1. La viscosidad según AdS/CFT

El objetivo de esta clase es calcular el coeficiente de viscosidad de un plasma fuertemente acoplado usando técnicas holográficas. Recordemos que el tensor de energía impulso es

$$T^{\mu}_{\nu} = (\rho + p)\, u^{\mu} u_{\nu} + p\delta^{\mu}_{\nu} - \eta\sigma^{\mu}_{\nu} \tag{1}$$

Si perturbamos la métrica a

$$ds^2 = -dt^2 + [\delta_{ij} + h_{ij}]\, dx^i dx^j \tag{2}$$

con $h^i_i = h^i_{j,i} = 0$, entonces a primer orden en h_{ij} encontramos $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ y

$$\sigma_{ij} = -2\Gamma^0_{ij} = -\dot{h}_{ij} \tag{3}$$

Por lo tanto, a primer orden en h_{ij}

$$T^i_j = \eta \dot{h}^i_j \tag{4}$$

Nuestro objetivo es calcular el valor de expectación de T^{μ}_{ν} a primer orden en la perturbación de la métrica, y fitearlo a la forma 4, de donde extraeremos el valor de la viscosidad. Para eso vamos a definir un funcional generador

$$e^{-W[h_{\mu\nu}]} = \left\langle e^{-\int d^4x\ h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}} \right\rangle \tag{5}$$

de modo que

$$\left\langle T^i_j \right\rangle = \frac{\delta W}{\delta h^j_i} \tag{6}$$

Para calcular el funcional generador vamos a aproximar

$$e^{-W[h_{\mu\nu}]} = e^{-S[g_{\mu\nu}]} \tag{7}$$

donde S es la acción *on shell* de un campo $g_{\mu\nu}$ en AdS que toma el valor $h_{\mu\nu}$ en el borde. Es natural pensar que $g_{\mu\nu}$ es simplemente la métrica de AdS; un argumento formal requiere plantear la correspondencia en el marco de teoría de cuerdas. Otra cosa que necesitamos extraer de la teoría de cuerdas es que la solución que necesitamos de las ecuaciones de Einstein debe contener una constante cosmológica Λ, relacionada con el número de colores N_c de la teoría en el borde según

$$N_c^2 \propto \left(\frac{m_p^2}{(-\Lambda)} \right)^{3/2} \tag{8}$$

donde m_p es la masa de Planck. Además, queremos calentar el borde a una temperatura T, para lo cual vamos a introducir un agujero negro en el volumen.

2. Acerca de la acción de Einstein-Hilbert

Antes de empezar, es conveniente hacer algunos comentarios sobre la acción de Einstein-Hilbert. En d dimensiones

$$S_{EH} = \frac{m_p^{d-2}}{16\pi} \int d^dx\ \sqrt{-g} R = \frac{m_p^{d-2}}{16\pi} \int d^dx\ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{9}$$

Las ecuaciones de Einstein

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{m_p^{d-2}} T^{\mu\nu} \tag{10}$$

se deducen de la variación de la acción $S_{EH} + S_m$, donde S_m es la acción de la materia. Comparando con las ecuaciones de Einstein, vemos que

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{11}$$

Esta expresión para $T_{\mu\nu}$ tiene tres consecuencias importantes

1) $T_{\mu\nu}$ es simétrico. Esto no es trivial porque un tensor conservado no necesariamente es simétrico. En general, si $T^{\mu\nu}$ es un tensor conservado, entonces

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho A^{\rho\mu\nu} \tag{12}$$

Tambien se conserva, si $A^{\rho\mu\nu} = -A^{\mu\nu\rho}$. No hay un requerimiento particular de simetría en (μ, ν).

2) $T_{\mu\nu}$ se conserva. $T_{\mu\nu}$ es la corriente conservada que se obtiene aplicando el Teorema de Noether a la invariancia de la acción frente a cambios de coordenadas.

