la distribución de temperaturas de cualquier cuerpo; se la conoce como el *ley de Tolman*.

Podemos dar una demostración más formal del Teorema de Tolman a partir de la primera ley covariante (no incluímos un potencial químico)

$$dS^\mu = \beta_\nu dT^{\mu\nu} \tag{4}$$

a primer orden en desviaciones respecto del equilibrio. Si la fluctuación cumple con las leyes de conservación, la fluctuación en la producción de entropía es

$$dS^\mu_{;\mu} = \beta_{\nu;\mu} dT^{\mu\nu} \tag{5}$$

pero en un estado de equilibrio, la creación de entropía es estacionaria, de manera que β_ν tiene que ser un *vector de Killing*

$$\beta_{(\nu;\mu)} = 0 \tag{6}$$

En una métrica estática 1 el vector de Killing temporal es

$$t^\mu = (1, 0, 0, 0) \tag{7}$$

Efectivamente

$$t^\mu_{;\nu} = \Gamma^\mu_{\nu 0} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left[g_{0\lambda,\nu} - g_{0\nu,\lambda}\right] \tag{8}$$

de modo que $t_{\mu;\nu}$ es efectivamente antisimétrico. Identificando $\beta_\mu = t_\mu/T_0$ encontramos

$$\frac{1}{T^2} = -\beta_\mu \beta^\mu = \frac{-g_{00}^2}{T_0^2} \tag{9}$$

de acuerdo con Tolman.

2. Temperatura y tiempo complejo

En el curso hemos insistido con que poner un campo a temperatura finita es equivalente a compactificar el tiempo imaginario, imponiendo una periodicidad con período $\beta = 1/T$. pero, ¿qué pasa si el tiempo imaginario *ya* es periódico? Entonces, la periodicidad propia del tiempo complejo impondría una especie de temperatura mínima a todas las configuraciones de campo.

Un caso en cuestión es la métrica de Schwarzchild

$$ds^2 = f(r)\,dt^2 + g(r)\,dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{10}$$

con

$$f = \frac{1}{g} = 1 - \frac{2M}{m_p^2 r} \tag{11}$$

Es un espacio tiempo estático con simetría esférica, correspondiente a una solución de vacío en todo punto fuera del origen. El origen $r = 0$ es efectivamente una singularidad. El horizonte de eventos $R_S = M/m_p^2$ o *radio de Schwarzchild*, en cambio, es sólo una singularidad de las coordenadas.

Por otro lado, podemos asignar una temperatura al agujero observando que la continuación euclídea del agujero es periódica en el tiempo. Efectivamente, si ponemos $d\theta = d\varphi = 0$, cerca del horizonte tenemos la métrica euclídea

$$ds_e^2 = f'(R_S)(r - R_s)\,d\tau^2 + \frac{dr^2}{f'(R_S)(r - R_s)} \tag{12}$$

Empezamos definiendo una nueva coordenada radial ρ tal que

$$d\rho^2 = \frac{dr^2}{f'(R_S)(r - R_s)} \tag{13}$$

con $\rho = 0$ en $r = R_S$; efectivamente

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{f'(R_S)}}\sqrt{r - R_s} \tag{14}$$

y ahora la métrica euclídea es

$$ds_e^2 = \frac{1}{4}\left[f'(R_S)\right]^2 \rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 \tag{15}$$

que es equivalente a una métrica plana con variable angular

$$\theta = \frac{1}{2} f'(R_S)\,\tau \tag{16}$$

La variable θ tiene una periodicidad natural de 2π (cualquier otro valor introduce una singularidad cónica en el origen). Por lo tanto, la periodicidad en el tiempo es

$$\Delta\tau = \frac{4\pi}{f'(R_S)} \tag{17}$$

La temperatura se define por la longitud propia de la circunferencia

$$\beta = \Delta\tau\sqrt{-g_{00}} \tag{18}$$

O sea que la distribución de temperaturas obedece al teorema de Tolman.

