

Dinámica de Sistemas Cuánticos Abiertos

Juan Pablo Paz

20 de abril de 2025

Índice

1. Introducción	3
2. Representación de Kraus	4
2.1. Demostración de la Forma de Kraus de la evolución temporal . . .	5
2.1.1. La condición de normalización	6
2.1.2. Los operadores de Kraus no son únicos	7
2.1.3. Mapas positivos y completamente positivos	7
2.2. De los primeros principios a la fenomenología	9
2.3. Purificación de un canal de Kraus	9
2.4. Ejemplos de mapas (canales) cuánticos	10
2.4.1. Canales Unitales	10
2.4.2. Desfasaje para un sistema de spin $\frac{1}{2}$	11
2.4.3. Decaimiento de un spin $\frac{1}{2}$ hacia el estado $ 0\rangle$	12
2.4.4. Mapa “medir y olvidar”	12
2.4.5. El canal “medir, evolucionar y olvidar”	13
3. Aplicación: Corrección cuántica de errores	13
3.1. Un código clásico para corregir un bit flip: código de repetición . .	15
3.2. El código cuántico de corrección de errores tipo σ_x	18
3.3. Código perfecto de corrección de errores	22
4. Ecuación de Lindblad	23
4.1. Deducción de la ecuación de Lindblad	24
4.2. Decaimiento de un sistema de dos niveles	25
4.3. Pérdida de coherencia de un spin	26
5. El oscilador armónico cuántico amortiguado	27
5.1. Aproximación al equilibrio térmico para un oscilador armónico cuántico	29
5.2. Algunos comentarios sobre la ecuación maestra	31

6. Un modelo microscópico con solución exacta: el movimiento Browniano cuántico	32
6.1. El modelo y su solución en la representación de Heisenberg	32
6.2. La densidad espectral del entorno	34
6.3. Ecuación local en el tiempo para $X(t)$	35
6.4. Evolución de los valores medios de $X(t)$ y sus momentos	37

1. Introducción

En esta sección analizaremos un problema de mucha relevancia física: la descripción de la evolución de un sistema cuántico disipativo. Esto es, un sistema que no conserva su energía. Aprenderemos aquí como analizar la evolución de este tipo de sistemas y veremos que aun en casos en los que la pérdida de energía es muy pequeña, la evolución se caracteriza por otros procesos físicos muy relevantes como el de la pérdida de coherencia cuántica (nombre que suele utilizarse para describir al proceso por el cual un estado que inicialmente es puro se transforma en otro que pasa a ser mixto). Esta es la situación típica de casi todos los sistemas físicos que, salvo en casos excepcionales, no evolucionan tal como lo postulamos en el Capítulo 6. Es decir, en los casos más habituales, la evolución de un sistema físico no está generada por un Hamiltoniano sino que sufre, de una manera u otra, el efecto de interacciones no deseadas y muchas veces incontrolables que pueden quitarle energía y también generar un comportamiento ruidoso y fluctuante.

El enfoque que adoptaremos es el siguiente: mostraremos que si aceptamos la premisa de que la evolución Unitaria es la característica de un sistema cuántico cerrado (que por definición no interactúa con nada externo a él sino que permanece perfectamente aislado del resto del Universo) entonces, la evolución de las partes de ese sistema cerrado será típicamente no-Unitaria en tanto y en cuanto interactúen entre ellas. Es decir, veremos que si descomponemos a un sistema compuesto por dos partes, la evolución del estado cuántico de cada parte no estará descrita por una ecuación del tipo de la de Schroedinger sino que deberá ser analizada de otra manera. En efecto, en el Capítulo 5 (Sistemas Compuestos) vimos que el estado de cada una de las partes de un sistema compuesto se puede describir con un objeto matemático que denominamos “matriz densidad reducida”, que se obtiene como la traza parcial de la matriz densidad que describe el estado del sistema completo. Es decir, en el caso en que el sistema completo este compuesto por las partes A y B, si la matriz densidad del conjunto es ρ_{AB} entonces el estado de la parte A está descrito por la matriz densidad reducida ρ_A donde

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) \tag{1}$$

siendo la operación Tr_B la que denominamos “traza parcial” sobre la parte B del operador ρ_{AB} .

Entonces, el objetivo de esta Sección consiste en estudiar la evolución de la matriz densidad reducida ρ_A , bajo hipótesis razonables sobre la naturaleza de la parte B y de la interacción entre las partes. Surge naturalmente la pregunta de qué es aquello que entendemos por “hipótesis razonables” sobre la naturaleza de las partes y de su interacción. Sobre esto se podría escribir mucho, pero nos limitaremos aquí a destacar un caso muy importante desde el punto de vista físico. Como vimos, las trazas parciales ρ_A y ρ_B nos permiten definir las matrices densidad reducidas de cada sub-sistema. Sin embargo, estos operadores no determinan el estado completo. Es decir, en ρ_{AB} hay más información que

aquella contenida en ρ_A y ρ_B y esta información se encuentra típicamente en las correlaciones entre las partes (y no en el estado de cada una de ellas). Un ejemplo dramático y simple que ilustra esto es aquel provisto por un estado máximamente entrelazado de dos partículas de spin $1/2$ (uno de los estados de Bell, por ejemplo). En este caso, los estados de A y B no contienen ninguna información ya que corresponden a estados máximamente mixtos (es decir, son proporcionales a la identidad). En ese caso, toda la información está en las correlaciones entre las partes. La hipótesis habitual en la descripción de sistemas cuánticos disipativos es que la situación debe ser la opuesta a la de este ejemplo: supondremos que las correlaciones entre A y B son despreciables y que se mantienen despreciables a lo largo de la evolución. Esto se cumple, aproximadamente, cuando una de las partes (B, por ejemplo) es mucho más grande que la otra (es decir, tiene un espacio de Hilbert de dimensiones mucho mayor) y cuando las interacciones son débiles de modo tal que las correlaciones que inevitablemente se generan no afecten la evolución de A de manera significativa. Como veremos, en ese caso tenemos alguna esperanza de obtener el estado ρ_A en un instante t , conociendo solamente dicho estado y el estado ρ_B en el instante inicial $t = 0$. En esos casos podremos definir un operador de evolución temporal que actúa de manera parecida a como lo describimos en el Capítulo 6, en el sentido que nos permite obtener $\rho_A(t)$ a partir de $\rho_A(0)$ (pero que, como veremos, no será unitario).

2. Representación de Kraus

Estudiaremos aquí el caso más sencillo en el que, como mencionamos más arriba, despreciamos completamente las correlaciones iniciales entre las partes de un sistema compuesto (A,B). Es decir, supondremos que el estado inicial del conjunto es el producto tensorial del estado de las partes:

$$\rho_{AB}(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_B(0) \quad (2)$$

En este caso, demostraremos un resultado muy poderoso: veremos que el estado $\rho_A(t)$ puede obtenerse siempre a partir del estado inicial $\rho_A(0)$ mediante un operador de evolución que, dado que actúa sobre el espacio de operadores, suele denominarse super-operador de evolución temporal (o mapa de evolución temporal):

$$\rho_A(t) = \mathcal{K}(t)(\rho_A(0)) \quad (3)$$

Además, demostraremos que, en ausencia de correlaciones iniciales, este super-operador de evolución adquiere una forma relativamente sencilla y puede escribirse como

$$\rho_A(t) = \sum_{\mu} K_{\mu}(t) \rho_A(0) K_{\mu}^{\dagger}(t) \quad (4)$$

Donde los operadores K_μ , que caracterizan la evolución temporal de la parte A del sistema completo, dependen del estado inicial de la parte B y de las características de la evolución temporal (unitaria) del sistema completo formado por las dos partes (A y B). Además, demostraremos que los operadores K_μ , denominados habitualmente “operadores de Kraus”, deben satisfacer la condición

$$\sum_{\mu} K_{\mu}^{\dagger}(t)K_{\mu}(t) = I_A \quad (5)$$

La identidad anterior define un super-operador de evolución temporal \mathcal{K} que, en este caso, no es otra cosa más que un mapa lineal que relaciona el estado inicial con el estado en otro instante mediante la siguiente ecuación:

$$\rho_A(t) = \mathcal{K}(t)(\rho_A(0)) = \sum_{\mu} K_{\mu}(t)\rho_A(0)K_{\mu}^{\dagger}(t) \quad (6)$$

Esta identidad es conocida como “la forma de Kraus de la evolución temporal de un sistema cuántico abierto”, y su validez puede demostrarse de manera sorprendentemente sencilla, tal como veremos ahora.

2.1. Demostración de la Forma de Kraus de la evolución temporal

Podemos analizar la evolución del sistema completo que, como es un sistema cerrado, resulta estar caracterizada por un operador de evolución temporal unitario. Es decir, dado el estado inicial $\rho_{AB}(0)$, siempre existe un operador $U_{AB}(t)$ que satisface

$$\rho_{AB}(t) = U_{AB}(t)\rho_{AB}(0)U_{AB}^{\dagger}(t) \quad (7)$$

Como estamos interesados en la evolución de la parte A solamente, podemos obtener su estado tomando la traza parcial sobre B de la anterior expresión. Si además utilizamos el hecho de que inicialmente no hay correlaciones entre las partes, podremos escribir que

$$\rho_A(t) = \text{Tr}_B(U_{AB}(t)\rho_A(0) \otimes \rho_B(0)U_{AB}^{\dagger}(t)) \quad (8)$$

Como el estado inicial de la parte B siempre está descrito por un operador densidad $\rho_B(0)$ que es hermítico, positivo y de traza unidad, entonces podremos utilizar su descomposición espectral

$$\rho_B(0) = \sum_k q_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k| \quad (9)$$

Donde los estados $|\phi_k\rangle$ forman una base ortonormal del espacio de estados de B (denotado como \mathcal{H}_B) y los autovalores q_k deben ser todos positivos y satisfacer la condición que garantiza que $\rho_B(0)$ tiene traza unidad, es decir, se cumple $q_k \geq 0$ y $\sum_k q_k = 1$. Por otra parte, la traza parcial sobre la parte B, tal como se explica en el capítulo 5 de este texto (Sistemas compuestos), se debe

calcular sumando el valor medio del operador correspondiente sobre una base de \mathcal{H}_B . Es decir, la expresión anterior se reduce a

$$\rho_A(t) = \sum_{kl} q_k \langle \phi_l | U_{AB}(t) \rho_A(0) \otimes |\phi_k\rangle \langle \phi_k | U_{AB}^\dagger(t) | \phi_l \rangle \quad (10)$$

Analizando esta expresión con cuidado, podemos descubrir que no es otra cosa más que la forma de Kraus que enunciamos más arriba. En efecto, si definimos a los operadores

$$K_{kl}(t) = \sqrt{q_k} \langle \phi_l | U_{AB}(t) | \phi_k \rangle, \quad (11)$$

La expresión anterior se reduce a

$$\rho_A(t) = \sum_{kl} K_{kl}(t) \rho_A(0) K_{kl}^\dagger(t). \quad (12)$$

Agrupando a los índices k y l bajo un nuevo índice que podemos denominar μ (es decir $\mu = (k, l)$) obtenemos entonces que la evolución de la matriz densidad reducida de A puede escribirse tal como postulamos en la ecuación anterior. Conviene resaltar el único punto sutil de la demostración anterior, que consiste en reconocer que al tomar el bracket sobre dos estados de B de un operador que actúa sobre el espacio completo \mathcal{H}_{AB} , obtenemos un operador sobre \mathcal{H}_A . Esto es el punto crucial en la demostración y nos permite identificar fácilmente los operadores K_μ como brackets entre los estados $|\phi_l\rangle$ y $|\phi_k\rangle$ del operador de evolución completo U_{AB} .