3) Para una teoría conforme, $T^\mu_\mu = 0$. En una transformación conforme la métrica se transforma como $g_{\mu\nu} \to a^2 g_{\mu\nu}$. Si la acción es independiente de a^2, entonces

$$0 = \frac{\delta S_m}{\delta a^2} = \frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta a^2}\frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \tag{13}$$

Por ejemplo, en la teoría de Maxwell

$$S = \int d^4x \, \sqrt{-g} g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} \tag{14}$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Ante una transformación conforme $F_{\mu\nu}$ no cambia, $\sqrt{-g}$ adquiere un factor de a^4 y cada $g^{\mu\lambda}$ uno de a^{-2}, de modo que la acción es invariante. Por eso para un gas de fotones debe ser $p = \rho/3$, lo que a su vez implica la Ley de Stefan-Boltzmann $\rho \propto T^4$.

Cuando uno cuantifica la teoría en un espacio tiempo curvo es necesario renormmalizar $T^{\mu\nu}$, que adquiere una traza debido a que los contratérminos covariantes que hay que usar tienen un residuo finito y con traza. Este efecto se conoce como la *anomalía de traza*.

Para obtener las ecuaciones de Einstein a partir de la acción de Einstein-Hilbert es suficiente tener en cuenta que, si $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, entonces

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \\ \delta g^{\rho\sigma} &= -g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} h_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{15}$$

Es decir, la variación del tensor de Ricci no contribuye a las ecuaciones de movimiento. Eso ocurre porque esta variación es una divergencia total. Para ver ésto recordamos que la *variación* de la conexión es un tensor, ya que se transforma de manera homogénea. Entonces

$$\delta R_{\rho\sigma} = \delta\Gamma^\mu_{\rho\sigma;\mu} - \delta\Gamma^\mu_{\rho\mu;\sigma} \tag{16}$$

La variación del tensor de Ricci da lugar a un término de borde. Tomando la coordenada u en la dirección perpendicular al borde

$$-\frac{m_p^{d-2}}{16\pi} \int_{\delta V} d^{d-1}x \, \sqrt{-g} \left[g^{\rho\sigma} \delta\Gamma^u_{\rho\sigma} - g^{\rho u} \delta\Gamma^\mu_{\rho\mu} \right] \tag{17}$$

Ahora

$$-\delta\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left[h_{\rho\lambda;\sigma} + h_{\sigma\lambda;\rho} - h_{\rho\sigma;\lambda} \right] \tag{18}$$

y entonces el término de borde

$$-\frac{m_p^{d-2}}{16\pi} \int d^4x \, \sqrt{-g} g^{\rho\sigma} g^{u\lambda} \left[h_{\rho\lambda;\sigma} - h_{\rho\sigma;\lambda} \right] \tag{19}$$

Las derivadas en las direcciones paralelas al borde se vuelven a integrar y no contribuyen. Para una métrica de la forma

$$ds^2 = \gamma_{ab} dx^a dx^b + g_{uu} du^2 \tag{20}$$

con $h_{u\mu} = 0$ el término de borde resulta

$$\frac{m_p^{d-2}}{16\pi} \int d^{d-1}x \, \sqrt{-\gamma} \sqrt{g^{uu}} h^a_{a,u} \tag{21}$$

que también es la variación de

$$S_{GH} = 2\frac{m_p^{d-2}}{16\pi} \int d^4x \sqrt{g^{uu}}\partial_u\sqrt{-\gamma} \tag{22}$$

este término, o acción de *Gibbons-Hawking*, debe ser sustraído de la acción de Einstein-Hilbert para garantizar que la acción tenga un extremo cuando uno considera variaciones que se anulan en el borde.

