Temas de Mecánica Cuántica

Primer Cuatrimestre 2025

Guía 0: Repaso para Información Cuántica

I. Repaso sistemas compuestos

P1 (a) Sean $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$, y $w = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Diga entonces a qué espacio pertenece $v \otimes w$ y escriba su expresión en la base canónica.

(b) Sea $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert $\mathscr{H}_1$ de dimensión 2 y sea $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$ la de un espacio $\mathscr{H}_2$ de dimensión 3. Considere además los estados

$$|\Psi\rangle = \alpha |\phi_1\rangle + \beta |\phi_2\rangle, \ |\Psi\rangle \in \mathscr{H}_1, \qquad \text{y} \qquad |\Phi\rangle = a |\varphi_1\rangle + b |\varphi_2\rangle + c |\varphi_3\rangle, \ |\Phi\rangle \in \mathscr{H}_2.$$

Escriba entonces $|\Psi\rangle \otimes |\Phi\rangle \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. Encuentre además la expresión matricial de este estado en la base producto $\{|\phi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle\}$.

(c) Sean una partícula de spin ½ y otra de spin 1, cuyos espacios de Hilbert respectivos son $\mathscr{H}_{1/2}$ y $\mathscr{H}_1$. Los operadores de spin en la dirección x se escriben, en las respectivas bases de autoestados de spin en la dirección z, como

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(para spin ½)}, \qquad \text{y} \qquad L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(para spin 1)}.$$

Escriba la representación matricial del operador $S_x \otimes L_x$ en la base producto de autoestados de spin en la dirección z.

P2 **Base producto y base de Bell.** Considere un sistema compuesto de dos partes, que denotamos A y B, cada una de las cuales tiene un espacio de estados de dimensión 2. Sea $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ una base ortonormal de estados de A y $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$ análogamente para B. Asimismo, sean σ_i^A y σ_i^B $(i = x, y, z)$ observables sobre cada uno de los subsistemas, cuyas representaciones matriciales en estas bases están dadas por las matrices de Pauli, de forma tal que $|0\rangle_A$ y $|1\rangle_A$ son autoestados de σ_z^A con autovalor $+1$ y -1, respectivamente (y análogamente para B).

(a) Considere el conjuntos de observables sobre el sistema compuesto: $\{\sigma_z^A \otimes \mathbb{I}^B, \mathbb{I}^A \otimes \sigma_z^B\}$. Muestre que forman conjunto completo de observables que conmutan y encuentre una base común de autoestados. ¿Qué propiedad satisfacen los elementos de esta base?

(b) Considere el conjuntos de observables sobre el sistema compuesto: $\{\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B, \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B\}$. Muestre que forman conjunto completo de observables que conmutan y encuentre una base común de autoestados. ¿Qué propiedad satisfacen los elementos de esta base?

(c) Considere los operadores $\sigma_x^A \otimes \sigma_z^B$ y $\sigma_z^A \otimes \sigma_x^B$. Diga si forman un CCOC y en ese caso encuentre la base comun de autoestados.

P3 **Base de Bell.** Considere los siguientes estados de un sistema compuesto por dos subsistemas de dimensión 2 (donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ son los autoestados de σ_z con autovalor ± 1, respectivamente):

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle), \qquad |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle),$$

que conforman la comúnmente denominada *base de Bell*.

(a) Calcule las probabilidades de los posibles resultados de la medición de un observable cualquiera sobre el primer subsistema. Análogamente calcule las probabilidades para mediciones arbitrarias sobre el segundo subsistema.

(b) Calcule el valor medio de los operadores de la forma $\sigma_j \otimes \sigma_k$ para $j, k = x, y, z$ en cada uno de los estados de Bell.

P4 Suponga que se prepara a un sistema de dos spins en el estado de Bell $|\Psi^-\rangle$ (también llamado estado singlete) y que ambas partículas son llevadas a laboratorios distantes (llamados A y B) de modo tal que el estado del conjunto A, B no se modifica durante el viaje. Suponga que en el laboratorio A se mide el observable $\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ y en el laboratorio B se mide $\sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \hat{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

(a) Calcule las probablidades $\text{Prob}(\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \pm 1)$, $\text{Prob}(\sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \pm 1)$ (probablidades para cada subsistema); $\text{Prob}(\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \pm 1, \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \pm 1)$ $\text{Prob}(\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \mp 1, \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \pm 1)$ (probabilidades conjuntas).

