



I cannot appreciate to what extent the integration of the conservation laws is interesting from the point of view of physics. If that were the case, it might be possible to induce a physics journal to accept this limited part [...]. But for this, I must leave it to the physicists to judge the value. With my best wishes for 1926 and my best regards,
Your devoted, Emmy Noether

Carta de Emmy Noether a Albert Einstein

La formulación Lagrangiana de las ecuaciones relativistas es la base de la construcción usual de modelos de *teorías cuánticas de campos* (QFT). Del Lagrangiano que describe la teoría clásica pueden leerse ciertas simetrías que se preservarán al cuantizar. Además de la simetría ante transformaciones del grupo de Poincaré, los términos típicos de los Lagrangianos que estudiaremos presentan *simetrías internas*, es decir, simetrías ante cambios en los campos que no afectan a sus argumentos (el punto del espacio-tiempo del cual dependen). Las cantidades conservadas que se deducen de la simetría del Lagrangiano tendrán un rol importante a nivel cuántico como generadores de simetrías.

1. Preliminares: transformaciones de los campos inducidos por transformaciones en el espacio-tiempo

1 Considere un campo en un espacio de d dimensiones y la transformación:

$\phi \rightarrow \tilde{\phi}(x) = \phi(f(x))$ inducida por una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ del espacio-tiempo en sí mismo. Para fijar ideas, considere el caso particular:

(a) $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$, a^μ constante (traslación)

(b) $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$ con $\lambda > 0$ (dilatación)

(a) Muestre que la primera transformación en el campo ϕ puede obtenerse exponenciando el operador: $v \equiv a^\mu \partial_\mu$, en el sentido que:

$$\phi(x + \epsilon a) = e^{\epsilon a^\mu \partial_\mu} \phi(x) = \phi(x) + \epsilon a^\mu \partial_\mu \phi(x) + O(\epsilon^2)$$

(b) Muestre que en el segundo caso, $v \equiv x^\mu \partial_\mu$ siendo:

$$\phi(e^\epsilon x) = e^{\epsilon x^\mu \partial_\mu} \phi(x) = \phi(x) + \epsilon x^\mu \partial_\mu \phi(x) + O(\epsilon^2)$$

En ambos casos, el grupo de traslaciones y dilataciones está continuamente conectado con la transformación identidad. Y una transformación genérica en esos grupos se obtiene exponenciando una acción infinitesimal.

2 Lo anterior se generaliza a un operador $v = \xi^\mu \partial_\mu$ siendo ξ^μ funciones arbitrarias del espacio-tiempo. La transformación que induce en las coordenadas se suele denotar informalmente como:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon \xi^\mu$$

entendiendo que esto cale a primer orden. La transformación finita es de la forma:

$$x^\nu \rightarrow e^{\epsilon \xi^\mu \partial_\mu} x^\nu$$

Para relacionar esto con la guía anterior, considere el grupo de transformaciones conectado con la identidad que preserva la forma $g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$, siendo $g_{\mu\nu}$ una métrica que puede ser Euclídea o Lorentziana. Muestre que el ξ^μ correspondiente que aparece en el vector que genera la transformación es de la forma:

$$\xi^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

con los ω satisfaciendo

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

(con $\omega_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} \omega^\alpha{}_\nu$)

Esta forma de las transformaciones del grupo Euclideo o de Poincaré (según la signatura de g) a primer orden es mucho más práctica.

(Observación: es cuestión de gustos dejar el ϵ en forma explícita o meterlo dentro de los ω 's o a 's. Lo importante es notar que hay 10 parámetros independientes (o $D(D+1)/2$ en general)

2. Ecuaciones de Euler-Lagrange de distintos lagrangianos

- [3] Considere la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2$, con ϕ real.
 - (a) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange.
 - (b) Considere ahora la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$, donde ϕ ahora es un campo complejo. Note que ahora no está el factor $\frac{1}{2}$ en el término cinético y en el de masa. Escribiendo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, con ϕ_1 y ϕ_2 reales, obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para ϕ_1 y ϕ_2 y muestre que ambos cumplen la ecuación de Klein-Gordon.
 - (c) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange considerando ϕ y ϕ^* como variables independientes y verifique que obtiene las mismas ecuaciones de movimiento que en el inciso anterior.
- [4] Escriba la forma más general posible del Lagrangiano invariante de Lorentz para un campo cuadvectorial con a lo sumo dos derivadas y cuadrático en el campo. ¿A qué se reduce este Lagrangiano en el caso en que además se requiera invariancia ante transformaciones de gauge? Derive las ecuaciones de movimiento y compare con las de Maxwell.
- [5] Considere la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -i\psi \partial_t \psi^* - \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - V \psi \psi^*$$

para un campo ψ con V una función del espacio. Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para ψ y muestre que es la ecuación de Schrödinger, siendo V el potencial.

- [6] Si un lagrangiano es de la forma $L = \partial_\mu K^\mu$ (divergencia o derivada total), siendo K^μ una colección de funciones de los campos y sus derivadas, las ecuaciones de Euler-Lagrange se reducen a $0 = 0$.
 - (a) Verifique esto en el caso en que K^μ depende sólo de un campo (real o complejo) pero no de sus derivadas.