3. Plasmas de gauge en equilibrio

En presencia de una constante cosmológica, la acción de Einstein-Hilbert se convierte en

$$S_{EH} = -\frac{m_p^3}{16\pi}\int_\epsilon^1 du \int d^4x \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) \tag{23}$$

(El cambio de signo es porque ésta es la acción euclídea) y las ecuaciones de Einstein

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -g^{\mu\nu}\Lambda \tag{24}$$

En los apéndices demostramos que la métrica de fondo en AdS es

$$ds^2 = \frac{1}{u^2}\left\{\left(\frac{r_0}{L}\right)^2\left[-hdt^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j\right] + \frac{L^2}{h}du^2\right\} \tag{25}$$

donde

$$h = 1 - u^4 \tag{26}$$

Esta es solución de las ecuaciones de Einstein con

$$\Lambda = -\frac{6}{L^2} \tag{27}$$

El número de colores está dado por

$$N_c^2 = \frac{\pi}{2}m_p^3 L^3 \tag{28}$$

Cerca de $u = 1$ la métrica es

$$ds^2 = \left(\frac{r_0}{L}\right)^2\left[-4\,(1-u)\,dt^2 + dx_j dx^j\right] + \frac{L^2}{4\,(1-u)}du^2 \tag{29}$$

Llamamos $\rho = L\sqrt{1-u}$, $d\rho = -Ldu/2\sqrt{1-u}$

$$ds^2 = \left(\frac{r_0}{L}\right)^2\left[-\frac{4}{L^2}\rho^2 dt^2 + dx_j dx^j\right] + d\rho^2 \tag{30}$$

Identificamos a t como una variable con periodicidad β. la sección euclídea es regular cuando la longitud propia de la circunferencia de radio ρ es $2\pi\rho$, es decir

$$\beta = \pi\frac{L^2}{r_0} \tag{31}$$

Entonces la densidad de entropía es el cociente entre el área propia y el área coordenada del horizonte

$$s = \frac{m_p^3}{4}\left(\frac{r_0}{L}\right)^3 \tag{32}$$

(comparar con la relación correspondiente en Schwarzschild

$$S = \frac{m_p^2}{4}A \tag{33}$$

donde $A = 4\pi r_S^2$ es el área del horizonte). Usando el diccionario

$$s=\frac{\pi^2}{2}N_c^2T^3 \tag{34}$$

Para un fluido conforme, las propiedades $p=\rho/3$, $s=(4/3)\,\rho/T$ siguen valiendo, así que conociendo s y T tenemos toda la termodinámica. En particular, la densidad de energía libre debiera ser $f=\rho-Ts$ o

$$f=-\frac{m_p^3}{16\pi L}\left(\frac{r_0}{L}\right)^4 \tag{35}$$

y la función de Massieu

$$\frac{f}{T}=-\frac{1}{4}s=-\frac{m_p^3}{16}\left(\frac{r_0}{L}\right)^3 \tag{36}$$

Queremos ver si podemos recuperar este resultado de la función de partición. Nótese que tenemos que calcular la acción de Einstein-Hilbert S_{EH} 23, la acción de Gibbons-Hawking

$$S_{GH}=\frac{2m_p^3}{16\pi}\int d^4x\;\; n^\mu\partial_u\sqrt{-\gamma}\big|_{u=\epsilon} \tag{37}$$

y la acción de contratérminos, que para una métrica plana en el borde

$$S_{CT}=\frac{m_p^3}{16\pi}\frac{6}{L}\int d^4x\;\;\sqrt{-\gamma}\big|_{u=\epsilon} \tag{38}$$

Para nuestra métrica

$$R=\frac{10}{3}\Lambda=-\frac{20}{L^2} \tag{39}$$

de modo que

$$R-2\Lambda=-\frac{8}{L^2} \tag{40}$$

Además

$$\begin{aligned}\sqrt{-\gamma} &= \left(\frac{r_0}{L}\right)^4\frac{1}{u^4}\sqrt{1-u^4}\\ \sqrt{-g} &= \left(\frac{r_0}{L}\right)^4\frac{L}{u^5}\\ n^u &= \sqrt{g^{uu}}=\frac{u}{L}\sqrt{1-u^4}\end{aligned} \tag{41}$$

