



In the course of teaching the subject to graduate students I have been struck by a number of occasions in which important conceptual issues are raised by questions in the classroom which requires a careful explanation not to be found in any of the readily available textbooks on quantum field theory. To give just an example of the sort of questions one encounter in the classroom setting: “Of the plethora of quantum fields introduced to describe the Nature at subatomic scale, why do so few (basically, only electromagnetism and gravity) have classical macroscopic correlates?”

Anthony Duncan, en “The Conceptual Framework of Quantum Field Theory”

En esta guía vamos a estudiar la cuantización de modelos de campos libres y estudiaremos algunos aspectos de ellos. En particular, vamos a explorar la relación general entre campos cuantizados y partículas, la noción de microcausalidad y su relación con la causalidad para los observables y la relación entre espín y estadística, entre otros aspectos.

Campo escalar

- 1 Considere la cuantización canónica de un campo de Klein-Gordon real de masa m .
 - (a) Usando la expresión $\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik^\mu x_\mu} \right)$, verifique que este operador local (dependiente de un punto del espacio tiempo) cumple la ecuación de Klein Gordon y que el campo es real (es absolutamente trivial, pero es bueno hacer ambas cuentas al menos una vez. Recuerde que el cuadrivector k en las exponenciales tiene como componente temporal a $k_0 = k^0 = \omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$)
 - (b) Utilizando las relaciones de conmutación entre $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$, obtenga las relaciones de conmutación entre los operadores de creación y destrucción.
- 2 **Espacio de estados.** A partir del estado de mínima energía (denominado *vacío* por su interpretación como estado desprovisto de partículas y denotado por $|0\rangle$) puede construirse todo el espacio de Hilbert mediante la acción de los operadores de creación. A fin de ver esto:
 - (a) Muestre que un estado de la forma $\prod_{i=1}^n \hat{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger |0\rangle$ es autoestado del Hamiltoniano y el operador momento con autovalores iguales a $\sum_{i=1}^n \omega_{\mathbf{k}_i}$ y $\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i$ respectivamente.
 - (b) Verifique que el estado anterior es autoestado del operador *número* definido como $\hat{N} = \int d^3\mathbf{k} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$ con autovalor n .
- 3 Un estado de la forma $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ puede considerarse como el estado de una partícula de cuádrimomento definido $(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$. Este tipo de estado no está en el espacio de Hilbert, como puede verse al calcular formalmente su norma. Esto es análogo a lo que ocurre en mecánica cuántica no relativista (ausencia de estados con momento definido; estos están fuera del Hilbert). Sin embargo, *suavizando* la expresión anterior con una función de los momentos espaciales que decaiga suficientemente rápido para momentos grandes, puede obtenerse un estado del espacio de Hilbert.

- (a) Considere ahora dos funciones de \mathbb{R}^3 f_1 y f_2 (pensadas como funciones de los momentos espaciales). Halle el producto interno entre los estados: $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} f_1(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ y $\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} f_2(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$. Expresé el resultado como una integral que involucre a f_1 y f_2 . (el factor $1/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$ podría absorberse en la definición de f pero se escribió así por razones que quedarán claras en el inciso siguiente)
- (b) Muestre que este producto es invariante de Lorentz. Es decir, que la integral anterior no se altera si se usa en vez de f una función compuesta con una transformación de Lorentz (ayuda: escriba la integral en los momentos espaciales como una integral en el cuadrimomento pesado con una δ que imponga la condición de *capa de masa*: $k^2 = m^2$).

Observación: pensado como una teoría de partículas, el producto interno en el Hilbert de n partículas (espacio de Fock) es análogo al de la mecánica cuántica no relativista, pero modificando la medida de integración $d^3\mathbf{k}$ por $\frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}}$.

- 4 El ejercicio anterior permite entender por qué en el enfoque riguroso el campo se trata como una funcional o distribución, siendo su argumento no un punto del espacio-tiempo sino una función de este último. La vinculación entre nuestro enfoque y el riguroso es a través de:

$$\hat{\phi}(f) = \int d^4x \hat{\phi}(x) f(x)$$

siendo f una función arbitraria del espacio-tiempo (con alguna propiedad de decaimiento en infinito). Para el caso de campos libres puede utilizarse una función del espacio solamente, de forma de mantener la dependencia del campo respecto al tiempo:

$$\hat{\phi}(t, h) \equiv \int d^3\mathbf{x} \hat{\phi}(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x})$$