Por otra parte, esta simple demostración nos permite deducir algunas propiedades de los operadores de Kraus $K_\mu(t)$. Analizaremos algunas de ellas aquí:

2.1.1. La condición de normalización

Por cierto, el carácter unitario de la evolución completa (que está definida por U_{AB}) se refleja en el hecho de que

$$\sum_{\mu} K_{\mu}^{\dagger}(t) K_{\mu}(t) = I_A, \quad (13)$$

donde el operador I_A es la identidad sobre el espacio de estados de la parte A (denotado como H_A). En efecto, esto puede verse de manera simple ya que

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} K_{\mu}^{\dagger} K_{\mu} &= \sum_{kl} (\langle \phi_l | U_{AB}(t) | \phi_k \rangle)^{\dagger} \times \langle \phi_l | U_{AB}(t) | \phi_k \rangle q_k \\ &= \sum_{kl} (\langle \phi_k | U_{AB}^{\dagger}(t) | \phi_l \rangle \langle \phi_l | U_{AB}(t) | \phi_k \rangle) q_k. \end{aligned} \quad (14)$$

Usando que $\sum_l |\phi_l\rangle \langle \phi_l| = I_B$ y que $U_{AB}^{\dagger} U_{AB} = I_{AB}$, vemos que la expresión anterior se reduce a

$$\sum_{\mu} K_{\mu}^{\dagger}(t)K_{\mu}(t) = \text{Tr}_B(I_{AB}) = I_A, \quad (15)$$

Que es la propiedad que enunciamos más arriba. Vale la pena notar, que esta propiedad ($\sum_{\mu} K_{\mu}^{\dagger}(t)K_{\mu}(t) = I_A$) es la generalización al caso de un sistema cuántico abierto de la propiedad de unitariedad de la evolución temporal para un sistema cerrado. En efecto, la evolución unitaria que estudiamos en el Capítulo 6 tiene también la forma de Kraus pero en ese caso la sumatoria contiene solamente un único término. Por cierto, es fácil ver (y queda planteada la demostración para el lector) que si las partes A y B no interactúan, es decir, si se cumple que $U_{AB}(t) = U_A(t) \otimes U_B(t)$, entonces hay un único operador de Kraus que resulta ser igual a $U_A(t)$ (y en ese caso, cuando el sistema A no interactúa con ningún otro, tenemos $\rho_A(t) = U_A(t)\rho_A(0)U_A^{\dagger}(t)$). Por otra parte, esta condición de normalización de los operadores de Kraus garantiza la conservación de la traza del operador densidad. Esto puede verse de manera muy simple ya que

$$\text{Tr}(\rho_A(t)) = \sum_{\mu} \text{Tr}(K_{\mu}\rho_A(0)K_{\mu}^{\dagger}) = \text{Tr}(\rho_A(0)) \quad (16)$$

Donde solamente hemos utilizado la propiedad cíclica de la traza de un producto de operadores.

2.1.2. Los operadores de Kraus no son únicos

Otra propiedad importante que se deduce del razonamiento que presentamos aquí es que los operadores de Kraus, que caracterizan a la evolución de un sistema cuántico abierto, no son únicos. Es decir, dado un estado inicial del conjunto tal como el que escribimos más arriba y un operador unitario para el sistema completo (el que denominamos $U_{AB}(t)$) hay muchas formas de escribir la evolución temporal. Los operadores K_{μ} definidos en la ecuación (14), dependen de la base que se utilice para calcular la traza parcial sobre la parte B, que puede ser cualquiera. Para cada base que elijamos con este fin, tendremos una forma de Kraus diferente, pero la evolución de la parte A será la misma en todos estos casos. Notemos que en todos los casos la condición de normalización (15) se satisface.

2.1.3. Mapas positivos y completamente positivos

Hemos demostrado hasta aquí que, en ausencia de correlaciones iniciales entre A y B, la matriz densidad de la parte A siempre evoluciona en el tiempo con un mapa (un super-operador) $\mathcal{K}(t)(\rho_A(0)) = \rho_A(t)$ que satisface las siguientes propiedades: 1) el mapa preserva el carácter hermitico del operador densidad, 2) el mapa preserva la traza de este operador y 3) el mapa preserva el carácter positivo de ρ_A . Esta última propiedad es importante y su demostración es trivial ya que surge de que, debido a la forma de Kraus, el valor medio del operador $\rho_A(t)$ en cualquier estado será siempre la suma de valores medios de $\rho_A(0)$

en otros estados, que son necesariamente positivos. Cabe preguntarse aquí si es posible derivar la forma de Kraus a partir de estas tres propiedades. Es decir, nos preguntamos si es posible demostrar que todo mapa que preserva la hermiticidad, la traza y el carácter positivo de ρ_A debe tener la forma de Kraus. La respuesta a esta pregunta es negativa. Es decir, hay mapas que son positivos pero no tienen la forma de Kraus. Veremos más abajo un ejemplo que resulta muy relevante en el estudio del entrelazamiento cuántico. Sin embargo, es posible demostrar el siguiente Teorema: El mapa $\mathcal{K}(t)$ tiene la forma de Kraus si y solo si el mapa preserva el carácter hermítico, la traza de ρ_A y además tiene la propiedad de ser “Completamente positivo”, denominación que abreviaremos como C.P. Los mapas C.P. son un subconjunto de los mapas positivos que cumplen con la siguiente propiedad: Un mapa es C.P. si y solo si cualquier extensión trivial de dicho mapa es positiva. Debemos aclarar que entendemos por cualquier extensión trivial: si el mapa $\mathcal{K}(t)$ está definido como super-operador para la parte A, podemos extenderlo trivialmente a cualquier otra componente B de un sistema siendo la extensión trivial aquella que hace evolucionar a la parte A con el operador $\mathcal{K}(t)$ y hace evolucionar a la parte B con la identidad (o sea, la deja intacta). Es simple ver que si el mapa tiene la forma de Kraus entonces se cumple que es hermítico, conserva la traza y es completamente positivo. Las dos primeras propiedades ya las discutimos más arriba pero la tercera puede demostrarse de la siguiente manera. La extensión trivial del mapa de Kraus que actúa sobre A al conjunto (A,B) es la siguiente:

$$\rho_{AB}(t) = \sum_{\mu} K_{\mu} \otimes I_B \rho_{AB}(0) K_{\mu}^{\dagger} \otimes I_B. \quad (17)$$

Si el estado inicial $\rho_{AB}(0)$ (que puede ser cualquiera) es positivo, la positividad de $\rho_{AB}(t)$ surge trivialmente de notar que su valor medio, nuevamente, puede obtenerse como la suma sobre valores medios de $\rho_{AB}(0)$ en otros estados, los que necesariamente son positivos. Es decir, si el mapa tiene la forma de Kraus entonces se cumplen las tres propiedades enunciadas en el Teorema que vimos más arriba. La implicación en la dirección contraria (es decir, la demostración de que las tres propiedades implican la forma de Kraus) es el famoso teorema de Kraus, cuya demostración no presentaremos aquí.

Para concluir este párrafo conviene convencernos de la existencia de mapas positivos que no son completamente positivos. El ejemplo más célebre de un mapa de estas características es el de la transposición parcial. En este caso, definimos al mapa \mathcal{K} , que actúa sobre la parte A de un sistema de la siguiente forma

$$\rho_A(t) = \mathcal{T}(\rho_A(0)) = \rho_A(0)^T. \quad (18)$$

Este mapa es obviamente positivo ya que la transpuesta de una matriz positiva es también positiva, pero no es completamente positivo. Esto puede verse con un contraejemplo simple. Consideremos un sistema de dos partículas de spin 1/2 y como estado inicial $\rho_{AB}(0)$ al operador densidad que corresponde al estado de Bell $|\Phi_+\rangle$. La extensión de la transposición parcial al sistema (A, B) es

$$\rho_{AB}(t) = \mathcal{T}_A \otimes \mathcal{I}_B(\rho_{AB}(0)). \quad (19)$$

La transposición parcial de la matriz $\rho_{AB}(0)$ debe hacerse transponiendo solamente los índices correspondientes al sistema A y dejando intactos los de B . Esto implica que si escribimos ρ_{AB} en una base canónica formada por los estados $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, la matriz asociada al estado $|\Phi_+\rangle$ tiene cuatro elementos idénticos (e iguales a $1/2$) en las cuatro esquinas de la matriz. Al transponerse parcialmente esta matriz es fácil ver que los elementos de la diagonal permanecen intactos mientras que los de las otras dos esquinas se trasladan dos lugares hacia arriba o hacia abajo por la contra-diagonal. Es fácil ver que la matriz resultante, que está mostrada aquí abajo, tiene un autovalor negativo, por lo que la transposición parcial es un mapa positivo pero no completamente positivo.

2.2. De los primeros principios a la fenomenología

La forma de Kraus del operador de evolución temporal de un sistema cuántico abierto es un resultado muy poderoso e importante. Sin embargo, no podemos perder de vista algo fundamental: para un problema físico realista (una partícula interactuando con muchas otras, o un átomo interactuando con el campo electromagnético, por ejemplo) es prácticamente imposible calcular exactamente los operadores de Kraus K_μ . Hacer este cálculo implica, ni más ni menos, que resolver en forma analítica la evolución temporal del sistema compuesto (A, B) . Y esto en la práctica resulta imposible en la mayoría de los casos. La gran ventaja de la forma de Kraus es que nos permite modelar los efectos disipativos de manera fenomenológica, “inventando” apropiadamente los operadores K_μ de modo tal de cumplir dos objetivos: por un lado, eligiendo estos operadores apropiadamente podemos ser totalmente coherentes con el formalismo de la mecánica cuántica y por otra parte podemos intentar reproducir los resultados de los experimentos interpretando los procesos que dan lugar a esos operadores de Kraus a posteriori. Presentaremos algunos ejemplos de este tipo más adelante. Asimismo, presentaremos un cálculo detallado de uno de los pocos ejemplos en los que es posible realizar un cálculo exacto del modelo microscópico y deducir la forma del operador densidad en cualquier instante a partir de su valor inicial (tal es el caso del movimiento Browniano cuántico).

2.3. Purificación de un canal de Kraus

Hemos demostrado que dados dos subsistemas A y B , la evolución de una de las partes (A o B) siempre puede describirse mediante un mapa que tiene la forma de Kraus (bajo la hipótesis de que inicialmente no hay correlaciones entre A y B). Cabe mencionar que siempre es posible hacer lo mismo en el sentido contrario. Es decir, siempre que tenemos un mapa que tiene la forma de Kraus con operadores K_μ arbitrarios (que cumplen la condición de normalización que mencionamos más arriba) siempre es posible “purificarlo”. Es decir, siempre es posible demostrar que existe un sistema B , con un estado inicial apropiadamente elegido y también existe un operador unitario U_{AB} que actúa sobre ambas partes que es tal que cuando tomamos la traza parcial sobre B el estado cuántico de la parte A evoluciona de acuerdo a la forma de Kraus ini-

cialmente elegida. Omitiremos aquí la demostración de este teorema, pero vale la pena aclarar en qué sentido usamos aquí la palabra “purificación”. Con ella queremos simplemente decir que el mapa de Kraus es la versión de la evolución para el sistema A de una evolución total unitaria, que preserva los estados puros del sistema compuesto. Por supuesto, teniendo en cuenta lo que mencionamos más arriba, esta forma de ampliar el sistema A para definir el sistema B y la evolución de modo tal que ρ_A evolucione tal como lo deseamos, no es única. Sin entrar en detalles, cabe mencionar que este teorema está muy vinculado al teorema de Neumark que se menciona en el capítulo destinado a la introducción de mediciones generalizadas (y que establece que toda medición generalizada sobre A , descrita por un conjunto que define un POVM, puede asociarse con una medición proyectiva sobre un sistema ampliado). La demostración del teorema de Neumark puede adaptarse para probar este, que mencionamos aquí.

2.4. Ejemplos de mapas (canales) cuánticos

Presentaremos aquí algunos ejemplos sencillos en los que mostraremos cómo modelar el efecto de la dinámica de un sistema abierto apelando a una elección apropiada de los operadores de Kraus.

2.4.1. Canales Unitales

Este caso tiene una interpretación muy simple que no necesariamente se corresponde con la evolución de un sistema abierto sino con un caso donde no somos capaces de controlar con precisión la evolución de un sistema que, por lo tanto, sufre los efectos del ruido. Sin embargo, es bueno destacar que en la mayoría de los casos no es posible distinguir este efecto del que se origina en una genuina interacción con un entorno, al menos en las escalas de tiempo que son relevantes para los experimentos. Un canal Unital se caracteriza porque los operadores de Kraus son proporcionales a operadores unitarios y, por lo tanto, se puede escribir que

$$\rho_A(t) = \sum_{\mu} p_{\mu} U_{\mu} \rho_A(0) U_{\mu}^{\dagger}, \quad (20)$$

donde p_{μ} son números no negativos cuya suma es la unidad y que por lo tanto pueden ser interpretados como probabilidades. Es decir, un canal Unital es aquel en el cual se hace evolucionar al sistema con el operador U_{μ} con probabilidad p_{μ} .