Entonces

$$S_{EH}=\frac{m_p^3\beta V}{16\pi}\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{r_0}{L}\right)^4\left(\frac{1}{\epsilon^4}-1\right) \tag{42}$$

$$S_{GH}=-\frac{m_p^3\beta V}{16\pi}\left(\frac{8}{L}\right)\left(\frac{r_0}{L}\right)^4\left(\frac{1}{\epsilon^4}-\frac{1}{2}\right) \tag{43}$$

$$S_{CT}=\frac{m_p^3\beta V}{16\pi}\left(\frac{6}{L}\right)\left(\frac{r_0}{L}\right)^4\left(\frac{1}{\epsilon^4}-\frac{1}{2}\right) \tag{44}$$

So finally

$$S_{EH}+S_{GH}+S_{CT}=-\frac{m_p^3\beta V}{16\pi}\left(\frac{1}{L}\right)\left(\frac{r_0}{L}\right)^4 \tag{45}$$

que efectivamente reproduce la función de Massieu 36.

4. Plasmas fuera de equilibrio

Ahora podemos ver cómo $T^{\mu\nu}$ cambia cuando perturbamos la métrica de AdS. En los apéndices demostramos que la perturbación obedece la ecuación de Klein-Gordon no masiva. Eso sugiere que la parte relevante de la acción es simplemente

$$S = \frac{m_p^3}{16\pi} \int d^4x du \, \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu h_j^i \partial_\nu h_i^j \tag{46}$$

y la acción on-shell

$$S = \frac{m_p^3}{16\pi} \int d^4x \, \sqrt{-g} g^{uu} h_j^i \partial_u h_i^j \tag{47}$$

En realidad, sólo necesitamos la solución a primer orden en derivadas respecto al tiempo. La ecuación de KG

$$\left\{ \left(\frac{L}{r_0} \right)^2 u^2 \left[-\frac{1}{h} \partial_t^2 + \mathbf{\Delta} \right] + \frac{u^5}{L^2} \partial_u \frac{h}{u^3} \partial_u \right\} h_{ij} = 0 \tag{48}$$

Transformando Fourier

$$\left\{ \left(\frac{L}{r_0} \right)^2 u^2 \left[\frac{1}{h} \omega^2 - k^2 \right] + \frac{u^5}{L^2} \partial_u \frac{h}{u^3} \partial_u \right\} h_{ij} = 0 \tag{49}$$

Cuando $u \to 1$

$$\left\{ \left(\frac{L}{r_0} \right)^2 \left[\frac{\omega^2}{4\left(1-u\right)} - k^2 \right] + \frac{4}{L^2} \partial_u \left(1-u\right) \partial_u \right\} h_{ij} = 0 \tag{50}$$

Buscamos soluciones del tipo $\left(1-u\right)^\alpha$

$$\frac{4\alpha^2}{L^2} + \left(\frac{L}{r_0} \right)^2 \frac{\omega^2}{4} = 0 \tag{51}$$

o

$$\alpha = \pm i \frac{L^2 \omega}{4 r_0} = \pm i \frac{\omega}{4\pi T} \tag{52}$$

Buscamos la solución que describe ondas entrantes al horizonte (sin embargo, ver lo que dicen al respecto Dam T. Son y Andrei O. Starinets, Viscosity, Black Holes, and Quantum Field Theory, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 2007. 57:95–118). Cerca del horizonte, la métrica

$$ds^2 = -\left(\frac{r_0}{L} \right)^2 4\left(1-u\right) dt^2 + \frac{L^2 du^2}{4\left(1-u\right)} \tag{53}$$

de modo que las geodésicas nulas obedecen

$$-dt^2 + \left(\frac{L^2}{4r_0} \right)^2 \frac{du^2}{\left(1-u\right)^2} \tag{54}$$

Las coordenadas nulas son entonces

$$t \pm u^* \tag{55}$$

$$du^* = \left(\frac{L^2}{4r_0} \right) \frac{du}{\left(1-u\right)} \tag{56}$$

o sea que

$$u^* = \frac{-1}{4\pi T} \ln\left(1-u\right) \tag{57}$$

Una onda entrante corresponde a

$$f \propto e^{-i\omega(t-u^*)} = e^{-i\omega T} \ (1-u)^{-i\omega/4\pi T} \tag{58}$$

de modo que tenemos que quedarnos con el signo $-$.