Muestre que $\hat{\phi}(t, h) |0\rangle$ es un estado de una partícula con una distribución en el espacio de momentos pesada por la transformada de Fourier de h . Halle el producto interno entre dos de tales estados (para h y h') y de una condición sobre h, h' que garantice que las normas y el producto interno entre ellos tenga sentido (es decir, que no dé infinito)

- 5 **Dificultad para definir estados localizados** El objetivo de este problema es analizar en qué medida la teoría del campo escalar real libre, con masa distinta de cero, restringida a los estados de una partícula, puede ser considerada como una generalización relativista de la mecánica cuántica ordinaria en la que tengamos alguna función de onda espacial que nos de la probabilidad de hallar la partícula en una región espacial. Definamos el estado (no normalizable) $|t, \mathbf{x}\rangle := \hat{\phi}(t, \mathbf{x}) |0\rangle$ candidato a representar una partícula localizada en \mathbf{x} .

- (a) Muestre que $\langle t, \mathbf{x} | t, \mathbf{y} \rangle$ no es proporcional a la delta de Dirac. En efecto, ese producto no da cero para ninguna separación entre x e y finita. Esto invalida la interpretación de la etiqueta espacial \mathbf{x} del estado como la posición de la partícula.
- (b) Nada impide definir la función $\psi(t, \mathbf{x}) := \langle t, \mathbf{x} | \Psi \rangle$, con $|\Psi\rangle \in H_1$, pero la no ortogonalidad de los estados $|\mathbf{x}\rangle$ impedirá expresar $\langle \Psi | \Psi \rangle$ como $\int \psi(t, \mathbf{x})^* \psi(t, \mathbf{x}) d^3x$. Muestre que más bien vale la siguiente igualdad:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 2 \int \psi(t, \mathbf{x})^* (-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}} \psi(t, \mathbf{x}) d^3x$$

$(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}}$ es un operador definido como la raíz positiva de $(-\Delta + m^2)$ y resulta ser *no local*. Es decir, pese a su aparición en la integral, el operador necesita información global de la función en la que actúa. Para mostrar esta igualdad, exprese cada función en sus modos de Fourier.

Pese a esta dificultad, tenemos de todas formas una noción de densidad de probabilidad en el espacio de momentos, como hemos visto antes.

Observación: como se verá en el próximo ejercicio, el producto del primer inciso puede considerarse cero si la separación entre las etiquetas $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ es mayor a $1/m$ el producto interno entre estados puede aproximarse como cero. Al restaurar unidades, $1/m$ es longitud de Compton ($\frac{\hbar}{mc}$). Este resultado ejemplifica los límites dentro de los cuales puede definirse la noción de localización en una teoría relativista.

6 El valor de expectación del campo en el vacío es igual a cero. Sin embargo, el hecho de que el vacío es un estado no trivial se manifiesta en el valor expectación en vacío no nulo de productos de campos, evaluados en n puntos del espacio-tiempo diferentes $\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) | 0 \rangle$. A estos valores de expectación se los denomina *funciones de n-puntos*, siendo funciones de los n -puntos del espacio tiempo x_1, \dots, x_n . Estas funciones de n -puntos (para n par) se pueden descomponer en productos de funciones de dos puntos (en teorías libres).

- (a) Calcule formalmente la expresión de $\langle 0 | \hat{\phi}(\mathbf{x}, 0) \hat{\phi}(\mathbf{y}, 0) | 0 \rangle$, dejándola expresada como una integral en una sola variable y muestre que no es posible que la integral sea cero trabajando la expresión a fin de relacionarla con funciones de Bessel modificadas. Observe que el resultado es distinto de cero y apreciable para distancias menores que m (al restaurar unidades, esta es longitud de Compton $\frac{\hbar}{mc}$). Esto responde lo que quedo pendiente en el ejercicio anterior.
- (b) Halle análogamente la expresión de la función de dos puntos $\langle 0 | \hat{\phi}(\mathbf{x}, t_1) \hat{\phi}(\mathbf{x}, t_2) | 0 \rangle$ (es decir, la función a puntos espaciales iguales y tiempos distintos).