Si lo que se intenta describir es el efecto del ruido ocasionado por las imperfecciones en nuestros mecanismos de control, entonces lo que resulta de interés es el cálculo de la fidelidad entre el estado alcanzado con el canal y aquel que se pretende alcanzar si todas las probabilidades fueran nulas salvo una sola, es decir, si el canal fuera unitario y correspondiera al operador U_0 . En ese caso, podríamos medir la fidelidad con el solapamiento entre las dos matrices densidad (la alcanzada y la objetivo, aunque hay formas más sofisticadas de definir

esta magnitud):

$$F = \text{Tr} \left(U_0 \rho_A(0) U_0^\dagger \sum_{\mu} p_{\mu} U_{\mu} \rho_A(0) U_{\mu}^\dagger \right). \quad (21)$$

Consideremos un ejemplo simple para una partícula de spin $\frac{1}{2}$ en la que los operadores $U_{\mu}(\phi)$ son rotaciones en ángulo ϕ alrededor de un eje \hat{n}_{μ} con probabilidad p_{μ} cuando en realidad deseamos aplicar el mismo tipo de operador alrededor de un eje \hat{z} . Se conoce que el operador densidad inicial más general se escribe usando su polarización:

$$\rho(0) = \frac{1}{2}(I + \vec{p}_0 \cdot \vec{\sigma}). \quad (22)$$

Ahora usando el concepto de rotación del operador vectorial $\vec{\sigma}$ y la invariancia del producto escalar ante rotaciones:

$$U_{\mu}(\phi) \rho_A(0) U_{\mu}^\dagger(\phi) = \frac{1}{2}(I + \vec{p}_{\mu} \cdot \vec{\sigma}). \quad (23)$$

donde \vec{p}_{μ} es el vector \vec{p}_0 rotado en ϕ alrededor de \vec{n}_{μ} (usando a matriz de rotaciones $R_{\vec{n}_{\mu}}(\phi)$). El cálculo de la fidelidad es inmediato usando la fórmula de la traza se obtiene:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\mu} p_{\mu} (1 + \vec{p}_{\mu} \cdot \vec{p}_0). \quad (24)$$

Si, por ejemplo, todas las direcciones dentro de un ángulo sólido $\Delta\Omega$ son cubiertas con la misma probabilidad (y el ángulo sólido se ubica centrado en el operador objetivo que se caracteriza por la dirección p_0), tenemos

$$F = \frac{1}{2}. \quad (25)$$

2.4.2. Desfasaje para un sistema de spin $\frac{1}{2}$

Un canal Unital que conviene resaltar es aquel en el cual hay dos operadores de Kraus, uno de ellos proporcional a la identidad y el otro proporcional a σ_z . Esto es

$$\rho_A(t) = (1-p)\rho_A(0) + p\sigma_z\rho_A(0)\sigma_z. \quad (26)$$

Nuevamente, esto puede interpretarse como un sistema que con probabilidad $(1-p)$ no evoluciona y con probabilidad p rota alrededor del eje z . En este caso, el vector de polarización que describe al estado en la esfera de Bloch resulta ser

$$\vec{P}_A(t) = (P_{A_x}(1-2p), P_{A_y}(1-2p), P_{A_z}). \quad (27)$$

Es decir, la componente z de este vector no cambia y las componentes transversales se reducen haciendo que el vector tienda al eje z . Cabe notar que el caso $p = \frac{1}{2}$ es el peor de todos ya que para valores mayores o menores de ese parámetro la evolución tiende a ser más unitaria que para $p = \frac{1}{2}$.

2.4.3. Decaimiento de un spin $\frac{1}{2}$ hacia el estado $|0\rangle$

Es fácil modelar el proceso de decaimiento usando tres operadores de Kraus. Consideremos el siguiente canal

$$\rho_A(t) = pI\rho_A(0)I + (1-p)(\sigma_- \rho_A(0) \sigma_- + P_1 \rho_A(0) P_1), \quad (28)$$

donde P_1 es el proyector sobre el estado $|1\rangle$ y $\sigma_- = |0\rangle\langle 1|$, se obtiene ($\rho(0) = \frac{1}{2}(I + \vec{p}_0 \cdot \vec{\sigma})$):

$$\rho_A(t) = p\rho_A(0) + (1-p)(\sigma_- \rho_A(0) \sigma_- + P_1 \rho_A(0) P_1), \quad (29)$$

Se interpreta que el estado permanece como está con probabilidad p y tiene evolución con probabilidad $1-p$ usando los operadores de Kraus σ_- y $P_1 = |1\rangle\langle 1|$. Es posible demostrar que:

$$\rho_A(t) = \frac{1}{2}(I + (1-2p)p_{0x}\sigma_x + (1-2p)p_{0y}\sigma_y + p_{0z}\sigma_z), \quad (30)$$

es decir que la polarización del estado se acerca al eje \hat{z} pues las componentes perpendiculares se reducen en $1-p$, mientras la componente z se mantiene fija. Es un buen ejercicio verificar este cálculo.

2.4.4. Mapa “medir y olvidar”

Supongamos que dado un sistema realizamos sobre él una medición ordinaria, por ejemplo la medición de un operador hermítico A , cuyos valores posibles son a_j (sus autovalores) y los proyectores asociados a cada uno son denominados P_j (nos concentramos, por simplicidad, en el caso no degenerado). Como vimos, la probabilidad de obtener el autovalor a_j dado que el estado inicial está descrito por la matriz densidad ρ es

$$\text{Prob}(a_j|\rho) = \text{Tr}(P_j \rho P_j) = \text{Tr}(P_j \rho). \quad (31)$$

Por otra parte, el estado después de la medición es el estado inicial proyectado sobre el subespacio asociado al autovalor medido. En este caso, esto resulta ser

$$\rho'_j = \frac{P_j \rho P_j}{\text{Tr}(P_j \rho)}, \quad (32)$$

donde el denominador presente en esta expresión garantiza que el estado ρ'_j , el estado después de la medición, está normalizado (evidentemente $\text{Tr}(\rho'_j) = 1$).

Supongamos ahora que realizamos esta medición y “olvidamos el resultado”. Esto simplemente quiere decir que consideramos el estado descrito por el conjunto de estados ρ'_j , cada uno de los cuales tiene una probabilidad $\text{Prob}(a_j) = \text{Tr}(P_j \rho)$. Este estado final, que describe la situación física que denotamos con las palabras que aparecen en el título de esta sección “medir y olvidar”, está descrito por

$$\rho' = \sum_j \text{Prob}(a_j|\rho) \frac{P_j \rho P_j}{\text{Tr}(P_j \rho)} = \sum_j P_j \rho P_j. \quad (33)$$

Evidentemente, el estado ρ' se obtiene a partir de ρ aplicando un mapa que tiene la forma de Kraus, siendo en este caso los operadores de Kraus los proyectores P_j , que son tales que la condición de normalización se satisface inmediatamente ya que $\sum_j P_j^\dagger P_j = \sum_j P_j^2 = \sum_j P_j = I$. Es decir, el mapa “medir y olvidar” tiene la forma de Kraus.

2.4.5. El canal “medir, evolucionar y olvidar”

Hay una generalización inmediata del canal descrito en la sección anterior (“medir y olvidar”): podemos considerar que realizamos una medición, obteniendo el resultado correspondiente a a_j , luego forzamos al sistema a evolucionar con un operador U_j , que depende del resultado obtenido en la medición y, finalmente, olvidamos el resultado. Es evidente que el estado final será descrito por el conjunto de estados

$$\rho'_j = \frac{U_j P_j \rho P_j U_j^\dagger}{\text{Tr}(P_j \rho)}, \quad (34)$$

donde el factor de normalización es idéntico al del caso anterior e independiente del operador U_j (la prueba de esta propiedad queda en manos del lector). Estos estados se generan con una probabilidad que también es idéntica a la de la sección anterior y es $\text{Prob}(a_j|\rho) = \text{Tr}(P_j \rho)$ (la independencia de esta probabilidad con U_j es también un ejercicio que el lector debería completar sin dificultades). Entonces, el estado final, que describe al conjunto mencionado es

$$\rho' = \sum_j U_j P_j \rho P_j U_j^\dagger, \quad (35)$$

que también tiene la forma de Kraus con operadores $K_j = U_j P_j$, que obviamente satisfacen la condición de normalización requerida.

Estos mapas (medir y olvidar y medir, evolucionar y olvidar) serán de importancia en la siguiente sección donde describiremos las técnicas cuánticas destinadas a mitigar los efectos indeseados de la evolución generada por el acoplamiento con un entorno.

3. Aplicación: Corrección cuántica de errores

Hemos visto que la acción de un canal ruidoso puede representarse siempre mediante la forma de Kraus. Esta representación para la evolución de un sistema cuántico abierto es capaz de incluir todos los efectos físicos asociados a la interacción con un entorno, no solo el mencionado ruido sino también la disipación, etc. En este párrafo mencionaremos de manera sintética cuál es la estrategia que se puede seguir para mitigar los efectos de la interacción con el entorno. Para ello, se deben utilizar los denominados “códigos cuánticos de corrección de errores”. Bajo este nombre se agrupan una serie de técnicas concebidas en el campo de la información cuántica con el propósito de evitar la degradación de la información almacenada en un sistema cuántico debido a la interacción con el

entorno. De hecho, la existencia de computadoras cuánticas capaces de resolver problemas realmente interesantes era considerada imposible antes del surgimiento de la teoría cuántica de corrección de errores ya que, hasta 1996 (año en el que Peter Shor introdujo esta idea) el efecto nocivo del proceso de decoherencia, inducido por la interacción incontrolable con el entorno que rodea a cualquier sistema físico, era considerado un obstáculo insalvable. Por supuesto que hasta ese entonces se admitía que si fuéramos capaces de aislar completamente un sistema cuántico para hacerlo funcionar como un dispositivo de cómputo entonces no habría ningún efecto asociado a la disipación o a la pérdida de coherencia. Pero es claro que la posibilidad de aislación total no existe en la realidad tecnológica actual ni existirá en el futuro. Para computar es necesario hacerlo con un cierto nivel de ruido, que puede ser bajo pero nunca será nulo. Hoy en día se sabe cómo hacer esto. Clásicamente y para ello se apela, justamente, a la teoría clásica de corrección de errores. El problema es que, hasta los trabajos pioneros de Peter Shor, la extensión de las técnicas clásicas de corrección de errores (que se basan en la redundancia, como veremos) parecía imposible.

Antes de presentar la idea básica de los códigos cuánticos de corrección de errores es importante aclarar una cuestión: Para corregir los errores generados por la interacción con un entorno es imprescindible caracterizar primero esta interacción. Es necesario saber cuáles son, en una dada situación física, los errores típicos, aquellos que dominan la interacción y, una vez determinados, es posible diseñar una estrategia para corregirlos. Pero cabe aquí hacer una advertencia, los métodos de corrección de errores que presentaremos no pueden corregir todos los errores sino solamente algunos. Por eso, es necesario identificar los más importantes en cada caso y diseñar códigos que los corrijan.

Para presentar estos métodos supondremos que contamos con un sistema cuántico de dos niveles (un qubit) y que los errores más importantes, aquellos que vamos a corregir, pueden modelarse mediante un canal Unital que describiremos a continuación. El qubit tiene un espacio de estados con una base cuyos vectores denominaremos como $|0\rangle$ y $|1\rangle$. El estado cuántico más general será

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (36)$$

donde α y β son dos amplitudes complejas que parametrizan completamente al estado (y que cumplen la condición de normalización $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$). Consideremos lo que sucede si el sistema evoluciona mediante un canal del tipo de los analizados más arriba: Se trata de un canal Unital en el que con probabilidad p el operador de evolución es σ_x y con probabilidad $(1 - p)$ es la identidad. Es decir, la evolución temporal es tal que

$$\rho' = p\sigma_x\rho\sigma_x + (1 - p)\rho. \quad (37)$$

Es simple reescribir el estado ρ' en términos del vector de polarización, que describe al estado en la esfera de Bloch. En efecto, si tomamos

$$\rho = \frac{1}{2}(I + p_x\sigma_x + p_y\sigma_y + p_z\sigma_z), \quad (38)$$

(donde, recordemos $p_j = \langle \sigma_j \rangle = \text{Tr}(\rho \sigma_j)$) entonces el estado ρ' resulta ser

$$\rho' = \frac{1}{2} (I + p_x \sigma_x + (1 - 2p)(p_y \sigma_y + p_z \sigma_z)). \quad (39)$$

Usando esta expresión, podemos calcular la fidelidad del canal, que definimos como

$$F = \text{Tr}(\rho \rho') = \frac{1}{2} (1 + p_x^2 + (1 - 2p)(p_y^2 + p_z^2)), \quad (40)$$

fórmula que puede reescribirse simplemente (usando que $\sum p_j^2 = 1$) como

$$F = (1 - p) + p p_x^2, \quad (41)$$

o sea

$$F = 1 - p(1 - p_x^2). \quad (42)$$

La interpretación de esta fórmula es simple: la fidelidad de todos los estados decae linealmente con p , con una pendiente $(1 - p_x^2)$, que se anula solo para los estados que tienen $p_x = \pm 1$, es decir, para los estados que son autoestados de σ_x . Para estos estados, los errores (aplicar σ_x con probabilidad p) transforman al estado en un múltiplo de sí mismo, dejando a ρ invariante. Por eso, para estos estados el canal tiene fidelidad idéntica a la unidad. Más adelante presentaremos el código que permite corregir este error y veremos que, si se lo utiliza, la fidelidad no decaerá linealmente con la probabilidad de error p sino que lo hará cuadráticamente. Ese será el gran logro del proceso de corrección de errores, pero es un logro que permite, tras la apropiada concatenación, bajar el efecto del ruido a niveles tan bajos como se desee.

Este canal modela el comportamiento de una memoria cuántica que tiene una probabilidad $(1 - p)$ de preservar la información y una probabilidad p de ser afectada por un ruido que genera un bit-flip (precisamente esta es la acción del operador σ_x en la base formada por los dos estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$). Es fácil analizar el análogo clásico de esta situación.