Ahora buscamos la solución cerca de $u=0$. A primer orden en ω y k, la ecuación de KG se reduce a

$$\partial_u \frac{h}{u^3} \partial_u h_{ij} = 0 \tag{59}$$

de modo que tenemos dos soluciones, $h_{ij} =$ constante, y

$$\frac{dh_{ij}}{du} = C \frac{u^3}{1-u^4} \tag{60}$$

o sea

$$h_{ij} = -\frac{C}{4} \ln \left(1-u^4\right) \tag{61}$$

Nótese que la combinación

$$h_{ij} = h_{ij}(0) \left[1 - \frac{i\omega}{4\pi T} \ln \left(1-u^4\right)\right] \tag{62}$$

tiene el comportamiento asintótico correcto cuando $u \to 1$. Adoptaremos esta solución como la solución correcta a primer orden en ω y k.

Ahora podemos calcular la acción on-shell

$$\begin{aligned} S &= \frac{m_p^3}{16\pi} \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} \ |h_{ij}(\omega,k,u=0)|^2 \left(\frac{r_0}{L}\right)^4 \frac{1}{Lu^3} \left(1-u^4\right) \partial_u \left[-\frac{i\omega}{4\pi T} \ln \left(1-u^4\right)\right] \\ &= \frac{s}{4\pi} \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} \ |h_{ij}(\omega,k,u=0)|^2 \left[-i\omega\right] \end{aligned} \tag{63}$$

Si pudiéramos variar la acción respecto de uno sólo de los dos h's, obtendríamos una corrección a T^{μ}_{ν} de la forma que buscamos, con un coeficiente de viscosidad $\eta = s/4\pi$. Lamentablemente eso no ocurre, la acción on-shell es idénticamente cero por paridad. En la próxima sección vamos a hacer una propuesta acerca del origen del problema, y vamos a motivar una posible solución. Nuestra propuesta es una versión libre del análisis en C. Herzog y D. T. Son, Schwinger-Keldysh propagators from AdS/CFT correspondence, JHEP03(2003)046.

5. CTP AdS/CFT

Para superar el embrollo, vamos a tratar de conectar dos ideas aparentemente sin nada que ver entre sí. Una idea es que si pudiéramos *doblar los grados de libertad*, es decir, que si en vez de una expresión cuadrática en un solo campo $h^i_j \dot{h}^j_i$ tuviéramos una bilineal en dos campos $h'^i_j \dot{h}^j_i$ entonces la variación de la acción tendría sentido. La otra idea es que si ponemos una fluctuación de la métrica que depende del tiempo, el vector ∂_t no es más un vector de Killing, y el sistema se encuentra fuera de equilibrio. Resulta que efectivamente doblar los grados de libertad es una manera usual de tratar sistemas fuera de equilibrio, en lo que se conoce como *formalismo de Schwinger-Keldysh* (ver E. Calzetta y B-L. Hu, *Nonequilibrium quantum field theory*, Cambridge (2008)).

Vamos a empezar con un ejemplo. Nosotros sabemos que el elemento de matriz

$$\langle 0out| \, \Phi(x) \, |0in\rangle \tag{64}$$

se puede representar como una integral de camino

$$\langle 0out| \, \Phi(x) \, |0in\rangle = \int D\phi \ e^{iS[\phi]} \phi(x) \tag{65}$$

Ahora, si queremos calcular el valor medio

$$\langle 0in| \, \Phi(x) \, |0in\rangle \tag{66}$$

La integral de camino anterior no nos sirve. Sin embargo, podemos intercalar una representación de la identidad

$$\langle 0in|\,\Phi\,(x)\,|0in\rangle=\sum_{\alpha}\langle 0in|\alpha out\rangle\,\langle\alpha out|\,\Phi\,(x)\,|0in\rangle \tag{67}$$