(b) Calcula la función de correlación entre los resultados obtenidos en A y B, definida como $K(A, B) =: \left\langle \sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} \otimes \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} \right\rangle - \langle \sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} \rangle \left\langle \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} \right\rangle$.

(c) Repita el cálculo de la función de correlación para los otros estados de Bell. ¿Cuáles son las diferencias y cuáles las similitudes entre ambos resultados?. Interprete.

II. Repaso Matriz densidad

P5 Para los siguientes sistemas de spin ½, escriba el operador densidad ρ y su representación matricial en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de autoestados de S_z.

(a) Un haz completamente polarizado con S_z+ (es decir en el autoestado $+\hbar/2$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$).

(b) Un haz completamente polarizado con S_x+ (es decir en el autoestado $+\hbar/2$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$).

(c) Un haz parcialmente polarizado, formado por una mezcla estadística incoherente con 75% de S_z+ y 25% de S_z-.

(d) Un haz parcialmente polarizado, formado por una mezcla estadística incoherente con 75% de S_z+ y 25% de S_x+.

(e) Un haz no polarizado, formado por una mezcla estadística incoherente de S_x+ y S_x- en igual cantidad (50%).

Para cada uno de estos casos calcule los valores medios $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ y $\langle S_z \rangle$.

P6 **Pureza.** Sea ρ la matriz densidad que representa el estado de un sistema cuántico. Se llama *pureza* del estado ρ a la cantidad $\text{tr}\left(\rho^2\right)$.

(a) Mostrar que $\frac{1}{D} \leq \text{tr}\left(\rho^2\right) \leq 1$, donde D es la dimensión del espacio de Hilbert.

(b) Muestre que si el estado es puro, entonces $\rho^2 = \rho$ y por lo tanto la pureza es máxima, $\text{tr}\left(\rho^2\right) = 1$. Muestre que vale también la vuelta, es decir que si la pureza es máxima, $\text{tr}\left(\rho^2\right) = 1$, entonces necesariamente ρ es un estado puro.

(c) Mostrar que para un estado mixto, $\text{tr}\left(\rho^2\right) < 1$.

(d) Se llama *estado máximamente mixto* al estado $\rho = \frac{1}{D}\mathbb{I}$. Verifique que esta definición satisface todas las condiciones necesarias para ser un estado cuántico. Muestre que el estado máximamente mixto tiene pureza mínima, $\text{tr}\left(\rho^2\right) = 1/D$.

P7 Considere un sistema de spin ½. Para cada uno de los siguientes estados calcule la pureza, y los valores medios del spin en las tres direcciones cartesianas. Para el caso en que el estado es puro, encuentre el estado $|\psi\rangle$ tal que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

(a) $\rho = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right)$,

(b) $\rho = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right)$,

(c) $\rho = \frac{9}{10}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{3}{10}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \frac{3}{10}|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{10}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$,

(d) $\rho = \frac{1}{3}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{2}{3}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$,

(e) $\rho = \frac{8}{10}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{3}{10}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \frac{3}{10}|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{2}{10}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$,

donde $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ son los autoestados de σ_z con autovalor ± 1 respectivamente.

P8 **Esfera de Bloch.** Considere un sistema de spin ½.

(a) Muestre que la matriz densidad se puede siempre escribir en la forma

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right),$$

donde $\mathbb{I}$ es el operador identidad, y $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^3$. (Sugerencia: use los resultados ya mostrados en las guías anteriores; en particular use que el operador hermítico más general posible en dimensión 2 es de la forma $A = a_0\mathbb{I} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, con $a_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$).

(b) Calcule la pureza de ρ y encuentre cómo se relaciona con $\boldsymbol{P}$. En particular, ¿qué satisface $\boldsymbol{P}$ si el estado es puro? ¿y si es mixto? Relacione esto con la representación en la esfera de Bloch para estados de spin ½. (Ayuda: recordar las propiedades que satisfacen las matrices de Pauli)

(c) Calcule $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$. ¿Cuál es la interpretación física de $\boldsymbol{P}$?

(d) Suponga que se sabe que se tiene un ensamble de spin ½ en un estado puro y suponga que se mide $\langle S_z\rangle$ y $\langle S_x\rangle$. ¿Puede terminar unívocamente el estado del sistema? ¿Cuánto vale $\langle S_y\rangle$? Si ahora en cambio el sistema puede estar en un estado mixto, ¿basta con conocer $\langle S_z\rangle$ y $\langle S_x\rangle$ para determinar el estado del sistema?