3.1. Un código clásico para corregir un bit flip: código de repetición

Consideremos una unidad clásica de información, un bit, b que puede tomar solo dos valores $b = 0$ o $b = 1$. Consideremos que inicialmente el bit está en un cierto estado $b_{\text{in}} = b$ y que es sometido a la acción de un canal clásico del siguiente tipo. El canal preservará el estado del bit con probabilidad $(1 - p)$ y lo cambiará con probabilidad p . Podemos preguntarnos entonces cuál es la probabilidad de obtener un cierto estado final b_{out} y, en particular, cuál es la probabilidad de que el estado final y el inicial sean idénticos. En efecto, es simple demostrar que

$$\text{Prob}(b_{\text{in}} = b_{\text{out}}) = 1 - p. \quad (43)$$

Esta fórmula es bastante similar a la cuántica para la fidelidad, con una diferencia sustancial ya que en el caso cuántico este canal tiene estados que permanecen inalterados mientras que en el caso clásico eso es imposible.

Dada esta situación, nos preguntamos qué estrategia podríamos utilizar para proteger a nuestro bit clásico. ¿Qué entendemos aquí por la palabra “proteger”? Por cierto, será imposible poner a salvo el bit anulando completamente el efecto de los errores. En cambio, nos contentaremos con un método que permita lograr que la fidelidad (la probabilidad de que el bit de salida sea idéntico al de entrada) decaiga cuadráticamente (y no linealmente como sucede en la ecuación que vimos más arriba) con la probabilidad de cometer un error.

Para eso, podemos utilizar la versión más rudimentaria de un código de corrección de errores. En efecto, apelaremos al uso de la redundancia utilizando el denominado “código de repetición”. El proceso para corregir errores tiene los siguientes cuatro pasos: i) Codificación de la información, ii) Evolución ruidosa, iii) Decodificación y detección de errores, iv) Corrección del error. Veremos cada uno de estos pasos por separado.

Paso 1: Codificación

El proceso de codificación consiste en representar la información original en el estado de un número mayor de portadores. Inicialmente tenemos un único bit, que estará representado por el estado de algún objeto (no es necesario entrar en ningún detalle sobre el representante físico de la información, podría ser simplemente un trozo de papel con un 0 o un 1 escrito en él). El estado de este bit original será representado, en nuestro caso, en el estado de tres portadores físicos (tres trozos de papel, por ejemplo). Es el proceso de codificación más simple que podemos imaginar: consiste, en nuestro caso, en copiar el estado del bit original en otros dos portadores. Es decir, si comenzamos con nuestro bit en el estado “ b ” y con otros dos portadores en algún estado inicial arbitrario (que podemos elegir como el estado “0”, por ejemplo) procederemos de modo tal de lograr que si $b_{\text{in}} = b$ entonces

$$B_{\text{in}} = (b, 0, 0) \tag{44}$$

Entonces el estado codificado será

$$B_{\text{cod}} = (b, b, b). \tag{45}$$

Con la letra B mayúscula representaremos el estado de tres bits. Inicialmente tenemos uno en el estado b y otros dos en un estado de referencia. Tras codificar la información, el bit codificado contiene tres copias idénticas de b .

Paso 2: Evolución ruidosa

El estado codificado B_{cod} es sometido a la acción del canal ruidoso que describimos más arriba. Cabe destacar que cada portador sufre la acción de un canal ruidoso independiente. Por lo tanto, a partir de un estado inicial b se tendrá que el mismo tiene probabilidad $(1 - p)$ de persistir y probabilidad p de transformarse en $b' = b \oplus 1$ (b' es simplemente la negación de b , o el bit b flipado al otro estado posible). El código que presentaremos solamente podrá

permitirnos recuperar la información siempre que haya habido un único error (o, obviamente, en caso de que no haya habido ninguno). Como los errores en cada bit son independientes, hay nueve estados finales posibles para la terna que inicialmente estaba en el estado (b, b, b) . Cada una de ellas tiene las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(b, b, b) &= (1 - p)^3, \\
\text{Prob}(b, b, b') &= \text{Prob}(b, b', b) = \text{Prob}(b', b, b) = p(1 - p)^2, \\
\text{Prob}(b, b', b') &= \text{Prob}(b', b, b') = \text{Prob}(b', b', b) = p^2(1 - p), \\
\text{Prob}(b', b', b') &= p^3.
\end{aligned} \tag{46}$$

Paso 3: Decodificación

En esta etapa intentamos deducir, a partir de la terna evolucionada B_{out} , cuál es el error que ha ocurrido para luego, en la etapa siguiente, corregirlo. Para eso, debemos decidir cuál es el estado del bit que es representado por la terna B_{out} y, con ese fin, utilizamos el criterio más simple: el voto de la mayoría decide. Esto es, si tenemos una terna con tres bits iguales entonces diremos que el estado del bit de salida será el que está escrito en la terna. Si hay dos bits iguales y otro distinto, diremos que la terna representa al estado de los dos bits que son iguales (la mayoría decide). Evidentemente este procedimiento no nos permitirá recuperar la información original en cualquier caso, pero permitirá hacerlo en el caso en que se haya cometido un único error y solamente uno de los elementos de la terna de portadores haya cambiado su estado. En efecto, si se cometen dos errores (como por ejemplo sucede si la terna pasa a ser del tipo (b', b', b)) entonces el voto de la mayoría nos dará que el bit de salida es b' , lo cual es equivocado.

Paso 4: Corrección de errores

Una vez que adoptamos el valor de b que suma mayoría de votos, podemos corregir el bit que sufrió algún cambio (si es que existe, es decir, si es que no recibimos una terna de portadores con los tres valores idénticos). Al finalizar el proceso de corrección volvemos a tener una terna de la forma

$$B_{\text{corr}} = (b, b, b) \tag{47}$$

si es que a lo sumo hubo un error. En cambio, si fueron dos o más los errores generados durante la evolución, entonces la terna que generaremos con este método sería $B_{\text{corr}} = (b', b', b')$ y en ese caso deduciríamos que el bit de salida es b' , lo cual es incorrecto. Pero la virtud del método no reside en su capacidad de corregir todo (cosa que ya dijimos que era imposible) sino en la probabilidad de obtener el resultado correcto. Es fácil ver que esta probabilidad es la suma de aquella correspondiente a la inexistencia de errores y los tres casos en los que hay un error únicamente. Es decir

$$\text{Prob}(b_{\text{in}} = b_{\text{out}}) = (1 - p)^3 + 3p(1 - p)^2 = (1 - p)^2(1 + 2p). \tag{48}$$

Esta probabilidad, entonces, resulta ser

$$\text{Prob}(b_{\text{in}} = b_{\text{out}}) = 1 - 3p^2 + 2p^3. \quad (49)$$

Como vemos, la probabilidad ya no decae linealmente con p sino que lo hace de manera cuadrática. Claramente, si p es menor que $\frac{1}{3}$ entonces el uso de este código representa una ventaja.

3.2. El código cuántico de corrección de errores tipo σ_x

Veamos ahora cómo podemos generalizar las ideas presentadas en el párrafo anterior al caso de un sistema cuántico. En principio, como mencionamos, parece imposible adoptar un código basado en la redundancia. El motivo es simple: queremos proteger el estado de un qubit $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, pero el uso de un código de repetición como el expuesto más arriba es imposible ya que involucra como primer paso la codificación de un qubit en tres portadores realizando una operación que “copia” el estado del qubit. Como vimos, el “teorema de no-clonabilidad” impide la operación de copia por lo cual sería imposible una operación que partiendo de un estado de tres portadores del tipo $(|\Psi\rangle, |0\rangle, |0\rangle)$ nos produzca el estado $(|\Psi\rangle, |\Psi\rangle, |\Psi\rangle)$. Sin embargo, en 1996, Peter Shor mostró que usando redundancia de una manera ingeniosa (y compatible con las leyes de la física cuántica) es posible proteger la información contra la acción de un canal ruidoso como el descrito más arriba. La idea central de los códigos de corrección de errores es, al igual que en el caso clásico, utilizar un número mayor de portadores físicos para proteger el estado de un número menor de qubits. Como ocurre en el caso clásico, no será posible combatir todos los errores sino solo algunos, que deben ser los dominantes en el escenario físico utilizado. Vamos a usar tres portadores físicos para proteger un qubit. La idea que propuso Shor consiste en codificar el estado $|\Psi\rangle$ (que está parametrizado por los números complejos α y β) en algún estado entrelazado de los tres portadores que pertenezca a un subespacio de dimensión 2. Al variar α y β recorreremos todos los estados de este subespacio. Pero la clave del método consiste en encontrar cuál es el criterio con el que debemos seleccionar a dicho subespacio, que usualmente se denomina “el subespacio de estados lógicos”. Presentaremos aquí una versión ligeramente distinta de la propuesta originalmente por Shor y que fue desarrollada poco tiempo después por Daniel Gottesman (y John Preskill). En efecto, Gottesman, en su tesis doctoral (!), demostró que dado que estamos intentando proteger la información cuántica frente a la degradación de errores típicos asociados a operadores de Pauli que afectan a cualquiera de los portadores, es posible definir el subespacio de estados lógicos como aquel formado por los autovectores de autovalor +1 de un conjunto de operadores construidos como productos tensoriales de operadores de Pauli y que se denominan el “estabilizador del código”. Para explicar esto, la mejor estrategia es analizar un ejemplo: Para proteger a un qubit frente a errores de tipo σ_x que afecten a cualquiera de sus tres portadores definimos al código mediante un estabilizador formado por dos operadores definidos como:

$$S_1 = \sigma_{z1} \otimes \sigma_{z2} \otimes I_3, \quad (50)$$

$$S_2 = \sigma_{z1} \otimes I_2 \otimes \sigma_{z3}. \quad (51)$$

Cabe notar que estos operadores conmutan entre sí y satisfacen que $S_1^2 = S_2^2 = I$ y por lo tanto sus autovalores son siempre de la forma $s_1 = \pm 1$ y $s_2 = \pm 1$. El conjunto de estados con autovalores $s_1 = s_2 = +1$ es un subespacio de dimensión 2 del espacio de estados que, siendo el producto tensorial de tres espacios de dimensión 2, tiene dimensión $D = 2^3 = 8$. Como veremos más abajo, la primera etapa de la implementación del código (la codificación) consistirá en una operación unitaria que mapea un estado de la forma $|\psi\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$ en un estado $|\Psi\rangle_L$ que pertenece al subespacio con $s_1 = s_2 = +1$. El motivo por el cual esta estrategia permite corregir errores de tipo σ_x que afecten a cualquiera de los portadores es el siguiente: Los errores a corregir son tres (σ_{x1} , σ_{x2} y σ_{x3}) y cada uno de ellos transforma al subespacio lógico en otro subespacio que es perpendicular al mismo. De este modo, el subespacio de los estados lógicos tendrá tres descendientes erróneos que a su vez serán también subespacios de dimensión 2. El funcionamiento del código requiere que estos cuatro subespacios (el original y sus tres descendientes erróneos) sean ortogonales entre sí y que, por lo tanto, puedan ser distinguidos mediante una medición que de ese modo develará cuál fue el error cometido (que podrá ser obviamente corregido). En el caso que estamos analizando es fácil ver que cada error de tipo σ_x , que afecte a un único qubit, se relaciona con los operadores del estabilizador de la siguiente manera:

- Dado que σ_{x1} anticonmuta con S_1 y S_2 transforma los autoestados de estos operadores con autovalores $s_1 = s_2 = +1$ en autoestados con autovalores $s_1 = s_2 = -1$.
- Dado que σ_{x2} anticonmuta con S_1 pero conmutan con S_2 transforma los estados del espacio lógico en estados con autovalores $s_1 = -1$ y $s_2 = +1$.
- Dado que σ_{x3} conmutan con S_1 y anticonmuta con S_2 , transforma los autoestados del subespacio lógico en estados con autovalores $s_1 = +1$ y $s_2 = -1$.

Es decir, cada uno de los errores puede ser identificado midiendo los operadores S_1 y S_2 (que conmutan pero no forman un CCOC dado que sus autovalores identifican subespacios de dimensiones 2 y por lo tanto hacen del estabilizador un conjunto no-completo de observables que conmutan). De este modo, midiendo S_1 y S_2 detectamos el error y podemos corregirlo.

Analizado este ejemplo, podemos comprender el motivo por el cual este tipo de códigos (denominados “stabilizer codes”) funciona. Si queremos corregir un conjunto de errores que, genéricamente, podemos denotar como E_j ($j = 1, \dots, N_e$) tenemos que tener un estabilizador formado por un conjunto de operadores S_μ que sea tal que cada error E_j pueda ser identificado a partir de las relaciones de conmutación con los elementos de S_μ . Como tanto los errores como los operadores del estabilizador serán productos tensoriales de la identidad y matrices de Pauli, entonces cada E_j conmuta o anticonmuta con cada S_μ . El código funciona cuando el patrón de conmutación o anticonmutación entre los

E_j y los S_μ permita identificar unívocamente a todos los E_j . En el caso de tres qubits que usamos en el ejemplo el patrón de conmutación entre los E_j y los S_μ está descrito en la tabla que se presenta aquí abajo y que resume lo que expusimos más arriba. En dicha tabla, los errores se identifican en la primera columna y las relaciones de conmutación y anticonmutación con los elementos del estabilizador se ubican en la segunda y la tercera columna (un factor +1 indica que los operadores conmutan y un factor -1 que anticonmutan).