Ahora podemos usar integrales de camino para cada bracket

$$\langle 0in|\,\Phi\,(x)\,|0in\rangle=\int D\phi_1 D\phi_2\ e^{i[S[\phi_1]-S^*[\phi_2]]}\phi_1\,(x) \tag{68}$$

Tenemos una representación en términos de dos historias, que se conectan entre sí por la condición de que ambas coinciden sobre alguna superficie de Cauchy en el futuro lejano. También las podemos pensar como una única historia en un *camino temporal cerrado* (*closed time path*, CTP) que va del pasado al futuro y vuelve. Nótese que también podríamos haber dicho

$$\langle 0in|\,\Phi\,(x)\,|0in\rangle=\int D\phi_1 D\phi_2\ e^{i[S[\phi_1]-S^*[\phi_2]]}\phi_2\,(x) \tag{69}$$

Eso indica que una vez que uno calculó todas las derivadas variacionales, hay que poner cada historia igual a la otra.

La idea de doblar los grados de libertad aparece también naturalmente en espacios con horizontes. Tomemos como ejemplo la cuña de Rindler. El espacio de Rindler cubre sólo la región $x\geq|t|$ de Minkowsky (la cuña derecha). También es posible definir coordenadas de Rindler en la cuña izquierda $x\leq-|t|$, ahora $\rho\leq 0$ y el tiempo va para atrás ($dt/d\tau<0$), como el tiempo en el segundo tramo del camino temporal cerrado. Es posible escribir el vacío de Minkowski en términos de estados con soporte en cada una de las cuñas, pero cuando uno lo hace obtiene un estado entrelazado (ver Birrell y Davies, *Quantum fields in curved space*, Cambridge, 1982). Un observador acelerado en la cuña derecha, que no puede ver lo que pasa en la izquierda, naturalmente va a tomar la traza sobre los estados con soporte en esa cuña, y en el proceso convierte al vacío de Minkowski en un estado mezclado (que es precisamente el estado térmico a la temperatura de Unruh).

La misma construcción se puede hacer en Schwarzchild, reemplazando las coordenadas de Rindler por las de Schwarzchild, y las de Minkowski por las de Kruskal, que nos permiten extender la variedad más allá de $r=0$ y de esa manera introducir la cuña izquierda .

Entonces nuestra propuesta es no considerar un AdS sino dos, cada uno con un borde pero compartiendo el horizonte. De esa manera tenemos dos historias, cada una con un valor independiente (pero identificamos los valores en los bordes *después* de haber tomado la variación de la acción) y una condición de macheo en el horizonte, por ejemplo que una onda entrante en un AdS se convierte en una onda saliente en el otro, con un conveniente cambio de fase. De esa manera es posible seguir usando métodos funcionales, aunque uno esté tratando con un sistema fuera de equilibrio.

6. Apéndice I: definiciones

Vamos a fijar nuestra notación. la conexión

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}=\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left[g_{\nu\lambda,\rho}+g_{\rho\lambda,\nu}-g_{\nu\rho,\lambda}\right] \tag{70}$$

$g_{\mu\nu;\rho}=0$, de manera que

$$g_{\mu\nu,\rho}=\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}g_{\lambda\nu}+\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}g_{\lambda\mu} \tag{71}$$

Además

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho\sqrt{-g}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\rho}=\Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho} \tag{72}$$

El tensor de Riemann

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}=\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho}-\Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma}+\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}-\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} \tag{73}$$

Vale que

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta;\gamma}+R^{\mu}_{\nu\beta\gamma;\alpha}+R^{\mu}_{\nu\gamma\alpha;\beta}=0 \tag{74}$$

El tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma} &= R^{\mu}_{\nu\mu\sigma} \\ &= \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\mu,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \end{aligned} \tag{75}$$

El escalar de curvatura

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{76}$$

Contrayendo 74

$$R_{\nu\beta;\gamma} + R^{\mu}_{\nu\beta\gamma;\mu} - R_{\nu\gamma;\beta} = 0 \tag{77}$$

Contrayendo con (ν, γ)

$$R^{\mu}_{\nu;\mu} - \frac{1}{2} R_{,\nu} = 0 \tag{78}$$

que es la identidad de Bianchi.

