Temas de Mecánica Cuántica

Primer Cuatrimestre 2025

Guía 1: Información Cuántica

P1 **Teleportación por un canal clásico.** Es interesante preguntarse cuan bien es posible aproximarse al protocolo de teleportación utilizando únicamente un canal clásico, es decir, sólo por medio de comunicación clásica y operaciones locales. Para ello podemos utilizar como figura de mérito la fidelidad. En este caso si el estado que se desea transmitir es $|\psi\rangle$, pero se produce el estado ρ entonces:

$$F = \langle\psi|\,\rho\,|\psi\rangle$$

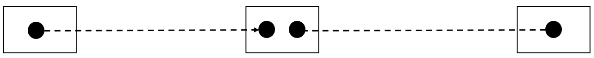
Esta cantidad básicamente nos da la probabilidad de medir $|\psi\rangle$ sobre el estado teleportado.

(a) Considere que se desea teleportar el estado $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$, y la estrategia es tal que Alice realiza una medición del observable σ_z y le comunica el resultado a Bob. ¿Cuál es la fidelidad promedio del qubit teleportado?

(b) Halle la fidelidad promedio sobre todos los estados puros y muestre que $\bar{F} = \frac{2}{3}$. *Ayuda:* considere $\alpha = \cos(\theta/2)$ y $\beta = \sin(\theta/2)e^{i\phi}$ e integre sobre la superficie de la esfera de Bloch. Puede usar que $\int_0^\pi d\theta\cos(\theta/2)^4\sin(\theta) = \int_0^\pi d\theta\sin(\theta/2)^4\sin(\theta) = 2/3$.

(c) ¿Cuál es la fidelidad máxima que puede alcanzar si no hay comunicación y Bob sólo trata de adivinar el estado?

P2 **Intercambio de entrelazamiento.** (Entanglement swapping) ¿Pueden entrelazarse sistemas que nunca han interactuado? El objetivo del protocolo es inducir este entrelazamiento. Considere dos laboratorios distantes, A y B, y uno intermedio C. Inicialmente, en cada laboratorio A y B existe un estado máximamente entrelazado de dos qubits. Luego, desde cada laboratorio se envía hacia C una partícula perteneciente al par entrelazado. Muestre que si en el laboratorio C se realiza una medición de Bell sobre esas partículas es posible lograr que las partículas restantes, que se encuentran en los laboratorios A y B, finalicen en un estado máximamente entrelazado. ¿Por qué resulta necesario enviar información clásica a alguno de los laboratorios si posteriormente desean usar ese estado en algún protocolo de comunicación?



P3 **El problema del rey malo** (Aharonov): Un físico naufraga y llega a una isla que, desgraciadamente para él, resulta estar llena de físicos. Allí gobierna un rey que decide eliminar al náufrago a menos que éste sea capaz de resolver el siguiente desafío: "Deberás preparar una partícula de spin 1/2 y entregármela. Yo realizaré sobre ella un experimento que consistirá en medir alguna de las tres componentes cartesianas (x, y, z) de su spin. Luego te devolveré la partícula para que la analices. Tú podrás hacer todos los experimentos que desees. Cuando hayas concluido, yo te diré cuál fue mi experimento y tú deberás decirme cuál fue su resultado." ¿Es posible que el físico salve su vida? ¿Cuál es su probabilidad de supervivencia?

Elegir alguna de las siguientes opciones, o proponer otra, para lograr que el físico siempre pueda acertar la adivinanza:

Forma de solución #1: tal vez la vida del físico depende de que pueda preparar el estado inicial $(|01\rangle_y + |10\rangle_y)/\sqrt{2}$.

Forma de solución #2: alternativamente, puede depender de que sea capaz de encontrar una base de dos qubits en la que cada vector sea ortogonal a otros tres vectores, asociados a los distintos resultados que el rey puede obtener.

Obs: si el físico no apela al entrelazamiento, su probabilidad de sobrevivir no puede ser igual a 1 (pero no es trivial probar esto... en cambio, sí es fácil ver que, preparando un estado en z y midiendo en x, la probabilidad es de 5/6).