Error	S_1	S_2
I	+1	+1
σ_{x1}	-1	-1
σ_{x2}	-1	+1
σ_{x3}	+1	-1

Cuadro 1: Relaciones de conmutación y anticonmutación entre los errores y los elementos del estabilizador.

Es evidente que el patrón de signos que aparece en cada fila es diferente y por lo tanto identifica unívocamente a la fila y, consecuentemente, al error. El proceso de corrección de errores puede entonces describirse del siguiente modo:

Paso 1: Codificación

Se toma al qubit original y a dos sistemas idénticos preparados en un estado de referencia $|0\rangle$ (el qubit original estará preparado en el estado $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$). Se aplica entonces un operador unitario que ejecuta la codificación (encoding) que es de la forma

$$U_{\text{enc}} = \text{C-Not}_{13} \times \text{C-Not}_{12} \times H_1 \quad (52)$$

donde H_k denota al operador de Hadamard actuando sobre el k -ésimo qubit y C-Not_{ij} es el operador control-not en el que el i -ésimo qubit es el control y el j -ésimo el target. Más abajo, se presenta un circuito que contiene a esta etapa de codificación (y al resto de las siguientes). Es simple comprobar que después de esta etapa de codificación, el estado de los tres qubits es:

$$U_{\text{enc}}|\Psi\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle = \alpha|0\rangle_L + \beta|1\rangle_L, \quad (53)$$

donde los estados “lógicos” son

$$|0\rangle_L = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (54)$$

$$|1\rangle_L = \frac{|000\rangle - |111\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (55)$$

En lo que sigue será útil definir la matriz densidad asociada al estado codificado como el siguiente proyector

$$\rho_{\text{enc}} = |\Psi_L\rangle\langle\Psi_L|. \quad (56)$$

Paso 2: Evolución ruidosa

Al actuar el canal ruidoso Unital que aplica el operador σ_x a cada qubit con probabilidad p y lo deja intacto (aplica el operador identidad) con probabilidad $(1-p)$, el estado pasa a ser mixto y debe ser descrito por una matriz densidad, que denotaremos como ρ_{err} , siendo:

$$\rho_{\text{err}} = \sum_k U_k \rho_{\text{enc}} U_k^\dagger p_k. \quad (57)$$

En este caso, hay ocho operadores U_i siendo todos ellos los posibles productos tensoriales de tres factores, cada uno de los cuales puede ser I o σ_x (para cada qubit hay dos opciones, lo cual da un total de ocho operadores que se construyen de este modo). Es fácil calcular las probabilidades asociadas a cada U_i (queda como ejercicio para el lector comprobar esto): Cuando en los tres qubits aparece el operador identidad la probabilidad es $p_0 = (1-p)^3$; cuando aparece un único operador σ_x (y dos identidades) la probabilidad es $p_2 = p(1-p)^2$; cuando hay una identidad y dos operadores σ_x la probabilidad es $p_3 = p^2(1-p)$ y, finalmente, cuando aparecen tres operadores σ_x la probabilidad es $p_4 = p^3$. Es simple calcular la fidelidad del estado después de esta etapa de propagación con errores y demostrar que decae como

$$F = \text{Tr}(\rho_{\text{enc}} \rho_{\text{err}}) = 1 - p(1 - p_z^2) + O(p^2), \quad (58)$$

donde $p_z = |\alpha|^2 - |\beta|^2$.

Paso 3: Decodificación y detección de errores

El estado con errores es transformado con la inversa de la operación de codificación. O sea $U_{\text{dec}} = U_{\text{enc}}^\dagger$. Hecho esto, es simple demostrar que los últimos dos qubits contienen el “síndrome del error” correspondiéndose con la segunda y tercera columna de la tabla presentada más arriba. En efecto, en los estados de los qubits adicionales se almacenan los autovalores de S_1 y S_2 . Cuando ambos qubits son 1 entonces eso quiere decir que el error afectó al primer qubit y por lo tanto debe ser corregido.

Paso 4: Corrección de errores

Para corregir el error se debe aplicar una operación correctiva que en este caso es CC-Not₃₂₁, donde el CC-Not _{ijk} aplica σ_x al k -ésimo qubit siempre que el i -ésimo y el j -ésimo sean 1. Después de esto, el estado del primer qubit será idéntico al inicial siempre y cuando solo haya ocurrido un único error en el proceso. Si denominamos como ρ_{corr} al estado de los tres qubits entonces podemos afirmar que

$$\rho_{\text{corr}} = \text{CC-Not}_{321} U_{\text{enc}}^\dagger \rho_{\text{err}} U_{\text{enc}} \text{CC-Not}_{321}. \quad (59)$$

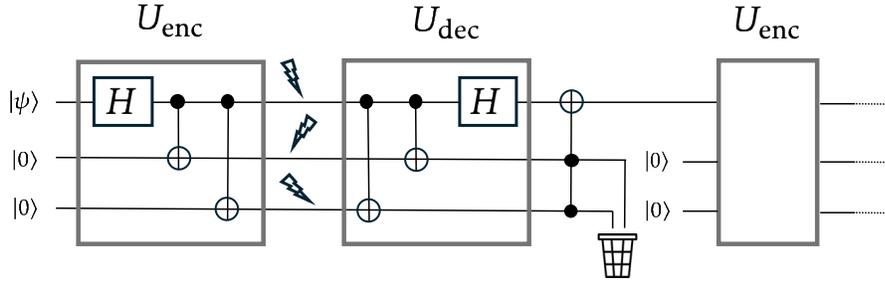
Finalmente, los últimos dos qubits, que registran el síndrome deben ser reseteados al estado $|0\rangle$ y la operación de codificación debe realizarse nuevamente. Si

calculamos la fidelidad del estado codificado en esta segunda aplicación de U_{enc} (al que podemos denominar ρ'_{enc}) con el estado obtenido después de la primera aplicación resulta que

$$F = \text{Tr}(\rho_{\text{enc}}\rho'_{\text{enc}}) = 1 - O(p^2). \quad (60)$$

Se deja al lector el ejercicio de calcular esta fidelidad de manera exacta. Pero lo importante a resaltar aquí es la anulación de los términos que dependen linealmente con p , lo que equivale a la corrección de los errores que afectan a un único qubit.

La Figura ilustra la secuencia de acciones que están involucradas en las etapas de codificación, propagación errónea, decodificación, corrección, reseteo de los qubits auxiliares y nueva codificación.



3.3. Código perfecto de corrección de errores

Por último es interesante analizar otros códigos de estabilizador y es imposible no mencionar aquí el famoso “código perfecto” de corrección de errores. Este código es capaz de corregir errores que involucran a cualquier operador de Pauli (σ_x , σ_y o σ_z) y que afectan a un único qubit. Tal como en el caso anterior, el código está caracterizado por un estabilizador e involucra el uso de cinco portadores físicos. La necesidad de utilizar $N = 5$ portadores surge de la siguiente observación: Para cada portador queremos proteger contra tres errores de Pauli. Por consiguiente tendremos $3N$ descendientes erróneos del subespacio de estados lógicos. Cada uno de ellos debe ser un subespacio de dimensión 2. Por lo tanto, con N portadores físicos, el número de espacios de dimensión 2 que necesitamos asciende a $(3N + 1)$. Por consiguiente, necesitamos que el espacio de estados de los N portadores tenga una dimensión tal que permita albergar estos subespacios. De aquí surge que N debe cumplir que

$$2(3N + 1) \leq 2^N. \quad (61)$$

Notablemente el primer valor para el cual esta desigualdad es posible es $N = 5$ siendo este el menor número de portadores necesarios y suficientes para proteger a un qubit de información contra la acción de cualquier error de Pauli que afecte a un único portador. Este código perfecto, el más compacto posible,

fue descubierto en 1996 con la participación de dos físicos argentinos y otros dos investigadores de EEUU. Su estabilizador está formado por los siguientes operadores:

$$S_1 = I \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x, \quad (62)$$

$$S_2 = \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes I, \quad (63)$$

$$S_3 = \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes I \otimes \sigma_x, \quad (64)$$

$$S_4 = \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes I \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y. \quad (65)$$

La siguiente tabla contiene el patrón de conmutación y anticonmutación que caracteriza a cada uno de los errores de Pauli (que, como mencionamos, en este caso ascienden a 16) (cabe notar que para evitar una tabla tan larga hemos transpuesto la disposición de filas y columnas respecto de la anterior).

Error	I	X ₁	Y ₁	Z ₁	X ₂	Y ₂	Z ₂	X ₃	Y ₃	Z ₃	X ₄	Y ₄	Z ₄	X ₅	Y ₅	Z ₅
S ₁	+	+	+	+	+	-	-	-	+	-	-	+	-	+	-	-
S ₂	+	+	-	-	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	+	+
S ₃	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	+	+	+	-	-
S ₄	+	-	+	-	+	-	-	+	+	+	+	-	-	-	+	-

Cuadro 2: Tabla de errores

4. Ecuación de Lindblad

La forma de Kraus para la evolución temporal de un sistema cuántico abierto es muy útil pero provee un método para estudiar esta evolución que no siempre resulta conveniente. En efecto, dado el estado inicial nos dice cómo calcular el estado a distintos tiempos. No nos da una idea de lo que va sucediendo a medida que transcurre el tiempo sino que provee una visión estroboscópica de dicha evolución. Muchas veces, resulta mucho más útil contar con una ecuación diferencial que nos diga cómo va variando en el tiempo el operador densidad $\rho_A(t)$. Esta ecuación, que suele denominarse “ecuación maestra” puede derivarse a partir de la forma de Kraus, siempre y cuando se cumplan ciertas hipótesis. En efecto, para deducir la ecuación maestra será necesario calcular la derivada temporal del operador ρ_A y para eso resultará vital calcular el incremento

$$\Delta\rho_A = \rho_A(t + dt) - \rho_A(t), \quad (66)$$

a primer orden en el incremento temporal dt para luego tomar el límite del cociente incremental obteniendo la derivada temporal de ρ_A de ese modo. La hipótesis principal que debemos utilizar para obtener una ecuación maestra a partir de la forma de Kraus es que la familia de operadores de Kraus $A_\mu(t)$, que nos permite obtener $\rho_A(t)$ a partir de $\rho_A(0)$, es la misma que la familia de operadores $A_\mu(t + dt)$ que nos permite obtener el operador densidad a tiempo $t + dt$ a partir de su valor a tiempo $t = 0$. Esto implica que las correlaciones que se van generando entre el sistema y su entorno deben ser despreciables a

lo largo de toda la evolución. Por cierto, la existencia de una ecuación maestra tiene implícita (y explícita) la hipótesis de que es posible obtener $\rho_A(t + dt)$ a partir de $\rho_A(t)$, lo cual solamente es posible si en el instante t se cumple la hipótesis bajo la cual obtuvimos la forma de Kraus: la ausencia de correlaciones entre el sistema A y cualquier otro. Esta suposición se conoce con el nombre de hipótesis Markoviana y equivale a imponer que el sistema no tiene memoria de cómo llegó a su estado a tiempo t , sino solamente de este estado y de operadores de Kraus que permiten saltar un intervalo dt .

La ecuación que deduciremos bajo esta hipótesis se conoce con el nombre de ecuación de Lindblad y su deducción es relativamente simple.