Para un agujero negro de Schwarzchild

$$f'(R_S) = \frac{m_p^2}{2M} \tag{19}$$

La temperatura del agujero, vista por un observador en infinito, es

$$\beta_{BH} = 8\pi\frac{M}{m_p^2} \tag{20}$$

y la energía es $E = M$, de modo que podemos relacionar la energía, la entropia y la temperatura del agujero mediante

$$TdS = dE \tag{21}$$

y obtenemos

$$S_{BH} = 4\pi \left(\frac{M}{m_P}\right)^2 = \frac{1}{4} m_p^{A_{BH}} \tag{22}$$

donde $A_{BH} = 4\pi R_S^2$ es el área del horizonte.

3. La cuña de Rindler y el efecto Unruh

Si bien el caso de Schwarzschild ejemplifica la técnica que vamos a usar para "calentar" una teoría conforme (vamos a meter un agujero negro en el AdS donde vive su teoría dual), es interesante ver el caso de un campo en el espacio de Minkowski visto por observadores uniformemente acelerados. Estos observadores perciben al vació de Minkowski como un estado térmico, y además podemos proveer a cada observador con un detector de partículas para indagar en la "realidad" de estas partículas a temperatura finita.

Para empezar, hay que observar que en el espacio de Minkowski no puede haber observadores uniformemente acelerados en sentido estricto. La aceleración se define a partir de la velocidad

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{23}$$

como

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = u^\nu u^\mu_{,\nu} \tag{24}$$

Por lo tanto

$$u_\mu a^\mu = 0 \tag{25}$$

Por lo tanto, si la velocidad cambia la aceleración debe cambiar para permanecer ortogonal a la velocidad. Nótese que la aceleración es siempre un vector espacial.

Un observador es uniformemente acelerado si

$$a_\mu a^\mu = a_0^2 = \text{ constante} \tag{26}$$

Si el movimiento es en una dimensión, podemos parametrizar

$$\begin{aligned} u^0 &= \cosh\chi \\ u^1 &= \sinh\chi \end{aligned} \tag{27}$$

Entonces

$$\begin{aligned} a^0 &= \frac{d\chi}{d\tau}\sinh\chi \\ a^1 &= \frac{d\chi}{d\tau}\cosh\chi \end{aligned} \tag{28}$$

de modo que para un observador uniformemente acelerado

$$\chi = a_0 \tau \tag{29}$$

Integrando una vez más

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{a_0}\sinh a_0\tau \\
x &= \frac{1}{a_0}\cosh a_0\tau
\end{aligned} \tag{30}
$$

Podemos llenar la *cuña de Rindler* $x \geq |t|$ con un gas de observadores acelerados. Para eso introducimos coordenadas

$$
\begin{aligned}
t &= \rho\sinh\theta \\
x &= \rho\cosh\theta
\end{aligned} \tag{31}
$$

Una línea $\rho =$ constante corresponde a un observador acelerado con aceleración $a_0 = 1/\rho$; el tiempo propio de este observador es $\tau = \rho\theta$. Nótese que los rayos de luz $t = \pm x$ son un horizonte para estos observadores.

La métrica de Minkowski es

$$
ds^2 = -\rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 \tag{32}
$$

Al pasar al espacio euclídeo vemos que es natural compactificar la variable θ con periodicidad 2π. Por lo tanto cada observador percibe una temperatura

$$
\beta = \Delta\tau = 2\pi\rho = \frac{2\pi}{a_0} \tag{33}
$$

Si uno de estos observadores llevara consigo un detector de partículas, éste debería detectar las partículas del baño térmico. ¿Ocurre ésto realmente?