P4 **Teleportación y codificación superdensa en sistemas de dimensión arbitraria d:** Considere que se desea teleportar el estado de un sistema cuántico de dimensión d. Para ello comparten un estado máximamente entrelazado de la forma:

$$\left|\Psi^{00}\right\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} |j\rangle_A |j\rangle_B$$

donde los estados $\{|j\rangle\}$ forman una base ortonormal completa para Alice y Bob. Alice desea teleportar un estado arbitrario

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i |i\rangle$$

Para ello aplica el protocolo de teleportación midiendo en una base análoga a la de Bell que tiene d^2 elementos

$$|\Psi^{nm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} e^{i2\pi jn/d} \; |j\rangle \, |(j+m) \bmod d\rangle \,, \quad n, m = 0, \ldots, d-1$$

(a) Muestre que luego de la medición de Alice, que tuvo como resultado n, m, el estado de Bob se encuentra en:

$$|\Psi\rangle_B \propto \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j e^{-i2\pi jn/d} \; |(j+m) \bmod d\rangle_B$$

(b) Una vez que Alice le comunica el resultado de la medición, Bob debe aplicar una transformación unitaria para finalmente preparar el estado $|\psi\rangle$. Obtenga la transformación unitaria U_{nm}.

(c) Considere ahora un protocolo de código superdenso utilizando como recurso un par de qudits en el estado $\left|\Psi^{00}\right\rangle$. ¿Cuántos bits de información clásica puede enviar A a B al mandar su partícula cuántica?

P5 (a) Dada una base ortonormal $B = \{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ de estados de 1 qubit, diseñar un circuito que copie los estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, o sea que mapee: $|\psi_i\rangle |0\rangle \to |\psi_i\rangle |\psi_i\rangle$ $(i = 1, 2)$.
Ayuda: usar $CNOT$ y la operación de cambio de la base computacional a la base B.

(b) Mostrar que si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son distintos pero no son ortogonales, no es posible hallar un operador unitario U que realice la operación descripta en el punto a).
Ayuda: Los operadores unitarios preservan el producto interno.

(c) Usando la linealidad de la mecánica cuántica, mostrar que por medio de evoluciones no unitarias (que por ejemplo involucren mediciones) tampoco es posible realizar esa operación con estados arbitrarios.

(d) Mostrar que un aparato capaz de distinguir entre dos estados arbitrarios conocidos $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ permitiría realizar la operación de "clonación" descripta, y que, a su vez, un aparato capaz de clonar permitiría distinguir entre esos dos estados.

P6 **Transformaciones LOCC sobre el estado máximamente entrelazado.** Para el caso de dos qubits. Veremos cómo, mediante LOCC, es posible transformar determinísticamente un estado máximamente entrelazado

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

en otro estado puro arbitrario, que podemos escribir en su base de Schmidt como:

$$|\phi\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |11\rangle$$

Considere que la notación es tal que a izquierda nos referimos al estado de Alice y a derecha al estado de Bob. Para ello:

(a) Alice agrega una ancilla en el estado $|0\rangle$ y realiza una operación unitaria sobre sus partículas de forma tal que $|00\rangle \to \alpha |00\rangle + \beta |11\rangle$; $|01\rangle \to \beta |01\rangle + \alpha |10\rangle$. ¿Cuál es el estado resultante?

(b) Luego Alice realiza una medición local sobre la ancilla. ¿Cómo deberían proceder para obtener el estado deseado?

(c) Dado que cualquier estado mixto puede representarse como: $\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$, ¿cómo se podría transformar el estado $|\psi_+\rangle$ en cualquier estado mixto mediante LOCC?

P7 Dados los estados

$$|\phi_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\ |00\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}\ |11\rangle \quad \text{y} \quad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|00\rangle + \sqrt{\frac{2}{6}}\ |01\rangle + \sqrt{\frac{3}{6}}|11\rangle$$

¿Es posible realizar una transformación determinista usando LOCC tal que $|\phi_1\rangle \to |\phi_2\rangle$?

P8 **Entrelazamiento del estado de Werner y teleportación ruidosa**. Considere un estado tipo Werner:

$$r\ |\psi_-\rangle\langle\psi_-| + (1-r)\ \frac{\mathbb{I}}{4}$$

(a) Calcule la pureza del estado. Verifique, mediante el criterio PPT, que el estado de Werner es entrelazado para $r > 1/3$.

(b) Considere ahora el protocolo de teleportación donde Alice y Bob comparten un estado de Werner. Utilice los resultados del primer ejercicio de esta guía y obtenga la fidelidad promedio del estado teleportado. ¿Para qué valores de r se observa una mejora respecto al protocolo clásico?

P9 Dada una partícula de spin 1/2, a la que llamamos A, considerar el POVM definido por los cuatro operadores positivos: $M_1 = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow|_z, M_2 = \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|_z$, $M_3 = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow|_x, M_4 = \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|_x$. Las probabilidades asociadas a los distintos resultados son $p_i = \mathrm{tr}(\rho M_i)$, con ρ el estado de la partícula.