7 Los operadores de creación y destrucción actúan en un espacio de Hilbert (un espacio de Fock), que contiene un estado aniquilado por los de destrucción (el estado de vacío). Las transformaciones de Poincaré $x \rightarrow \Lambda x + a$ forman un grupo de simetrías de la teoría cuántica y por tanto cada transformación de este grupo tiene un operador unitario asociado que actúa en ese espacio de Hilbert. Como es usual en el picture de Heisenberg, estos operadores actúan en los campos de operadores de la siguiente forma: $\hat{\phi}(x) \rightarrow U(\Lambda, a) \hat{\phi}(x) U^\dagger(\Lambda, a) = \hat{\phi}(\Lambda x + a)$

- (a) Escriba la expresión de los operadores $U(1, a)$ asociados a una traslación espacio-temporal de parametro a^μ en términos de los operadores de creación y destrucción.
- (b) ¿Cómo construiría los operadores unitarios asociados a boost y rotaciones? No se espera que halle su expresión sino que indique la manera de encontrarlos.
- (c) Verifique que $U(\Lambda, a) \hat{\phi}(x) U^\dagger(\Lambda, a) = \hat{\phi}(\Lambda x + a)$ para el caso de una traslación pura y a primer orden en el parámetro a .
- (d) Usando que el vacío es aniquilado por el operador de destrucción, argumente por qué espera que el vacío sea invariante de Poincaré en base a la forma general que espera que tengan los operadores unitarios $U(\Lambda, a)$.

8 Verifique la invariancia de Poincaré de la función de dos puntos para dos puntos x e y arbitrarios.

- (a) Observando la expresión resultante como integral en los momentos espaciales y usando la invariancia de la medida de integración.
- (b) Usando la forma en que transforman los operadores de campo

$$\hat{\phi}(\Lambda x + a) = U(\Lambda, a) \hat{\phi}(x) U^\dagger(\Lambda, a)$$

y la invariancia del vacío ante una transformación de Poincaré.

- (c) Concluya entonces que la función de dos puntos sólo depende del valor de la distancia Minkowskiana $(x-y)^2$ (y además del signo de $t_2 - t_1$ en el caso en que están temporalmente separados), mostrando comportamientos cualitativamente diferentes según si la distancia es espacial o temporal.

9 Condición de microcausalidad. Considere un campo de Klein Gordon neutro. Muestre que el conmutador $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ es un número complejo (es decir, un múltiplo del operador identidad) y por tanto es igual a su valor de expectación en vacío (o cualquier estado). A partir de esta observación y los resultados anteriores, muestre que el conmutador es cero para x e y espacialmente separados, es decir para $(x - y)^2 < 0$. ¿Por qué no puede decir lo mismo cuando están temporalmente separados? (observación: note que para el caso del campo escalar complejo, los conmutadores entre $\hat{\phi}$ y $\hat{\phi}^\dagger$ serán idénticamente cero).

10 Idea de demostración del teorema espín-estadística. Considere el campo escalar neutro y suponga ahora que los operadores de creación y aniquilación satisfacen reglas de anti-conmutación. Muestre que el anticonmutador de los campos es diferente de cero para puntos espacialmente separados. (Sugerencia: considere los puntos x e y a tiempos iguales, escriba la expresión como un integral en los momentos y muestre que no es posible que la integral sea cero trabajando la expresión a fin de relacionarla con funciones de Bessel modificadas). Piense por qué esta condición de conmutación implica que los estados en el espacio de Fock serán simétricos ante permutación de partículas.

11 Para el caso del campo escalar complejo, hay una cantidad conservada asociada a la invariancia ante multiplicar el campo por una fase. Halle la expresión de esta a nivel cuántico y muestre que este operador cuenta el número de partículas creadas por a^\dagger menos el número de partículas creadas por b^\dagger .

12 Propagador del oscilador armónico cuántico. El propagador es una cantidad que será relevante para la expresión de la matriz de Scattering cuando se introduzcan interacciones. Considere la cuantización canónica de un oscilador armónico unidimensional X de frecuencia ω (y masa $m = 1$ por simplicidad).

- (a) Calcule la función de dos variables $\langle 0 | \hat{X}(t_1) \hat{X}(t_2) | 0 \rangle$ siendo \hat{X} el operador posición en la representación de Heisenberg, t_1 y t_2 dos instantes arbitrarios y $|0\rangle$ el estado de vacío.
- (b) Muestre que la función $i \langle 0 | T(\hat{X}(t_1) \hat{X}(t_2)) | 0 \rangle$ (donde $T(\dots)$ significa que los operadores dentro del paréntesis deben estar ordenados temporalmente) es una función de Green del operador diferencial $\partial_t^2 + \omega^2$.

13 Propagador del campo escalar

- (a) Exprese

$$D(x - y) \equiv \langle 0 | T(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y)) | 0 \rangle$$

como una suma de dos funciones de dos puntos pesadas adecuadamente (en el caso del campo neutro, la expresión final es la misma).