7. Apéndice: AdS

Consideramos la métrica

$$ds^2 = -a^2(z)\, dt^2 + b^2(z)\, \delta_{ij} dx^i dx^j + dz^2 \tag{79}$$

7.1. Conexión

Los elementos no nulos de la conexión son

$$\Gamma^{t}_{zt} = \frac{a'}{a} \tag{80}$$

$$\Gamma^{i}_{zj} = \frac{b'}{b}\delta_{ij} \tag{81}$$

$$\Gamma^{z}_{tt} = aa' \tag{82}$$

$$\Gamma^{z}_{ij} = -bb'\delta_{ij} \tag{83}$$

7.2. Riemann y Ricci

Una manera eficiente de calcular el tensor de Riemann es a partir de las 1-formas de conexión

$$\omega^{\mu}_{\nu} = \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} dx^{\rho} \tag{84}$$

Entonces

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} dx^{\rho} \wedge dx^{\sigma} = d\omega^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\lambda} \wedge \omega^{\lambda}_{\nu} \tag{85}$$

Las formas de conexión no nulas son

$$\begin{aligned} &\omega^{t}_{t} = \frac{a'}{a} dz;\ \omega^{t}_{z} = \frac{a'}{a} dt \\ &\omega^{i}_{j} = \frac{b'}{b}\delta_{ij} dz;\ \omega^{i}_{z} = \frac{b'}{b} dx^i \\ &\omega^{z}_{t} = aa' dt;\ \omega^{z}_{i} = -bb' dx^i \end{aligned} \tag{86}$$

las componentes no nulas del tensor de Riemann son

$$
\begin{aligned}
R^t_{ztz} &= -\left(\frac{a'}{a}\right)' - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \\
R^t_{itj} &= -\left(\frac{a'}{a}\right) bb'\delta_{ij} \\
R^z_{izj} &= -bb''\delta_{ij} \\
R^i_{jkl} &= -b'^2\left[\delta^i_k\delta_{jl} - \delta^i_l\delta_{jk}\right]
\end{aligned}
\tag{87}
$$

El tensor de Ricci

$$
\begin{aligned}
R_{tt} &= aa'' + 3\frac{a}{b}a'b' \\
R_{ij} &= -bb'' - 2b'^2 - \frac{b}{a}a'b' \\
R_{zz} &= -\frac{a''}{a} - 3\frac{b''}{b}
\end{aligned}
\tag{88}
$$

8. Apéndice: solución de las ecuaciones de Einstein

Recordemos que $R = (10/3)\,\Lambda$, y entonces debe ser $R_{\mu\nu} = (2/3)\,\Lambda g_{\mu\nu}$. Nuestras ecuaciones son

$$
\frac{a''}{a} + 3\frac{a'}{a}\frac{b'}{b} = \frac{b''}{b} + 2\left(\frac{b'}{b}\right)^2 + \frac{a'}{a}\frac{b'}{b} = \frac{a''}{a} + 3\frac{b''}{b} = -\frac{2}{3}\Lambda = \text{ constant}
\tag{89}
$$

Entonces

$$
\frac{b''}{b'} = \frac{a'}{a}
\tag{90}
$$

$$
\frac{1}{b}\frac{d}{db}b'^2 + 2\frac{b'^2}{b^2} = -2\frac{\Lambda}{3}
\tag{91}
$$

con la solución

$$
b'^2 = \frac{b_0}{b^2} - \frac{\Lambda}{6}b^2
\tag{92}
$$

Cuando $b_0 = 0$ recuperamos las coordenadas de Poincaré. Si no, llamamos $b = X^{1/2}$ y

$$
X'^2 = 4b_0 + \frac{2}{3}\left(-\Lambda\right)X^2
\tag{93}
$$

con solución

$$
X = \sqrt{\frac{6b_0}{\Lambda}}\cosh\left[\sqrt{\frac{-2\Lambda}{3}}\left(z - z_0\right)\right]
\tag{94}
$$

$$
a = c_0 b' = c_0\sqrt{\frac{b_0}{X} + \frac{(-\Lambda)}{6}X} = c_0\sqrt{\frac{-b_0}{X}}\sinh\left[\sqrt{\frac{-2\Lambda}{3}}\left(z - z_0\right)\right]
\tag{95}
$$