Mostrar que, si se introduce una partícula auxiliar B, de spin 1/2 y en un estado completamente mixto, el POVM mencionado puede realizarse por medio de una medición de von Neumann en una base ortonormal $\mathcal{B}$ del sistema de dos partículas. Encontrar además cuál es la operación de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base computacional de dos qubits.

Ayuda: dada una medición con proyectores P_i del sistema compuesto, las probabilidades están dadas por: $p'_i = \mathrm{tr}_{A,B}[(\rho\otimes\frac{\mathbb{I}}{2})P_i]$. Encontrar los proyectores P_i tales que, si se traza primero sobre el subsistema auxiliar según: $p'_i = \mathrm{tr}_A[\rho\ \ \mathrm{tr}_B(\frac{\mathbb{I}}{2}P_i)]$, se obtiene para la partícula A el POVM deseado.

P10 **Información mutua cuántica.** Las correlaciones en un estado bipartito pueden cuantificarse con la "información mutua"

$$I(\rho) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}),$$

donde $\rho_{A,B}$ son las matrices densidad reducidas y S es la entropía de von Neumann. Por otra parte, la "entropía relativa" $S(\rho||\sigma) = \mathrm{tr}\{\rho\log\rho - \rho\log\sigma\}$ es una medida de la distinguibilidad entre estados cuánticos (un poco extraña porque puede diverger).

(a) Mostrar que $S(\rho||\sigma) \neq S(\sigma||\rho)$ (un ejemplo basta).

(b) Mostrar que:

$$I(\rho) = S(\rho||\rho_A\otimes\rho_B)\,.$$

Es decir, las correlaciones están cuantificadas por la comparación del estado total ρ con el estado producto $\rho_A\otimes\rho_B$.

(c) La información mutua incluye también correlaciones clásicas: dar un ejemplo de un estado separable (no entrelazado) para el cual $I(\rho)$ es no nula.

P11 Considere el Hamiltoniano de Heisenberg de dos partículas de spin 1/2: $H = \vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}$. Considere un estado térmico, $\rho_{AB} = e^{-\beta H}/Z_\beta$.

(a) Muestre que en este caso puede escribirse de la forma $\rho_{AB} = (1-p)\,|\psi_-\rangle\,\langle\psi_-| + (p/4)\mathbb{I}$, donde $|\psi_-\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$.

(b) Calcule la negatividad como función de p. ¿Para qué valores de p es no nula? Ayuda: ver que la matriz transpuesta parcial en la base computacional queda diagonal por bloques.

(c) Para dos qubits se define la concurrencia como:

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\},$$

donde los λ_i son las raíces cuadradas de los autovalores de la matriz $\rho(Y_1Y_2)\rho^*(Y_1Y_2)$, ordenados en forma decreciente.
Calcular la concurrencia del estado ρ. ¿Para qué valores de p es no nula? Ayuda: recordar que $|\psi_-\rangle$ es autoestado de Y_1Y_2.
Obs: La concurrencia se utiliza comúnmente para cuantificar el entrelazamiento de dos qubits, pero en rigor no es una medida de entrelazamiento.

P12 **Teorema de Hardy.** Esta es una demostración del conflicto entre la mecánica cuántica y el realismo local que no requiere desigualdades. Consideremos que Alice y Bob contienen un par de qubits preparados en el estado

$$|\text{Hardy}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle\right)$$

(a) Muestre lo siguiente: (i) si ambos miden σ_z al menos uno de ellos obtiene $+1$ como resultado; (ii) si Alice mide σ_z y obtiene $+1$ entonces si Bob mide σ_x obtendrá $+1$; (iii) si Bob mide σ_z y obtiene $+1$, entonces si Alice mide σ_x obtendrá $+1$ con certeza.

(b) Una teoría realista local nos lleva a considerar que si somos capaces de predecir con certeza el valor de alguna propiedad de un objeto sin perturbarlo en modo alguno, entonces esa propiedad debe ser considerada un “elemento de la realidad”, al mismo tiempo que no admite la posibilidad de que exista propagación instantánea de cualquier tipo de señal. Si esto se cumple el valor de esta propiedad estar “escrito” en el objeto en cuestión. Muestre entonces que, de acuerdo a los experimentos anteriores, la propiedad σ_x no puede tomar el valor -1 en ambas partículas al mismo tiempo (el evento tiene probabilidad igual a 0). ¿Cuánto vale esta probabilidad de acuerdo a la mecánica cuántica?

(c) Ahora considere un estado puro de dos qubits entrelazado (no máximamente). Muestre que siempre puede escribirse, mediante un etiquetado adecuado de los estados de la base, de la forma

$$|\psi\rangle = \alpha\,|00\rangle + \beta\,|10\rangle + \gamma\,|01\rangle$$

donde ningún coeficiente es igual a cero.