- (b) Exprese el resultado como la transformada de Fourier de

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

Muestre esto mediante integrales en el plano complejo, en caminos que esquiven los polos dados por ϵ , ubicados en distintos lugares según sea ϵ positivo o negativo.

- (c) Muestre que se cumple $(\square_x + m^2)D(x - y) = -i\delta^4(x - y)$.

Campo de Dirac

14 Considere

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ipx} + \hat{d}_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ipx} \right].$$

Verificar que $\hat{\psi}(x)$ es una solución de la ecuación de Dirac. Demostrar además que si $\{\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}'}^{\dagger}\} = \{\hat{d}_{\mathbf{p}}^{\dagger}, \hat{d}_{\mathbf{p}'}\} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta_{rs}$ (y todos los otros nulos) entonces

$$\{\hat{\psi}_a(0, \mathbf{x}), \hat{\psi}_b^{\dagger}(0, \mathbf{y})\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ab}.$$

- 15 Exprese las cargas conservadas asociadas a invariancia ante traslaciones espacio temporales en términos de operadores de creación y destrucción.
- 16 **Conexión espín-estadística.** Halle \hat{H} pero ahora usando reglas de conmutación entre los b y d (como las del campo escalar complejo) y muestre que el operador no es definido positivo (este fue uno de los primeros indicios que encontró Pauli del teorema Espín-Estadística).
- 17 Halle la carga conservada asociada a la simetría $U(1)$ global: $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$. Muestre que los autovalores de esta carga son opuestos para los estados de 1-partícula creados por \hat{b}^{\dagger} y \hat{d}^{\dagger} .
- 18 Escriba la expresión clásica de la carga conservada asociada a la simetría de rotación e identifique la parte que genera la rotación intrínseca del espinor. Halle su versión cuántica y verifique que un estado de la forma $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle$ o $\hat{d}_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle$ transforma como un objeto de espín $\frac{1}{2}$ ante rotaciones.
- 19 Una transformación de Poincaré dada por (Λ, a) tiene asociado un operador unitario que actúa en el campo de Dirac de la siguiente forma:

$$U^{\dagger}(\Lambda, a)\psi_i(x)U(\Lambda, a) = S_{ij}(\Lambda^{-1})\psi_j(\Lambda x + a)$$

siendo S la matriz que aparece en la transformación de un espinor de Dirac. Muestre a partir de esto que las funciones de dos puntos resultan invariantes ante traslaciones espacio-temporales pero no necesariamente ante transformaciones de Lorentz.

- 20 Mostrar que:

$$\{\psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(y)\} = (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta}\Delta(x - y)$$

siendo $\Delta(x - y)$ el conmutador analogo en el caso del campo de Klein-Gordon. Muestre que este se anula para puntos x, y espacialmente separados.

- 21 Considere la función de 2-puntos ordenada temporalmente $S_{\alpha\beta}(x - y) \equiv \langle 0 | T(\psi_{\alpha}(x)\bar{\psi}_{\beta}(y)) | 0 \rangle$
 - (a) Muestre que $S_{\alpha\beta}(x - y) = (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta}\Delta_F(x - y)$, siendo $\Delta_F(x - y)$ el propagador de Feynman del campo de Klein Gordon.
 - (b) Halle la expresión integral en el espacio de momentos del propagador.

- 22 * **Violación de la Condición de Energía Débil.** En la teoría de campos clásica vimos que tanto la energía total como la densidad de energía son positivas. En teoría cuántica de campos la energía total es positiva pero la sustracción de la energía de vacío (orden normal) hace que la densidad de energía no tenga signo definido. En este ejercicio les proponemos que encuentren algún estado para el cual el valor de expectación de la densidad de energía, que será una función del espacio-tiempo, sea negativo para algunas regiones del espacio-tiempo.

Que la densidad de energía no sea positiva viola la denominada Weak Energy Condition (WEC), que dice que todo observador ve una densidad de energía positiva. La WEC forma parte de un conjunto de desigualdades que uno impone sobre la materia (sobre $T^{\mu\nu}$) y sirven para probar teoremas en relatividad general (como los teoremas de singularidades) y para que las geometrías que aparecen como soluciones de las ecuaciones de Einstein sean físicamente razonables. En las teorías cuánticas todas esas condiciones de energía se violan, ¿pero en qué grado? Esa información se codifica en lo que se conocen como *desigualdades cuánticas de energía*. Si les interesa leer más sobre este tema pueden mirar por ejemplo el review “Lectures on quantum energy inequalities”, de C. J. Fewster (<https://arxiv.org/abs/1208.5399>).