Problema adicional Informacion Cuántica

April 8, 2025

1. **Todo estado puro entrelazado viola una desigualdad de Bell.** Veamos primero que todo estado entrelazado de dos qubits viola una desigualdad de Bell tipo CHSH. Sin pérdida de generalidad, podemos escribir cualquier estado en la representación de Schmidt:

$$|\Psi\rangle = \lambda_1|00\rangle + \lambda_2|11\rangle$$

Considere los observables locales parametrizados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \cos\theta\ \sigma_z + \sin\theta\ \sigma_x \\ B(\alpha) &= \cos\alpha\ \sigma_z + \sin\alpha\ \sigma_x \end{aligned}$$

   (a) Muestre que sobre este estado se cumple que:

$$\langle\sigma_x \otimes \sigma_x\rangle = 2\lambda_1\lambda_2, \qquad \langle\sigma_z \otimes \sigma_z\rangle = 1, \qquad \langle\sigma_x \otimes \sigma_z\rangle = \langle\sigma_z \otimes \sigma_x\rangle = 0$$

   (b) Elija ahora los operadores $A_0 = A(0)$, $A_1 = A(\pi/2)$, $B_0 = B(\alpha)$ y $B_1 = B(-\alpha)$, muestre que para cualquier estado puro entrelazado de dos qubits se viola la desigualdad de Bell CHSH. Para ello vea que el valor medio del operador de Bell asociado satisface:

$$|\langle\mathcal{B}\rangle| = 2|\cos\alpha + 2\lambda_1\lambda_2\sin\alpha|$$

   y por lo tanto siempre es posible encontrar un α pequeño y $\alpha \geq 0$, tal que $|\langle\mathcal{B}\rangle| \geq 2$.

   (c) *Bonus:* Muestre que esta idea se puede extender para cualquier estado puro entrelazado de un sistema d-dimensional:

$$|\Psi\rangle = \sum_k \lambda_k|\phi_k\rangle_A|\psi_k\rangle_B$$

   realizando la siguiente asignación:

$$|00\rangle \equiv |\phi_1\rangle_A|\psi_1\rangle_B \qquad |11\rangle \equiv |\phi_2\rangle_A|\psi_2\rangle_B$$

   y utilizando observables locales análogos.