

# Problema del Rey Malo reformulado

April 23, 2025

1. **El problema del rey malo** (Aharonov): Un físico naufraga y llega a una isla que, desgraciadamente para él, resulta estar llena de físicos. Allí gobierna un rey que decide eliminar al náufrago a menos que éste sea capaz de resolver el siguiente desafío: “Deberás preparar una partícula de spin  $1/2$  y entregármela. Yo realizaré sobre ella un experimento que consistirá en medir alguna de las tres componentes cartesianas  $(x, y, z)$  de su spin. Luego te devolveré la partícula para que la analices. Tú podrás hacer todos los experimentos que desees. Cuando hayas concluido, yo te diré cuál fue mi experimento y tú deberás decirme cuál fue su resultado.” ¿Es posible que el físico salve su vida? ¿Cuál es su probabilidad de supervivencia?
  - (a) El físico habilmente piensa en usar el recurso de entrelazamiento, creando un estado entrelazado entre la partícula que va a pasar al rey (a la derecha) y una partícula auxiliar (ancilla, a la izquierda). Su elección es:  $|\Psi_0\rangle = (|0_y 1_y\rangle + |1_y 0_y\rangle)/\sqrt{2}$ , donde usaremos  $|0_i\rangle$  y  $|1_i\rangle$ , para denotar los autoestados de  $\sigma_i$ , con autovalores  $+1$  y  $-1$ , respectivamente ( $i = x, y, z$ ). Hacer los cambios de base adecuados y hallar las expresiones de  $|\Psi_0\rangle$  usando  $\{|0_x\rangle, |1_x\rangle\}$  y  $\{|0_z\rangle, |1_z\rangle\}$ .
  - (b) Usando lo anterior, encuentre los tres pares de estados posibles del conjunto luego de la medición del rey en cada dirección del spin. Por ejemplo, si el Rey mide  $\sigma_y$  los estados posibles luego de la medición del rey son:  $|1_y 0_y\rangle$  ó  $|0_y 1_y\rangle$  dependiendo si el valor que obtiene es  $+1$  ó  $-1$ , respectivamente (use proyectores y luego normalize). Verifique que todos estos estados son ortogonales entre sí.
  - (c) Ahora el rey pasa la partícula al físico y este debe diseñar una base cuya medición le permita distinguir con certeza el resultado del rey considerando que este le comunica la componente de spin medido. Considere los siguientes estados para esa base (escritos en la base

computacional):

$$\begin{aligned}
 |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{2}|0\ 0\rangle + \frac{1}{2}e^{i\pi/4} (|0\ 1\rangle - i|1\ 0\rangle) \\
 |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{2}|0\ 0\rangle - \frac{1}{2}e^{i\pi/4} (|0\ 1\rangle - i|1\ 0\rangle) \\
 |\Psi_3\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{2}|1\ 1\rangle + \frac{1}{2}e^{-i\pi/4} (|0\ 1\rangle + i|1\ 0\rangle) \\
 |\Psi_4\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{2}|1\ 1\rangle - \frac{1}{2}e^{-i\pi/4} (|0\ 1\rangle + i|1\ 0\rangle)
 \end{aligned}$$

Verifique que todos estos estados están normalizados y son ortogonales entre sí.

- (d) Complete la siguiente tabla de medición del observable construido con la base listada:  $A = \sum_{i=1}^4 a_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$  ( $a_i$ , todos diferentes) para cada posible elección y resultado de la medición del Rey.

Valor de A	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$
$a_1$		+	
$a_2$		-	
$a_3$		-	
$a_4$		+	

Table 1: Tabla de errores

Concluya que para cada posible dirección en que mide el Rey, siempre la medición de  $A$  por el físico discrimina con certeza el resultado posible: + ó -, por lo que haber estudiado mecánica cuántica lo salva.