4.1. Deducción de la ecuación de Lindblad

Partiremos de la hipótesis de que el operador densidad a tiempo $t + dt$ puede obtenerse a partir del mismo objeto a tiempo t mediante una expresión que tiene la forma de Kraus (como mencionamos, esto lleva implícito que las correlaciones en todo instante deben ser despreciables). En ese caso, podemos escribir

$$\rho_A(t + dt) = \sum_{\mu} A_{\mu}(t, dt) \rho_A(t) A_{\mu}^{\dagger}(t, dt), \quad (67)$$

donde hemos hecho explícita la dependencia de los operadores de Kraus A_{μ} con el tiempo t y el intervalo dt . Analicemos la dependencia de estos operadores con el intervalo dt . Para que en el límite $dt \rightarrow 0$ la expresión anterior nos permita recuperar $\rho_A(t)$, debe cumplirse que uno de los operadores de Kraus tienda a la identidad cuando dt tiende a cero, mientras que todos los otros deberían tender a anularse en ese límite. Consideremos que este operador es el que corresponde a $\mu = 0$ (cosa que podemos hacer sin pérdida de generalidad). Es decir, supondremos que

$$A_0(t, dt) = I - idt(H_0(t) + iL_0(t)) + \dots \quad (68)$$

donde hemos desarrollado este operador en potencias de dt y escrito el término de primer orden en función de sus partes hermiticas y anti-hermíticas que denominamos H_0 y L_0 , respectivamente, lo cual tampoco implica ninguna pérdida de generalidad. Por otra parte, teniendo en cuenta que los otros términos de la forma de Kraus deben ser proporcionales a dt , podemos escribir que

$$A_{\mu}(t, dt) = \sqrt{dt} L_{\mu}(t). \quad (69)$$

Insertando estas expresiones en la ecuación anterior tenemos entonces que

$$\rho_A(t+dt) = \rho_A(t) - idt[H_0(t), \rho_A(t)] + dt\{L_0(t), \rho_A(t)\} + dt \sum_{\mu} L_{\mu}(t) \rho_A(t) L_{\mu}^{\dagger}(t) + \dots \quad (70)$$

De esta ecuación podemos derivar fácilmente la ecuación diferencial que satisface el operador $\rho_A(t)$ (la ecuación maestra). Pero antes de hacerlo conviene

notar que la condición de normalización de los operadores de Kraus impone un vínculo muy claro entre el operador L_0 y los otros operadores L_μ (aquí y en las sumas subsiguientes supondremos que μ es siempre mayor que cero). En efecto, si imponemos la condición $\sum_\mu A_\mu^\dagger(t, dt)A_\mu(t, dt) = I$ a todo orden en el intervalo dt obtenemos que

$$2L_0 = - \sum_{\mu \neq 0} L_\mu^\dagger L_\mu. \quad (71)$$

Recopilando todos estos resultados, y definiendo $H_0(t) = H(t)/\hbar$, la ecuación maestra, que como dijimos más arriba es denominada “ecuación de Lindblad”, resulta ser

$$\dot{\rho}_A(t) = \frac{1}{i\hbar} [H(t), \rho_A(t)] + \sum_{\mu \neq 0} \left(L_\mu(t) \rho_A(t) L_\mu^\dagger(t) - \frac{1}{2} \{L_\mu^\dagger(t) L_\mu(t), \rho_A(t)\} \right). \quad (72)$$

Los operadores L_μ son denominados operadores de Lindblad y, al igual que los operadores de Kraus, sirven para caracterizar la evolución del sistema cuántico abierto. Más allá de que para obtener esta ecuación hayamos tenido que apelar a la aproximación Markoviana (despreciando las correlaciones en todo instante), el cálculo de los operadores de Lindblad a partir de primeros principios resulta imposible en la práctica. Sin embargo, estos operadores sirven para realizar una descripción fenomenológica de los procesos disipativos involucrados en la evolución del sistema.

Es interesante notar que el rol del anticonmutador podría interpretarse como términos que se originan en la parte anti-hermítica del Hamiltoniano y, por consiguiente, dan lugar al decaimiento del sistema en la base de autovectores del operador $\sum_\mu L_\mu^\dagger L_\mu$. En cambio, el primer término tiene un efecto diferente ya que en el mismo los operadores de Lindblad aparecen a la izquierda y a la derecha de ρ_A dando lugar a transiciones de naturaleza diferente a las anteriores.

En lo que sigue, veremos algunos ejemplos de usos de ecuaciones de Lindblad para describir algunos sistemas cuánticos disipativos sencillos.

4.2. Decaimiento de un sistema de dos niveles

Este es un caso sencillo y sumamente relevante, que puede ser analizado mediante una ecuación maestra con un único operador de Lindblad. En efecto, consideremos que

$$L_1 = \sqrt{\gamma} \sigma_-. \quad (73)$$

Es decir, el operador de Lindblad genera transiciones hacia el estado de menor energía de un sistema de dos niveles (que, arbitrariamente elegimos como el estado $|1\rangle$, auto estado de σ_z con auto valor -1). La ecuación maestra entonces es

$$\dot{\rho} = \frac{[H, \rho]}{i\hbar} + \gamma(\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{P_0 \rho + \rho P_0}{2}), \quad (74)$$

donde P_0 es el proyector sobre el estado $|0\rangle$ que resulta ser tal que $P_0 = \sigma_+ \sigma_-$.

La solución de esta ecuación obviamente depende de quién sea el Hamiltoniano H , pero en esta sección estamos interesados en analizar cuál es la contribución que se genera debido a la aparición de los términos con operadores de Lindblad en la ecuación maestra. Por eso, dejemos de lado el término del Hamiltoniano (asumamos que $H = 0$) siendo conscientes de que su efecto es importante pero que resulta muy simple reincorporarlo en las expresiones que veremos más abajo. Podemos formular el problema analizando la evolución del vector de polarización

$$\vec{p} = \text{Tr}(\vec{\sigma}\rho), \quad (75)$$

formado por los valores medios de los operadores de Pauli. Como vimos, este vector nos permite representar el estado en la esfera de Bloch. Es fácil demostrar que los términos de Lindblad en la ecuación maestra generan las siguientes ecuaciones para las componentes cartesianas del vector de polarización:

$$\dot{p}_x = -\frac{\gamma p_x}{2} \quad (76)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\gamma p_y}{2} \quad (77)$$

$$\dot{p}_z = -\gamma(1 + p_z). \quad (78)$$

Es decir, las componentes p_x y p_y tienden a decaer con una tasa fijada por $\gamma/2$, lo que, geoméricamente, puede interpretarse como una tendencia del vector de polarización a acercarse exponencialmente rápido al eje z . Por otra parte, la última ecuación muestra que a lo largo del eje z hay una tendencia a dirigirse hacia el polo sur de la esfera de Bloch, que es la solución estacionaria en la que $P_z = -1$ con una tasa de decaimiento fijada por γ .

4.3. Pérdida de coherencia de un spin

Podemos considerar un modelo en el que el sistema no decaiga hacia un estado predeterminado (el estado $|0\rangle$ que vimos en el ejemplo anterior) sino que solamente tiendan a decaer los elementos no diagonales del operador densidad, que se transforma entonces en una mezcla estadística de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Para eso, podemos usar una ecuación maestra con un único operador densidad Lindblad:

$$L_1 = \sqrt{\gamma}\sigma_z. \quad (79)$$

En este caso, la ecuación es sumamente simple ya que, usando que $\sigma_z \sigma_z = I$, podemos escribir

$$\dot{\rho} = \frac{[H, \rho]}{i\hbar} + \gamma(\sigma_z \rho \sigma_z - \rho). \quad (80)$$

Entonces, resulta muy simple obtener la contribución de la parte de Lindblad de la ecuación maestra a la evolución del vector de polarización, que resulta ser

$$\dot{p}_x = -2\gamma p_x \quad (81)$$

$$\dot{p}_y = -2\gamma p_y \quad (82)$$

$$\dot{p}_z = 0. \quad (83)$$

Es decir, las componentes transversales al eje z decaen exponencialmente, mientras la componente p_z del vector de Bloch se conserva.

5. El oscilador armónico cuántico amortiguado

Un ejemplo típico de sistemas disipativos que se analiza en los primeros cursos de física es aquel correspondiente a un oscilador amortiguado. En ese caso, el amortiguamiento se modela mediante una fuerza viscosa que es proporcional (y opuesta) a la velocidad de la partícula. Veremos que es muy simple plantear una ecuación maestra que genera precisamente este efecto: una fuerza viscosa pero que además genera fluctuaciones que logran que los estados explorados por la partícula estén permitidos por la mecánica cuántica (para ser claros, si solamente hubiera una fuerza viscosa la partícula tendería a alcanzar en el estado final el reposo absoluto, lo cual no es compatible con el principio de indeterminación de Heisenberg). Por otra parte, veremos también que con una pequeña variación en la ecuación maestra (que lograremos incorporando otros operadores de Lindblad) podremos obtener un modelo en el que el estado final es el equilibrio térmico a una temperatura que depende de los parámetros que incluyamos.

Conocemos la ecuación que determina la evolución del operador densidad para un oscilador armónico aislado que resulta ser

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho], \quad (84)$$

donde $H = \hbar\omega(N + 1/2)$ y el operador número es $N = a^\dagger a$.

Consideremos ahora un modelo en el cual incluimos un operador de Lindblad que es proporcional al operador de destrucción a . Es decir, consideraremos la ecuación

$$\dot{\rho} = \frac{[H, \rho]}{i\hbar} + \gamma(a\rho a^\dagger - \frac{1}{2}(N\rho + \rho N)). \quad (85)$$

Cabe notar que el operador número que aparece en los últimos dos términos de la ecuación tiene su origen en la estructura que nos impone la forma de

Lindblad de la ecuación maestra ya que si elegimos como operador de Lindblad a $L_1 = \sqrt{\gamma}a$, tenemos que incluir los últimos dos términos que son de la forma $(L_1^\dagger L_1 \rho + \rho L_1^\dagger L_1)$.

Vale la pena analizar con cierto detalle esta ecuación maestra. Por un lado, resulta evidente que tiene una solución estacionaria, en la cual la derivada temporal de ρ se anula y que resulta ser

$$\rho_{eq} = |0\rangle\langle 0|. \quad (86)$$

En efecto, este término conmuta con el Hamiltoniano H y también anula los tres términos proporcionales a γ en la ecuación de Lindblad, con lo cual es solución de la misma. Puede demostrarse que esta es la solución que siempre se alcanza para tiempos largos, la solución de equilibrio. Entonces, la ecuación maestra describe un proceso dinámico en el cual el oscilador comienza en un estado cuántico cualquiera y termina en el estado fundamental, después de perder toda su energía.

Resulta instructivo también calcular las ecuaciones para los valores medios de la posición y el momento de la partícula, que resultan ser muy parecidas a las de un oscilador armónico amortiguado clásico (con algunas sutiles diferencias). No solamente son interesantes sino fáciles de interpretar. Las ecuaciones para los valores medios de posición y momento pueden obtenerse simplemente analizando la evolución del valor medio del operador de destrucción a , al que denominamos una vez más como $\alpha = \text{tr}(a\rho)$. Si multiplicamos la ecuación maestra por el operador de destrucción y tomamos la traza, del lado izquierdo obtenemos inmediatamente la derivada del valor medio. Es simple calcular lo que se obtiene del lado izquierdo siendo el resultado:

$$\dot{\alpha} = -i\omega\alpha - \frac{\gamma\alpha}{2}.$$

La solución de esta ecuación es trivial, el operador de destrucción decae con una tasa fijada por el parámetro $\gamma/2$ y, consecuentemente, lo mismo sucede con los valores medios de la posición y el momento. Es decir:

$$\alpha(t) = \alpha(0) \exp(-i\omega t - \frac{\gamma t}{2}),$$

De donde surge inmediatamente que las partes reales e imaginarias de α (que no son otra cosa más que los valores medios de la posición y el momento, respectivamente) se comportan de la misma manera. Cabe notar que esto no es lo que sucede con el típico oscilador amortiguado clásico, donde una fuerza viscosa tiende a frenar su movimiento. La diferencia es que el mecanismo disipativo que hemos definido aquí, de manera completamente ad-hoc, está definido por el operador de Lindblad a , que trata a la posición y al momento de manera totalmente simétrica. Por eso, no solamente aparece amortiguamiento en la ecuación de movimiento para el valor medio del momento sino que también aparece un término en la ecuación del valor medio de la posición (que altera la relación directa entre la velocidad y el momento).

La ecuación maestra también nos permite obtener fácilmente la evolución del valor medio de la energía $E = \text{mean}(H)$. Nuevamente, la obtenemos a partir de multiplicar la ecuación maestra por H y tomar su traza. De este modo obtenemos simplemente que:

$$\dot{E} = -\gamma E.$$

Es decir, γ determina la tasa de decaimiento de la energía.

5.1. Aproximación al equilibrio térmico para un oscilador armónico cuántico

En la sección anterior analizamos una ecuación maestra para el oscilador armónico cuántico con un único operador de Linblad $L_1 = \sqrt{\gamma}A$ y demostramos que describe el proceso de amortiguamiento del mismo. En ese proceso, el estado final del oscilador es el estado fundamental del Hamiltoniano $H = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$. Analizaremos ahora un caso similar pero con diferencias cualitativas: en nuestro modelo fenomenológico incorporaremos dos operadores de Linblad que tienen un efecto antagónico: tomaremos $L_1 = \sqrt{\gamma_1}a$ y $L_2 = \sqrt{\gamma_2}a^\dagger$. Por cierto, el efecto de a y a^\dagger es opuesto ya que en un caso L_1 induce saltos en los que se pierde energía, L_2 tendrá el efecto contrario. Como consecuencia, esperamos obtener un límite estacionario radicalmente distinto al del caso anterior: en este caso esperamos alcanzar el equilibrio termodinámico a una cierta temperatura que deberá estar relacionada con el cociente entre las constantes de acoplamiento γ_1 y γ_2 . En lo que sigue mostraremos que esto es, efectivamente, lo que ocurre.