(d) Demuestre que existe una contradicción entre el realismo local y la mecánica cuántica para este estado.

P13 **Compuertas cuánticas.**

(a) Probar que $HXH = Z$, $HYH = -Y$, $HZH = X$.

(b) Probar que $XR_y(\phi)X = R_y(-\phi)$, $XR_z(\phi)X = R_z(-\phi)$.

(c) Cualquier operador unitario sobre un qubit puede descomponerse en la forma:
$U = e^{i\alpha}R_z(\beta)R_y(\gamma)R_z(\delta)$; probar que puede escribirse $U = e^{i\alpha}AXBXC$, con $ABC = \mathbb{I}$.
Ayuda: tomar $A = R_z(\beta)R_y(\gamma/2)$, $B = R_y(-\gamma/2)R_z(-(\delta+\beta)/2)$.

(d) Probar que la compuerta C-U (U controlado) no es equivalente a C-$e^{i\phi}U$ (excepto cuando $\phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$).

P14 **Compuerta de Hadamard**. La compuerta de Hadamard H actúa sobre el estado de la base computacional de un qubit $|k\rangle$ en la forma $H|k\rangle = (|0\rangle + (-1)^k |1\rangle)/\sqrt{2}$. La transformada de Hadamard $H^{\otimes n}$ es el operador que aplica compuertas de Hadamard sobre n qubits a la vez. Mostrar que:

$$H^{\otimes n} |\vec{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{\vec{z}} (-1)^{\vec{x}\cdot\vec{z}} |\vec{z}\rangle$$

Observar que como $H^2 = I$, esto implica que:

$$H^{\otimes n} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{\vec{z}} (-1)^{\vec{k}\cdot\vec{z}} |\vec{z}\rangle = \left|\vec{k}\right\rangle$$

(a) Mostrar que:

$$H^{\otimes n} \left(\frac{|\vec{x}\rangle + |\vec{x} \oplus \vec{s}\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \sum_{\vec{z} \in s^\perp} (-1)^{\vec{x}\cdot\vec{z}} |\vec{z}\rangle$$

donde $\vec{x} \oplus \vec{s}$ es la n-upla que se obtiene al sumar $\vec{x}$ y $\vec{s}$ componente a componente módulo 2, y $s^\perp$ es el espacio de las n-uplas binarias ortogonales a s, o sea $s^\perp = \{\vec{z} \ / \ \vec{z} \cdot \vec{s} = 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}$.

P15 **Algoritmo de Grover** (búsqueda en una base de datos). Este ejercicio se relaciona con el algoritmo de Grover, que no se dio en clase (igual puede hacerse).

(a) Sea U_0 tal que $U_0 \left|\vec{0}\right\rangle = \left|\vec{0}\right\rangle$, $U_0 |\vec{x}\rangle = -|\vec{x}\rangle \ \forall \ \vec{x} \neq \vec{0}$. Mostrar que $U_0 = -I + 2\left|\vec{0}\right\rangle\left\langle\vec{0}\right|$.

(b) Sea $|\psi\rangle = H^{\otimes n}\left|\vec{0}\right\rangle$, y $U_\psi = H^{\otimes n} U_0 H^{\otimes n}$. Mostrar que $U_\psi = -I + 2|\psi\rangle\langle\psi|$.

(c) Probar que un estado $|\phi\rangle = \sum_{\vec{x}} c_{\vec{x}} |\vec{x}\rangle$ es ortogonal a $|\psi\rangle$ si y sólo si $\sum_{\vec{x}} c_{\vec{x}} = 0$.

(d) Probar que U_ψ invierte los coeficientes respecto del promedio, o sea, si para $|\phi\rangle = \sum_{\vec{x}} c_{\vec{x}} |\vec{x}\rangle$ se define la amplitud promedio $\mu = (1/N)\sum_{\vec{x}} c_{\vec{x}}$, entonces resulta $U_\psi |\phi\rangle = \sum_{\vec{x}} (2\mu - c_{\vec{x}}) |\vec{x}\rangle$ (y como $|\psi\rangle$ tiene todos sus coeficientes iguales, $U_\psi |\psi\rangle = |\psi\rangle$).

(e) Para esta parte es necesario buscar material adicional (por ejemplo, el libro de Nielsen y Chuang). Sea $f(\vec{x})$ una función con t soluciones (valores de $\vec{x}$ para los que $f(\vec{x}) = 1$). Obtenga el número óptimo de iteraciones en el algoritmo de Grover para hallar alguna de las soluciones.