Para escribir la métrica en las coordenadas 25 necesitamos

$$
dz = \frac{-Ldu}{u\sqrt{1-u^4}}
\tag{96}
$$

con solución

$$
u = \frac{1}{\sqrt{\cosh\frac{2}{L}\left(z - z_0\right)}}
\tag{97}
$$

y las identificaciones

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{L} &= \sqrt{\frac{-2\Lambda}{3}} \\
\frac{r_0}{L} &= \left[\frac{6b_0}{\Lambda}\right]^{1/4} \\
c_0 &= \sqrt{\frac{6}{-\Lambda}}
\end{aligned} \tag{98}
$$

9. Apéndice: perturbaciones lineales

Ahora escribimos

$$
ds^2 = -a^2(z)\,dt^2 + b^2(z)\left[\delta_{ij} + h_{ij}\right]dx^i dx^j + dz^2 \tag{99}
$$

donde $h^i_i = h^i_{j,i} = 0$. La perturbación de la conexión es

$$
\begin{aligned}
&\delta\Gamma^t_{ij} = \frac{b^2}{2a^2}\dot{h}_{ij} \\
&\delta\Gamma^z_{ij} = -bb'h_{ij} - \frac{1}{2}b^2 h'_{ij} \\
&\delta\Gamma^i_{tj} = \frac{1}{2}\dot{h}_{ij}, \quad \delta\Gamma^i_{zj} = \frac{1}{2}h'_{ij} \text{ and } \delta\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\left[h_{ij,k} + h_{ik,j} - h_{jk,i}\right]
\end{aligned} \tag{100}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&\delta R_{\nu\sigma} = \delta R^{\mu}_{\nu\mu\sigma} \\
= \quad &\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\mu} + \left(\frac{a'}{a} + 3\frac{b'}{b}\right)\delta\Gamma^z_{\nu\sigma} - \delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}
\end{aligned} \tag{101}
$$

conduce a

$$
\begin{aligned}
&\delta R_{tt} = \delta R_{tz} = \delta R_{ti} = 0 \\
&\delta R_{zz} = \delta R_{zi} = 0 \\
&\delta R_{jk} = \frac{b^2}{2a^2}\ddot{h}_{jk} - \left[bb'h_{jk} + \frac{1}{2}b^2 h'_{jk}\right]' - \frac{1}{2}h_{jk,ii} \\
- \quad &\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}\right)\left[bb'h_{jk} + \frac{1}{2}b^2 h'_{jk}\right] + h'_{jk}bb'
\end{aligned} \tag{102}
$$

o bien (recordar que $a'/a = b''/b'$)

$$
\delta R_{jk} = -\frac{b^2}{2}\left\{\Box h_{jk} + 4\left(\frac{b''}{b} + \left(\frac{b'}{b}\right)^2\right)h_{jk}\right\} \tag{103}
$$

donde $\Box$ es el D'Alembertiano en la métrica de fondo. Debemos tener

$$
\delta R_{jk} = \frac{2}{3}b^2 h_{jk}\Lambda \tag{104}
$$

por lo tanto, usando las ecuaciones sin perturbar 89 encontramos que h_{jk} obedece la ecuación de Klein-Gordon sin masa

$$
\Box h_{jk} = \frac{-1}{a^2}\ddot{h}_{jk} + \frac{1}{ab^3}\partial_z\left[ab^3 h'_{jk}\right] + \frac{1}{b^2}\mathbf{\Delta}h_{jk} = 0 \tag{105}
$$