Como mencionamos, tomaremos una ecuación maestra con dos operadores de Linblad L_1 y L_2 , que puede escribirse como

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + \mathcal{L}_1(\rho) + \mathcal{L}_2(\rho),$$

donde los operadores que aparecen en la parte derecha son, simplemente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\rho) &= \gamma_1(a\rho a^\dagger - \frac{1}{2}\{N, \rho\}), \\ \mathcal{L}_2(\rho) &= \gamma_2(a^\dagger\rho a - \frac{1}{2}\{N + 1, \rho\}).\end{aligned}$$

Veamos ahora que esta ecuación conduce a una solución de equilibrio térmico a una temperatura que está fijada por el cociente entre γ_1 y γ_2 . En efecto, si reemplazamos el ansatz $\rho = e^{-xN}$ en el lado derecho e imponemos que el mismo se anule (de modo tal que $\dot{\rho}$ sea cero), se debe cumplir que la suma de \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 aplicados a $\rho = e^{-xN}$ sea nula (ya que el conmutador es cero porque el ρ propuesto conmuta con H). Para evaluar estos términos es importante notar la validez de las siguientes igualdades

$$ae^{-xN}a^\dagger = (N + 1)e^{-x(N+1)},$$

$$a^\dagger e^{-xN} a = a^\dagger e^{-x(aa^\dagger - 1)} a = N e^{-xN} e^x.$$

Una vez demostradas estas identidades, la evaluación del lado derecho de la ecuación maestra es trivial ya que la parte que involucra a los anticonmutadores es la misma para los dos términos de cada anticonmutador. Por consiguiente

$$\mathcal{L}_1(\rho) + \mathcal{L}_2(\rho) = e^{-xN} [N(e^{-x} - 1) - e^{-x}] (\gamma_1 - \gamma_2 e^x).$$

Esto implica que el equilibrio se alcanza solo si se cumple

$$\gamma_1 = \gamma_2 e^x.$$

Definiendo la función $n(x)$ (que será luego identificada con la distribución de Planck)

$$N(x) = \frac{1}{e^x - 1},$$

entonces tenemos que se debe cumplir que

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{n+1}{n}.$$

Esto implica que debemos reescribir γ_1 y γ_2 como

$$\gamma_1 = \gamma(1+n), \quad \gamma_2 = \gamma n.$$

La ecuación maestra con los dos términos con operadores de Lindblad L_1 y L_2 tiene una solución de equilibrio térmico cuando es de la forma

$$\dot{\rho} = [H, \rho] + \gamma(1+n)(a\rho a^\dagger - \{N, \rho\}) + \gamma n(a^\dagger \rho a - \{N, \rho\}).$$

Para comprender mejor la dinámica que describe esta ecuación, conviene analizar la ecuación de evolución de los valores medios de la posición, el momento y la energía. Las primeras dos magnitudes se obtienen estudiando la evolución del valor medio del operador de destrucción a . Es fácil ver que ambos términos disipativos, aquel en el que interviene L_1 y el asociado a L_2 , contribuyen a esta evolución, pero que el resultado es muy simple, se obtiene un decaimiento exponencial con una tasa que resulta ser $\gamma = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}$. En efecto, la ecuación para el valor medio del operador de destrucción, que denotamos como $\alpha = \langle a \rangle$, resulta ser

$$\dot{\alpha} = (-i\omega - \frac{\gamma}{2})\alpha.$$

Es decir, los valores medios de posición y momento se amortiguan tal como lo hacen en el caso del oscilador acoplado con un reservorio a temperatura nula, que estudiamos en el párrafo anterior.

En cambio, si analizamos la evolución del valor medio del operador número $\langle N \rangle$, obtenemos un resultado diferente (recordemos que en el párrafo anterior obteníamos que $\langle N \rangle$ tendía exponencialmente a cero con una tasa fijada por γ). En este caso, la ecuación que obtenemos resulta ser

$$\langle \dot{N} \rangle = -\gamma(\langle N \rangle - n).$$

Es decir, para tiempos largos, el estado asintótico es con $\langle N \rangle = n$ y, por lo tanto, corresponde a un estado de equilibrio térmico cuya temperatura se obtiene escribiendo $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$, siendo

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} = \ln\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right).$$

Como dijimos, la función $n(x)$ puede ser entonces identificada con la distribución de Planck ya que es idéntica al valor asintótico que tiene el valor medio del operador número para el oscilador armónico.

5.2. Algunos comentarios sobre la ecuación maestra

Hemos utilizado la ecuación maestra en su forma de Linblad para describir la aproximación de un oscilador cuántico al equilibrio. Vale la pena realizar algunos comentarios adicionales sobre esta ecuación y sus generalizaciones. Para eso, resulta útil reescribirla en términos de los operadores posición y momento, que aparecen en los operadores de creación y destrucción. Es simple hacer esto, teniendo en cuenta las constantes dimensionales que es necesario incluir para pasar de operadores adimensionales como a y a^\dagger a otros con dimensiones de posición y momento (como x y p). Si tomamos la ecuación que incluye dos operadores de Linblad L_1 y L_2 que vimos más arriba y reescribimos todos los operadores en términos de posición y momento obtenemos la siguiente (queda planteado obtener este resultado como ejercicio):

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + \gamma \frac{(-x\rho p + p\rho x)}{i\hbar} - D_1[x, [x, \rho]] - D_2[p, [p, \rho]] + \gamma\rho,$$

donde

$$D_1 = \frac{\gamma m \omega \coth\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}{\hbar},$$

$$D_2 = \frac{D_1}{\omega^2}.$$

Es interesante notar que el término proporcional a γ (e independiente de la temperatura T) puede reescribirse usando que

$$2(x\rho p - p\rho x) = [x, \{p, \rho\}] - [p, \{x, \rho\}] - 2i\hbar\rho.$$

En consecuencia, la ecuación maestra puede escribirse enteramente en términos de conmutadores y anticonmutadores que solo involucran a la posición y el momento como:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + \gamma \frac{([x, \{p, \rho\}] - [p, \{x, \rho\}])}{i\hbar} - D[x, [x, \rho]] - D[p, [p, \rho]]/m^2\omega^2.$$

Teniendo en cuenta que en el límite de muy altas temperaturas podemos aproximar $\coth\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \approx \frac{k_B T}{\hbar\omega}$, entonces podemos obtener una aproximación en ese límite, despreciando además todos los efectos disipativos. Esto es, podemos

tomar el límite de γ tiende a cero pero $\gamma k_B T$ se mantiene constante. En ese límite, muy usado en la literatura, la ecuación maestra es

$$\dot{\rho} = [H, \rho] - \gamma m k_B T \frac{[x, [x, \rho]]}{\hbar^2} - \gamma k_B T \frac{[p, [p, \rho]]}{m\omega^2}.$$

Los últimos dos términos tienen un efecto muy simple, inducen la diagonalización de la matriz densidad en la base de autoestados de la posición y también en la del momento. La existencia de estos dos términos es fruto, nuevamente, del uso de un acoplamiento que trata a posición y momento de manera simétrica. En cambio, si consideramos un modelo diferente en el que el oscilador que constituye nuestro sistema se acopla solamente con el entorno mediante su posición (tal como se describe en la siguiente sección), la ecuación maestra en el límite de altas temperaturas se reduce a

$$\dot{\rho} = [H, \rho] - \gamma m k_B T \frac{[x, [x, \rho]]}{\hbar^2}.$$

Utilizaremos esta ecuación para investigar un proceso que, justamente, tiene lugar en escalas de tiempo mucho menores que aquella involucrada en el proceso de pérdida de energía ($t_{\text{relax}} = \frac{1}{\gamma}$, que en este límite consideramos infinito). Es el proceso de pérdida de coherencia cuántica, que es fundamental para comprender, como veremos, la transición entre el régimen cuántico y el clásico.

6. Un modelo microscópico con solución exacta: el movimiento Browniano cuántico

Analizaremos aquí un modelo paradigmático de un sistema cuántico abierto, que nos permite estudiar muchos efectos físicos relevantes y que puede servir para describir una gran variedad de situaciones de interés. Por otra parte, tiene la gran virtud de ser resoluble analíticamente y por ello puede estudiarse sin necesidad de apelar a aproximaciones, como la hipótesis Markoviana, que muchas veces son demasiado restrictivas. Por cierto, el modelo nos permitirá mostrar que algunas de las conclusiones que se obtienen apelando a aproximaciones tales como las que conducen a ecuaciones maestras de la forma de Linblad no son necesariamente válidas (o son, como es esperable, válidas solo en ciertas aproximaciones).

6.1. El modelo y su solución en la representación de Heisenberg

Consideramos un oscilador armónico, cuya coordenada denotamos como X y que será el sistema central a estudiar. Este sistema evoluciona interactuando con un entorno formado por muchos otros osciladores (típicamente más livianos) que consideraremos como el entorno E . El Hamiltoniano total del conjunto formado por el sistema S y su entorno E es

$$H_T = H_S + H_E + H_{int}, \quad (87)$$

donde el Hamiltoniano del sistema es

$$H_S = \frac{P^2}{2M} + \frac{M\Omega^2 X^2}{2}, \quad (88)$$

el Hamiltoniano del entorno es

$$H_E = \sum_k \left(\frac{p_k^2}{2m_k} + \frac{m_k \omega_k^2 q_k^2}{2} \right), \quad (89)$$

y la interacción entre los osciladores q_k del entorno E y el del sistema S es

$$H_{int} = -X \sum_k \lambda_k q_k. \quad (90)$$

Es decir, el conjunto $S - E$ está conformado por muchos osciladores a los que tratamos como un entorno y un oscilador central que será nuestro sistema y que interactúa con todos los del entorno (que no interactúan de manera directa entre sí). La Figura X ilustra la situación que describimos, la de un oscilador central con una nube de osciladores a su alrededor. Es fácil ver que el Hamiltoniano que escribimos más arriba puede adaptarse para describir la situación que se muestra en la Figura. Para ello hay que completar los cuadrados y reescribir el Hamiltoniano $H_E + H_{int}$ de la siguiente manera:

$$H_E + H_{int} = \sum_k \frac{p_k^2}{2m_k} + \sum_k \frac{m_k \Omega_k^2 \left(q_k - \frac{\lambda_k X}{m_k \omega_k^2} \right)^2}{2} - \frac{X^2 \sum_k \lambda_k^2}{2m_k \Omega_k^2}. \quad (91)$$

Es decir, el Hamiltoniano anterior describe a un conjunto de osciladores acoplados mediante resortes a un oscilador central con una frecuencia que está renormalizada por la propia interacción.

El modelo es tan simple que admite una solución para las ecuaciones de Heisenberg de todos los osciladores. En efecto, dichas ecuaciones son

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = \sum_k \frac{\lambda_k q_k}{M}, \quad (92)$$

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \frac{\lambda_k X}{m_k}. \quad (93)$$

La solución de la ecuación para los osciladores q_k puede obtenerse de manera simple: será la suma de la solución de la ecuación homogénea y una solución particular, que puede obtenerse integrando el término que actúa como una fuente. En efecto, podemos escribir:

$$q_k(t) = q_k^{(h)}(t) + \int_0^t dt_1 \sin(\omega_k(t - t_1)) \frac{\lambda_k X(t_1)}{m_k \omega_k}. \quad (94)$$

Esta función debe satisfacer las condiciones iniciales apropiadas, lo que se logra eligiendo convenientemente las constantes que aparecen en la solución de

la ecuación homogénea $q_k^{(h)}(t)$. Entonces, la solución completa de la ecuación para los osciladores del entorno resulta ser

$$q_k(t) = q_k(0) \cos(\omega_k t) + \frac{p_k(0) \sin(\omega_k t)}{m_k \omega_k} + \lambda_k \int_0^t dt_1 \sin(\omega_k(t-t_1)) \frac{X(t_1)}{m_k \omega_k}. \quad (95)$$

Esta expresión puede utilizarse en la ecuación que determina el comportamiento de $X(t)$, en la que las funciones q_k aparecen como fuentes en el lado derecho de la misma. De este modo, obtenemos

$$\ddot{X} + \Omega^2 X - \sum_k \frac{\lambda_k^2}{m_k M \omega_k} \int_0^t dt_1 \sin(\omega_k(t-t_1)) X(t_1) = \sum_k \frac{\lambda_k q_k^{(h)}(t)}{M}. \quad (96)$$

La integral temporal que aparece en esta ecuación puede reescribirse de la siguiente manera. Definiremos el núcleo del amortiguamiento, que denominaremos como $\eta(t)$ de modo tal que

$$\eta(t) = - \sum_k \frac{\lambda_k^2 \sin(\omega_k t)}{M m_k \omega_k}. \quad (97)$$

Utilizando esta notación, la ecuación para $X(t)$ resulta ser

$$\ddot{X} + \Omega^2 X(t) + \int_0^t dt_1 \eta(t-t_1) X(t_1) = \sum_k \frac{\lambda_k q_k^{(h)}(t)}{M}. \quad (98)$$