- (b) Considere el caso en que $K^\mu = \phi \partial^\mu \phi$. Para verificarlo en este caso, necesitará la forma de las ecuaciones de Euler-Lagrange para el caso en que el lagrangiano depende de derivadas de orden 2. Puede deducirlo de extremizar la acción.
- (c) Haciendo uso de esta idea, muestre que:

$$L = -\frac{1}{2}\phi \partial^\mu \partial_\mu \phi - \frac{1}{2}\phi^2$$

difiere en una derivada total del lagrangiano de KG real y por tanto da lugar a las mismas ecuaciones de movimiento.

- [7] Escriba el lagrangiano de Dirac y obtenga la ecuación de Dirac. verifique que las ecuaciones para ψ y $\bar{\psi}$ (tomando ambos como campos independientes) son equivalentes.
- [8] Se puede ver que el lagrangiano de Dirac de la tabla no es real. Muestre que el siguiente lagrangiano es real y es equivalente al anterior:

$$L = \frac{1}{2}\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\psi}i\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Recuerde que siempre se pueden elegir las matrices γ 's de forma tal que $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ y que dado que el Lagrangiano es un número, conjugar es equivalente a "daggar".

- [9] Considere la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

siendo $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange y muestre que corresponde a las ecuaciones de Maxwell de vacío.

3. Corrientes de Noether y simetrías

- [10] Como precalentamiento para obtener corrientes de Noether, considere un lagrangiano para una partícula libre no relativista/relativista.
- (a) En el caso de la partícula libre Newtoniana, halle la corriente (que es la carga en este caso) asociada a la simetría: $q_i \rightarrow q_i + Vt$. ¿Qué representa esta carga?
- (b) En el caso de la partícula relativista, su acción es: $S = m \int dt \sqrt{1 - |\dot{\vec{q}}|^2}$. Para simplificar, considere el caso unidimensional (en x) y la simetría ante boost en x . Tenga en cuenta que el tiempo es la variable del campo ahora y que la transformación del tiempo debe pensarse como una transformación en la función q . Halle la carga conservada.
- [11] Considere la densidad Lagrangiana del campo escalar complejo.
- (a) Halle las corrientes de Noether asociadas a la invariancia ante traslaciones espaciales y temporales.
- (b) Halle la expresión de la energía y el momento como integrales de ϕ y sus derivadas.
- (c) Escribiendo una solución genérica de la ecuación de Klein-Gordon en términos de ondas planas, reescriba las expresiones anteriores como integrales en los momentos espaciales.

- (d) Muestre que la energía es definida positiva para cualquier solución de la ecuación de Klein-Gordon, independientemente del signo de la frecuencia.
- 12 Considere la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* - V(\phi \phi^*)$, siendo V algún polinomio (acotado por debajo).
- (a) Halle la modificación que sufren las expresiones de la energía y momento del ejercicio anterior.
- (b) Encuentre la corriente y carga de Noether asociada a la simetría $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$, siendo α una constante real.
- 13 Considere ahora el Lagrangiano de un campo de Dirac con masa m .
- (a) Derive la ecuación de Dirac como ecuación de Euler-Lagrange de este Lagrangiano.
- (b) Halle la expresión de la energía y observe su carácter definido positivo o negativo en el subespacio de soluciones con frecuencia positiva y negativa respectivamente.
- 14 Halle la expresión de la carga conservada asociada a la invariancia ante rotaciones en el caso del Lagrangiano de Klein-Gordon y Dirac. En el último caso distinga la contribución a la carga conservada de la parte orbital e intrínseca (presencia o ausencia respectivamente de derivadas espaciales de los campos).
- 15 Considere ahora la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$$

siendo $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

- (a) Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange ahora con la presencia del término de masa. Muestre que para $m \neq 0$, las ecuaciones de movimiento implican $\partial_\mu A^\mu = 0$.
- (b) Halle la expresión de la energía. Para el caso $m = 0$ compare con la expresión conocida en términos del campo eléctrico y magnético (observe la relevancia del signo en el término de masa para el carácter definido positivo de la energía).
- (c) ¿Por qué se dice que el campo de Proca ($m \neq 0$) tiene tres grados de libertad mientras que el de Maxwell ($m = 0$) dos?
- 16 * La acción de Einstein-Hilbert está dada por

$$S = \kappa \int d^4x \sqrt{-g} R,$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo (curvo), R es el escalar de curvatura y κ es una constante proporcional a la inversa de la constante de Newton. En la aproximación de campo gravitatorio débil, la métrica puede escribirse como una perturbación pequeña de la métrica plana η

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} h_{\mu\nu}(x).$$

La perturbación $h_{\mu\nu}(x)$ es un tensor simétrico de rango dos. En esta aproximación, la acción de Einstein-Hilbert se convierte en una acción en espacio plano

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\sigma h_{\mu\nu} \partial^\sigma h^{\mu\nu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu} \partial^\nu h^{\mu\sigma} + \partial_\sigma h^{\mu\sigma} \partial_\mu h - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h \right),$$

con $h = h_{\mu}^{\mu}$. Derivar las ecuaciones de movimiento para $h_{\mu\nu}$. Estas son las *ecuaciones de Einstein linealizadas*. Mostrar que la teoría linealizada es invariante ante

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\Lambda_{\nu} + \partial_{\nu}\Lambda_{\mu} ,$$

donde $\Lambda_{\mu}(x)$ es un campo cuadvectorial arbitrario.