3.1. Cuantificación del campo escalar libre

Para investigar esta cuestión vamos a considerar el caso en que el campo obedece la ecuación de Klein-Gordon sin masa

$$
\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi = 0 \tag{34}
$$

se cuantifica observando que si descomponemos el campo en modos

$$
\phi = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\phi_k(t) \tag{35}
$$

Entonces ϕ_k es un oscilador armónico

$$
\frac{\partial^2\phi_k}{\partial t^2} + k^2\phi_k = 0 \tag{36}
$$

El operador del campo en representación de Heisenberg se escribe en términos de los operadores de creación y destrucción para cada modo

$$
\phi = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{\sqrt{2k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\left[e^{-ikt}a_k + e^{ikt}a^\dagger_{-k}\right] \tag{37}
$$

$$
\left[a_k, a^\dagger_{k'}\right] = (2\pi)^d\,\delta\left(k - k'\right) \tag{38}
$$

$N_k = a^\dagger_k a_k$ es el operador número de partículas. En el estado de vacío

$$
\langle N_k\rangle = 0 \tag{39}
$$

En un estado térmico

$$
\langle N_k\rangle = \frac{1}{e^{\beta k} - 1} \tag{40}
$$

3.2. Detectores de partículas

Reducido a lo esencial, un detector de partículas es un sistema de dos niveles en el que la amplitud de transición de un nivel a otro es proporcional a la amplitud del campo en la posición del detector. El sistema acoplado campo-detector tiene un Hamiltoniano

$$H = H_C + H_D + H_{S\ int} \tag{41}$$

H_C es el Hamiltoniano del campo libre, H_D es el Hamiltoniano del detector con dos autovectores $H_D |G\rangle = 0$ y $H_D |E\rangle = E |E\rangle$ y H_{int} es el Hamiltoniano de interacción en representación de Schrödinger

$$H_{S\ int} = \phi_S(x)\, \mathbf{m}_S \tag{42}$$

donde $\phi_S(x)$ es el operador de campo en representación de Schrödinger, y $\mathbf{m}_S$ es un observable del detector que acopla los estados G y E.

Para seguir la evolución del sistema acoplado, es conveniente utilizar la *representación de interacción.* Si $|C - D\rangle_S(t)$ es un estado del sistema acoplado en representación de Schrödinger, entonces en representación de interacción

$$|C - D\rangle(t) = e^{i(H_C+H_D)t} |C - D\rangle_S(t) \tag{43}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t} |C - D\rangle(t) &= e^{i(H_C+H_D)t} H_{S\ int} |C - D\rangle_S(t) \\ &= H_{int} |C - D\rangle(t) \end{aligned} \tag{44}$$

donde

$$H_{int} = e^{i(H_C+H_D)t} H_{S\ int} e^{-i(H_C+H_D)t} = \phi(x,t)\, \mathbf{m}(t) \tag{45}$$

$\phi(x,t)$ es el operador de campo en representación de interacción

$$\phi(x,t) = e^{iH_C t} \phi_S(x)\, e^{-iH_C t} \tag{46}$$

$\phi(x,t)$ es un campo libre, y por lo tanto se puede desarrollar en operadores de creación y destrucción como vimos más arriba. Análogamente

$$\mathbf{m}(t) = e^{iH_D t} \mathbf{m}_S(x)\, e^{-iH_D t} \tag{47}$$

Si la interacción entre campo y detector es débil, entonces la ecuación de movimiento para el estado se puede resolver perturbativamente. Si en el pasado lejano el campo está en el estado $|X\rangle$ y el detector en su estado fundamental $|G\rangle$, entonces a primer orden

$$i\frac{\partial}{\partial t} |C - D\rangle(t) = \phi(x,t)\, \mathbf{m}(t) |X\rangle |G\rangle \tag{48}$$

con la integral trivial

$$|C - D\rangle(t) = |X\rangle |G\rangle - i \int_{-\infty}^{t} dt'\ \phi(x,t')\, \mathbf{m}(t') |X\rangle |G\rangle \tag{49}$$

La amplitud de encontrar al detector en el estado E, y al campo en algún estado $|Y\rangle$, a tiempos muy largos, es

$$\begin{aligned} A &= i \int_{-\infty}^{\infty} dt'\ \langle Y| \phi(x,t') |X\rangle \langle E| \mathbf{m}(t') |G\rangle \\ &= -i \langle E| \mathbf{m}_S |G\rangle \int_{-\infty}^{\infty} dt'\ e^{iEt'} \langle Y| \phi(x,t') |X\rangle \end{aligned} \tag{50}$$

y la probabilidad

$$P = |A|^2 = |\langle E| \mathbf{m}_S |G\rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt dt'\ e^{-iE(t-t')} \langle X| \phi(x,t) |Y\rangle \langle Y| \phi(x,t') |X\rangle \tag{51}$$