En la literatura es habitual encontrar esta misma ecuación escrita de otro modo. Definiremos el núcleo de la disipación $\gamma(t)$ de modo tal que $\eta(t) = \dot{\gamma}(t)$, lo que implica que

$$\gamma(t) = \sum_k \frac{\lambda_k^2 \cos(\omega_k t)}{M m_k \omega_k^2}. \quad (99)$$

Integrando por partes, la ecuación para $X(t)$ puede escribirse entonces como

$$\ddot{X} + \Omega_R^2 X + \int_0^t dt_1 \gamma(t-t_1) \dot{X}(t_1) = - \frac{\gamma(t) X(0)}{M} + \sum_k \frac{\lambda_k q_k^{(h)}(t)}{M}. \quad (100)$$

En esta expresión, la frecuencia renormalizada está definida como

$$\Omega_R^2 = \Omega^2 - \gamma(0). \quad (101)$$

6.2. La densidad espectral del entorno

Es habitual definir la densidad espectral del entorno que caracteriza la cantidad de osciladores en cada banda del entorno y la intensidad con la que se acoplan con el sistema. Esta densidad espectral es

$$J(\omega) = \sum_k \frac{\lambda_k^2 \delta(\omega - \omega_k)}{m_k \omega_k}, \quad (102)$$

con lo que el núcleo de la disipación es

$$\gamma(t) = \int_0^\infty \frac{J(\omega) \cos(\omega t)}{\omega} d\omega. \quad (103)$$

Los entornos se clasifican de acuerdo al comportamiento de su densidad espectral para frecuencias bajas, ya que todos ellos tienen una frecuencia máxima, también denominada “frecuencia de corte Λ ”, por encima de la cual la densidad espectral se anula y define la escala de tiempos más corta en la cual el entorno es capaz de reaccionar. El caso más reconocido es aquel que suele denominarse “entorno óhmico” que cumple que $J(\omega) = M\gamma\omega\theta(\omega - \Lambda)$ (donde la función $\theta(x)$ se anula para $x > 0$) y transforma a Λ en la frecuencia de corte del entorno.

6.3. Ecuación local en el tiempo para $X(t)$

Analizaremos ahora las propiedades de la solución de la ecuación para el operador $X(t)$ que, recordemos, es el operador de Heisenberg del sistema. De acuerdo a lo que vimos, evoluciona mediante la ecuación xxxx en la que aparece el núcleo del amortiguamiento $\eta(t)$ y en el lado derecho aparece un término de fuente que depende de la solución homogénea para las coordenadas de los osciladores del entorno. Entonces, la solución de esta ecuación puede obtenerse usando la misma estrategia que describimos antes: $X(t)$ será la suma de una solución de la ecuación homogénea y una solución particular. Esta última, tal como hicimos antes, se obtiene encontrando la función de Green de la parte homogénea. Es decir,

$$X(t) = x^{(h)}(t) + \int_0^t dt_1 \mu_1(t - t_1) \sum_k \frac{\lambda_k q_k^{(h)}(t_1)}{M}, \quad (104)$$

donde la función $\mu_1(t)$ satisface la ecuación homogénea de $X(t)$ y las condiciones iniciales $\mu_1(0) = 0$, $\dot{\mu}_1(0) = 1$.

Analicemos ahora cómo resolver la ecuación homogénea, que involucra un núcleo integral y que es no-local en el tiempo. Es interesante notar aquí que utilizando la transformada de Laplace es posible encontrar soluciones explícitas a esta ecuación para ciertas densidades espectrales $J(\omega)$ (por ejemplo, para un entorno óhmico con una función de corte Lorentziana, ver Martínez y Paz). De ese modo podemos obtener en forma relativamente la función $\mu_1(t)$ en esos casos. Pero, ciertamente, no es posible obtener la solución de esta ecuación en el caso más general (para una densidad espectral arbitraria). Sin embargo, es muy importante notar que la ecuación homogénea puede ser reescrita de una manera muy simple, transformándola en una ecuación local en el tiempo (es decir, una ecuación sin una integral temporal con un núcleo no-local), con coeficientes que dependen explícitamente del tiempo. Veremos ahora cómo obtener esta representación de la ecuación homogénea.

Como vimos, la ecuación homogénea para $X(t)$ es:

$$\ddot{X} + \Omega^2 X + \int_0^t dt_1 \eta(t - t_1) X(t_1) = 0. \quad (105)$$

Como esta ecuación es lineal, el espacio de soluciones tiene la estructura de un espacio vectorial. Además, es claro que la dimensión de dicho espacio es 2, ya que la ecuación es de segundo grado (la presencia del núcleo integral evidentemente no altera este hecho). Por consiguiente, cada solución de esta ecuación está parametrizada por el valor de la función y su derivada en el instante inicial. Podemos escribir, por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea como combinación lineal de dos funciones, $\mu_1(t)$ y $\mu_2(t)$, que forman base del espacio de soluciones (y que cumplen, por ejemplo, que $\mu_1(0) = 0$, $\dot{\mu}_1(0) = 1$, $\mu_2(0) = 1$, $\dot{\mu}_2(0) = 0$). Es decir, cualquier solución de la ecuación homogénea será de la forma

$$X(t) = a\mu_1 + b\mu_2, \quad (106)$$

y además

$$\dot{X} = a\dot{\mu}_1 + b\dot{\mu}_2. \quad (107)$$

Usando estas ecuaciones podemos despejar las constantes a y b en función de X , \dot{X} , μ_1 y μ_2 . En efecto, es simple demostrar la validez de las siguientes expresiones:

$$b = \frac{X\dot{\mu}_1 - \dot{X}\mu_1}{\mu_2\dot{\mu}_1 - \mu_1\dot{\mu}_2}, \quad (108)$$

$$a = \frac{X\dot{\mu}_2 - \dot{X}\mu_2}{\mu_1\dot{\mu}_2 - \dot{\mu}_1\mu_2}. \quad (109)$$

Usando estas expresiones, el término no-local en la ecuación para $X(t)$ puede reescribirse como

$$\begin{aligned} NL &= \int_0^t dt_1 \eta(t-t_1) X(t_1) \\ &= - (a(\ddot{\mu}_1 + \Omega^2\mu_1) + b(\ddot{\mu}_2 + \Omega^2\mu_2)) \\ &= \frac{(X\dot{\mu}_2 - \dot{X}\mu_2)(\ddot{\mu}_1 + \Omega^2\mu_1) - (X\dot{\mu}_1 - \dot{X}\mu_1)(\ddot{\mu}_2 + \Omega^2\mu_2)}{\mu_2\dot{\mu}_1 - \mu_1\dot{\mu}_2}. \end{aligned} \quad (110)$$

Esta expresión puede reordenarse agrupando todos los términos proporcionales a $X(t)$ y aquellos que son proporcionales a $\dot{X}(t)$. De este modo se obtiene

$$NL = -X \left(\Omega^2 - \frac{\dot{\mu}_2\ddot{\mu}_1 - \dot{\mu}_1\ddot{\mu}_2}{\mu_2\dot{\mu}_1 - \mu_1\dot{\mu}_2} \right) + \dot{X} \left(\frac{\mu_1\ddot{\mu}_2 - \mu_2\ddot{\mu}_1}{\mu_2\dot{\mu}_1 - \mu_1\dot{\mu}_2} \right). \quad (111)$$

Reemplazando el término no-local (NL) en la ecuación de Heisenberg para $X(t)$ obtenemos que la parte homogénea de dicha ecuación es la de un oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo y que se mueve en un medio viscoso que introduce una constante de amortiguamiento que también depende del tiempo. En efecto, introduciendo las funciones

$$\tilde{\gamma}(t) = \frac{\mu_1\ddot{\mu}_2 - \mu_2\ddot{\mu}_1}{\mu_2\dot{\mu}_1 - \mu_1\dot{\mu}_2}, \quad (112)$$

$$\tilde{\Omega}^2(t) = \frac{\dot{\mu}_2\ddot{\mu}_1 - \dot{\mu}_1\ddot{\mu}_2}{\mu_2\dot{\mu}_1 - \mu_1\dot{\mu}_2}, \quad (113)$$

la ecuación para $X(t)$ puede escribirse como

$$\ddot{X} + \tilde{\Omega}^2(t)X + \tilde{\gamma}(t)\dot{X} = \sum_k \frac{\lambda_k q_k^{(h)}(t)}{M}. \quad (114)$$

Por otra parte, por todo lo dicho, la solución de esta ecuación es, simplemente:

$$X(t) = X(0)\mu_2(t) + \frac{P(0)\mu_1(t)}{M\Omega} + \int_0^t \mu_1(t-t_1) \sum_k \lambda_k q_k^{(h)}(t_1). \quad (115)$$

6.4. Evolución de los valores medios de $X(t)$ y sus momentos

Usando la ecuación xxx, y suponiendo que el estado inicial del entorno de osciladores es inicialmente térmico (es decir, que se cumple que $\langle q_k \rangle = 0$ y $\langle p_k \rangle = 0$) es inmediato obtener la siguiente ecuación para los valores medios de la posición y del momento del sistema:

$$\langle \dot{X} \rangle = \frac{\langle P \rangle}{M}, \quad (116)$$

$$\langle \ddot{X} \rangle + \tilde{\Omega}^2(t)\langle X \rangle + \tilde{\gamma}(t)\langle \dot{X} \rangle = 0. \quad (117)$$

Es claro que para obtener la forma funcional de la frecuencia y la tasa de amortiguamiento debemos encontrar las funciones μ_1 y μ_2 , para lo cual es necesario resolver la ecuación no-local para las condiciones iniciales satisfechas por estas funciones. Como dijimos más arriba esto puede hacerse para algunos ejemplos relevantes como el de un entorno óhmico con una función de corte Lorentziana. Pero no es nuestra intención analizar aquí soluciones particulares sino examinar propiedades generales de este modelo, válidas para cualquier densidad espectral. Y las dos ecuaciones que acabamos de obtener tienen esa propiedad: el valor medio de la posición oscila como un resorte con frecuencia variable y amortiguamiento dependiente del tiempo. Si el lector está intrigado por la forma en que estas funciones dependen del tiempo en algún caso realista (tal como el mencionado entorno óhmico) podemos mencionar que la frecuencia $\tilde{\Omega}$ es igual a Ω en el instante inicial y evoluciona en una escala de tiempos que típicamente viene dada por la frecuencia de corte Γ para adoptar el valor de la frecuencia renormalizada Ω_R para tiempos más largos. Análogamente, la tasa de disipación $\tilde{\gamma}$ se anula inicialmente pero tiende a una constante γ , fijada por la densidad espectral, para tiempos mayores que $1/\Gamma$.

Usando la forma general de la solución $X(t)$ (que, como dijimos, es suma de la solución de la parte homogénea y una solución particular, ver xxx) podemos calcular ahora cualquier momento de este operador (es decir, podemos calcular el valor medio de potencias de $X(t)$ y sus derivadas). Presentaremos aquí algunos resultados que nos servirán después para sacar conclusiones generales sobre la evolución del estado cuántico del sistema. Por ejemplo, usando la expresión

para $X(t)$ podemos calcular la derivada del valor medio de $X^2(t)$ y demostrar la validez general de la ecuación

$$\langle \dot{X}^2(t) \rangle = \langle X(t)P(t) + P(t)X(t) \rangle / M. \quad (118)$$

Por otra parte, la derivada temporal del valor medio del momento al cuadrado también puede calcularse usando la relación $P = M\dot{X}$ y la ecuación de Heisenberg para $X(t)$. De ese modo obtenemos que

$$\langle \dot{P}^2 \rangle = M^2 \langle \dot{X}\ddot{X} + \ddot{X}\dot{X} \rangle = P \quad (119)$$

$$= -M\tilde{\Omega}^2 \langle PX + XP \rangle - \tilde{\gamma}(t) \langle P^2 \rangle + \sum_k \lambda_k \langle \dot{X} q_k^{(h)}(t) + q_k^{(h)}(t) \dot{X} \rangle. \quad (120)$$

La solución de la ecuación de movimiento para $X(t)$, incluyendo el acoplamiento con el entorno, puede escribirse como

$$X(t) = X(0)\mu_2(t) + \frac{P(0)\mu_1(t)}{M\Omega} + \sum_k \lambda_k \int_0^t dt_1 \mu_1(t-t_1) q_k^{(h)}(t_1). \quad (121)$$

Con esta expresión podemos calcular, por ejemplo, cualquiera de los momentos de los operadores X y P . Cabe notar que en general estos momentos dependerán de las condiciones iniciales para el sistema S (es decir, dependerán de los momentos de la distribución inicial: $\langle X^2(0) \rangle$, etc). La única forma que los momentos a tiempos largos no dependan de las condiciones iniciales del sistema y que se alcance una situación de auténtico equilibrio es que las funciones μ_1 y μ_2 decaigan para tiempos largos, lo que impone restricciones sobre la densidad espectral del entorno.