Si sólo nos interesa la probabilidad de que el detector se excite, sumamos sobre $|Y\rangle$

$$\mathcal{P} = |\langle E| \mathbf{m}_S |G\rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt dt'\ e^{-iE(t-t')} \langle X| \phi(x,t)\, \phi(x,t') |X\rangle \tag{52}$$

El próximo paso es descomponer el operador de campo en operadores de creación y destrucción. Si el estado $|X\rangle$ tiene números de partículas bien definidos en cada modo, entonces

$$\begin{aligned}\langle X| a_{k'}^{\dagger} a_k |X\rangle &= (2\pi)^d N_k \delta(k-k') \\ \langle X| a_{k'} a_k^{\dagger} |X\rangle &= (2\pi)^d (1+N_k)\,\delta(k-k') \\ \langle X| a_{k'} a_k |X\rangle &= \langle X| a_{k'}^{\dagger} a_k^{\dagger} |X\rangle = 0\end{aligned} \tag{53}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = |\langle E| \mathbf{m}_S |G\rangle|^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \left\{ (1+N_k)\, e^{-i(E+k)\left(t-t'\right)} + N_k e^{-i(E-k)\left(t-t'\right)} \right\} \\ = \quad |\langle E| \mathbf{m}_S |G\rangle|^2 \mathcal{T} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2k} N_k \delta(E-k)\end{aligned} \tag{54}$$

donde $\mathcal{T}$ es el tiempo total que está encendido el detector.

- Si el campo está inicialmente en el estado de vacío, el detector no cliquea.
- Si el campo está inicialmente en un estado térmico, la probabilidad de que el detector cliquee es proporcional a $\langle N_E \rangle_\beta \approx e^{-\beta E}$

3.3. Detectores acelerados

Si el detector está siguiendo una trayectoria arbitraria, la integral sobre el tiempo se reemplaza por una integral sobre la trayectoria, parametrizada por el tiempo propio τ del detector. La probabilidad de excitación es

$$\mathcal{P} = |\langle E| \mathbf{m}_S |G\rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau d\tau'\; e^{-iE\left(\tau-\tau'\right)} \langle X| \phi(x(\tau), t(\tau))\, \phi(x(\tau'), t(\tau')) |X\rangle \tag{55}$$

Asumiendo directamente que $|X\rangle$ es el estado de vacío (*de Minkowski*), entonces

$$\mathcal{P} = |\langle E| \mathbf{m}_S |G\rangle|^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2k} \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\; e^{-i\left[E\tau + kt(\tau) - \vec{k}\cdot\vec{x}(\tau)\right]} \right|^2 \tag{56}$$

Para un detector uniformemente acelerado, $\tau = \rho\theta$, $\rho =$ constante. También tomamos $d = 1$ para simplificar las fórmulas. Entonces

$$\mathcal{P} = |\langle E| \mathbf{m}_S |G\rangle|^2 \int_0^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)} \frac{\rho^2}{k} \left\{ \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\; e^{-i\left[E\rho\theta + k\rho e^{\theta}\right]} \right|^2 + \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\; e^{-i\left[E\rho\theta - k\rho e^{-\theta}\right]} \right|^2 \right\} \tag{57}$$

Aunque la integral se puede hacer, para nuestros propósitos es más interesante notar que existe un punto silla cuando

$$E\rho + k\rho e^{\pm\theta} = 0 \tag{58}$$

de modo que

$$e^{\pm\theta} = -\frac{E}{k}; \quad \theta = \pm \ln\left[\frac{E}{k}\right] - i\pi \tag{59}$$

Aproximando la integral por su valor en el punto silla obtenemos

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\; e^{-i\left[E\rho\theta + k\rho e^{\theta}\right]} \right|^2 \approx e^{-2\pi E\rho} \tag{60}$$

como corresponde a un detector sumergido en un baño térmico con temperatura $\beta \approx 2\pi\rho$, $\mathcal{QED}$.